

Allgemeines. Didaktik. Bibliographisches.

● Haar, Alfred: *Gesammelte Abhandlungen* [Összegyűjtött munkái]. Herausgegeben von Béla Szökefalvi-Nagy. Budapest: Verlag der Akademie der Wissenschaften 1959. 560 S. Ft. 250,— [Ungarisch].

Alfred Haar war ein würdiger Vertreter der großen ungarischen Tradition in der Mathematik. Trotz der Kürze seines Lebens (1885—1933) ist es ihm gelungen, bahnbrechende Entdeckungen in drei verschiedenen Gebieten der Mathematik zu machen und eine Reihe anderer wichtiger Arbeiten zu schreiben. Die Herausgabe seiner gesammelten Werke durch die Ungarische Akademie der Wissenschaften, 26 Jahre nach seinem Tode, ist deshalb sehr begrüßenswert. Die 35 veröffentlichten Arbeiten von Alfred Haar erscheinen hier nach Gegenständen geordnet: A. Eine Jugendarbeit mit D. König über einfach geordnete Mengen. B. Orthogonal-funktionenreihen. Hier findet man das berühmte Haarsche Funktionensystem, das in Haar's Inauguraldissertation eingeführt wurde und eine Reihe von Mitteilungen über verschiedene Entwicklungsprozesse. C. Analytische Funktionen. D. Partielle Differentialgleichungen. E. Variationsrechnung. Hier findet man in 7 Arbeiten das „Haarsche Lemma“ und seine Anwendung auf verschiedene Probleme der Variationsrechnung. F. Approximation von Funktionen und lineare Ungleichungen. Haar's einzige Arbeit über gleichmäßige Approximation war der Ursprung einer großen Reihe von Arbeiten über Approximation, insbesondere aus der russischen Schule. G. Diskrete Gruppen und Funktionenfolgen. Die Fragen über unendliche Gruppen und isomorphe Funktionenfolgen, die Haar betrachtete, werden heutzutage meistens mit der Pontrjaginschen Dualitätstheorie behandelt. Seine Arbeit über Gruppencharaktere ist auch heute noch von sachlichem Interesse. H. Kontinuierliche Gruppen. In einer einzigen Arbeit hat Haar die Bahn für die ganze Theorie der lokal-kompakten Gruppen und abstrakten harmonischen Analysis geöffnet, und zwar durch die Entdeckung des invarianten Maßes auf diesen Gruppen. Heutzutage ist der Begriff des Haarschen Maßes eines der wichtigsten Hilfsmittel der Analysis, und die Phrase „Haarsches Maß“ ist ein Ausdruck, der von allen Analytikern verstanden wird. Die meisten von Haars Arbeiten sind im Original in deutscher Sprache erschienen. Diese Arbeiten erscheinen in den Gesammelten Arbeiten ohne Änderung. Den in Ungarisch erschienenen Originalarbeiten ist, mit Ausnahme eines Berichtes über Bolyais Geometrie, in den Gesammelten Arbeiten eine deutsche Übersetzung beigefügt. Der Herausgeber hat wertvolle Kommentare zu jeder Gruppe von Arbeiten geschrieben und auch die Übersetzungen der ungarischen Arbeiten ins Deutsche verfaßt.

E. Hewitt.

● Kaplansky, Irving, Edwin Hewitt, Marshall Hall jr. and Robert Fortet: *Some aspects of analysis and probability*. (Surveys in Applied Mathematics. Vol. 4.) New York: John Wiley & Sons, Inc. 1958. XI, 243 p. \$ 9.00.

Die Arbeiten werden in diesem Zbl. einzeln angezeigt.

● *Proceedings of the fourth Canadian Mathematical Congress, Banff, 1957.* *Comptes rendus du quatrième congrès canadien de mathématiques, Banff, 1957.* Toronto, Canada: University of Toronto Press 1959. VIII, 184 p. \$ 6.00.

The Canadian Mathematical Congress (französ. Titel.: La Société Mathématique du Canada) hat 1957 sein sechstes Sommerseminar in Edmonton und seinen vierten Kongress in Banff abgehalten. Teil I und II der Proceedings enthalten die administrativen Daten und die (z. T. gekürzten) offiziellen Ansprachen des Sommerseminars und des Kongresses sowie zwei Diskussionen „High School Mathematics“ und „Mathematics in the University and in Industry“. Teil III

bringt 18 kurze "Abstracts of Contributed Papers", in Teil IV werden sechs "Invited Lectures" wiedergegeben. — Die Arbeiten aus IV werden in diesem Zbl. einzeln angezeigt.

● **Tietze, Heinrich:** Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit. Vierzehn Vorlesungen für Laien und für Freunde der Mathematik. Bd. 1, 2. 2. durchgearb. Aufl. München: C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung 1959. XX, 256 S., 115 Fig. im Text, 10 Taf.; VIII, 297 S., 41 Fig. im Text, 8 Taf. Beide Bände geh. DM 28,—; Ganzlein. DM 36,—.

Vgl. die Besprechung der 1. Auflage in diesem Zbl. 32, 101.

● **Weinacht, J. H.:** Prinzipien zur Lösung mathematischer Probleme. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn 1958. VIII, 116 S. mit 45 Beispielen und 45 Abb. DM 8,80.

In dem bekannten Buch von Pólya, Schule des Denkens (deutschsprachige Auflage, Bern 1948) sind allgemeine Prinzipien angegeben, wie man zur Lösung einer mathematischen Aufgabe kommen kann [zusammengefaßt in den vier Punkten 1. Verstehen der Aufgabe; 2. Entwurf eines Lösungsplanes (durch Studium des Zusammenhänge zwischen Gegebenem und Gesuchtem und evtl. Betrachtung von Hilfsgrößen und -aufgaben); 3. Durchführung des vorgenommenen Planes; 4. Prüfung der erhaltenen Lösung]. Diese allgemeinen Prinzipien werden im vorliegenden Buch vor allem an Aufgaben aus der Elementargeometrie (Konstruktionen bzw. Beweisen von Sätzen) erläutert. Dies geschieht dadurch, daß 45 Aufgaben so zusammengestellt sind, daß gewisse geometrische Prinzipien zur Lösung der Aufgaben einer Gruppe gebraucht werden können. Die benutzten Methoden sind nach der Behandlung der einzelnen Beispiele einer Gruppe zusammenfassend erläutert, so daß klar wird, wie sich die bewährten elementargeometrischen Methoden den allgemeinen Prinzipien des Buches von Pólya (auf den übrigens nur im Zusammenhang mit einer Schiffskursaufgabe aus dem obigen Buch hingewiesen wird) einordnen. Die behandelten Aufgaben sind von verschiedenem Schwierigkeitsgrad (z. B. Satz vom Peripheriewinkel oder das Berührungsproblem des Apollonius bei 3 Kreisen). Bei den wenigen algebraischen Beispielen ist leider oft der beabsichtigte Plan des Buches nicht verwirklicht worden. In den Beispielen 38 und 42 sind nicht alle Schlüsse stichhaltig.

A. Bergmann.

Kurepa, Giorgio: Alcuni aspetti internazionali della riforma dell'insegnamento matematico. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 14, 226—236 (1959).

Buck, R. Creighton: A look at mathematical competitions. Amer. math. Monthly 66, 201—212 (1959).

Forsythe, George E.: The role of numerical analysis in an undergraduate program. Amer. math. Monthly 66, 651—662 (1959).

Jéquier, Ch.: Enquête pédagogique: Comment formons-nous de jeunes actuaires? Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. 59, 275—291 (1959).

Geschichte.

● **Smith, David Eugene:** A source book in mathematics. Vol. 1, 2. Unabridged and unaltered republ. of the first ed. 1929. New York: Dover Publications, Inc. 1959. XIII, 701 p. One vol. \$ 1,85.

Vgl. die Besprechung der 1. Aufl. im J.-Buch Fortschr. Math. 55 (1929), 583.

● **Vogel, Kurt:** Vorgriechische Mathematik. II: Die Mathematik der Babylonier. (Mathematische Studienhefte. Heft 2.) Hannover: Hermann Schroedel Verlag KG.; Paderborn: Verlag Ferdinand Schöningh 1959. 94 S., 37 Abb. DM 12,00.

Der erste Teil dieses Werkes (dies. Zbl. 81, 5), hat die Vorgeschichte und Ägypten zum Gegenstand. Im ersten Kapitel dieses zweiten Heftes (S. 4—15) gibt Verf. einen Überblick über die Geschichte der Völker, die von der 2. Hälfte des 4. Jahrtausends v. Chr. bis ins 1. Jahrhundert n. Chr. das Zweistromland bewohnten. Er schildert die Entwicklung ihrer Schrift und Schreibgeräte, die Ablösung des Sumerischen durch das Akkadische und gibt eine allgemeine Übersicht über die bei Ausgrabungen zutage geförderten mathematischen Texte, ihre Entzifferung, ihren Inhalt, ihr Alter, ihre geistige Herkunft. Das zweite Kapitel (S. 15—25) handelt von der Entstehung und Entwicklung der babylonischen Zahl- und Maßsysteme. Im dritten Kapitel (S. 26—35) werden die Rechentechniken vom Addieren bis zum Radizieren beschrieben und an Beispielen erläutert. Die beiden folgenden Kapitel (S. 35—63) zeigen, wie die Babylonier arithmetische Probleme (z. B. Reihen, pythagoreische Zahlentripel, Aufgaben aus dem täglichen Leben) behandelten, wie sie Gleichungen 1. und 2. Grades mit einer und mehreren Unbekannten, ja sogar gewisse kubische Probleme und einzelne Gleichungen höheren Grades lösten und wie sie zu einigen allgemeinen Formeln gelangten. Im sechsten Kapitel (S. 64—82) werden wir mit der babylonischen Geometrie bekannt gemacht. Das siebente Kapitel (S. 83—85) enthält eine allgemeine Charakterisierung der babylonischen Mathematik, die die ägyptische überragt. Sie ging von Aufgaben aus dem Alltag aus, entwickelte geeignete Methoden zu ihrer Lösung, läßt aber auch theoretisches Interesse an Dingen erkennen, die für die Praxis ohne Belang sind. Den Schritt zum System und zum Beweis vollzogen die Babylonier nicht. Hinweise auf den Schulunterricht der Babylonier und auf die Verbreitung ihrer mathematischen Kenntnisse unter den Nachbarvölkern beschließen dieses Kapitel. Es folgen für den Unterricht in unseren Schulen 16 Übungen an babylonischen Aufgaben, Literaturangaben und ein ausführliches Namen- und Sachverzeichnis. Die knappe Darstellung stützt sich auf den neuesten Stand der Forschung. An zahlreichen Beispielen gewinnt der Leser eine Vorstellung von den mathematischen Leistungen der Babylonier, einen Einblick in ihr tägliches Leben, ihre Sprache und Schrift und darüber hinaus eine Ahnung von der allmählichen Entwicklung der Ideen und der Leistungen des Menschengeschlechts.

E. Löffler.

Thorndike, Lynn: Some tracts on comets, 1456—1500. Arch. internat. Hist. Sci. 11, 225—250 (1959).

In 1950 I published a volume entitled, Latin Treatises on Comets Between 1238 and 1368 A. D. The present paper deals with some tracts, written in Latin, on comets of the second half of the fifteenth century.

Vogel, Kurt: Nachlese zum 400. Todestag von Adam Ries(e). Praxis der Math. 1, 85—88 (1959).

Diese Nachlese ist ein Auszug aus der Festrede, die Verf. am 9. Mai 1959 bei der Erinnerungsfeier zum 400. Todestag von Adam Ries (1492—1559) in Staffelstein gehalten hat. Nach kurzen Bemerkungen über den Lebensgang dieses bedeutendsten aller deutschen Rechenmeister wendet er sich der Frage nach den Quellen zu, aus denen dieser seine arithmetischen und algebraischen Aufgaben zusammengelesen hat. Er nennt die Vorgänger der Riesschen Rechenbücher, die Ries selbst erwähnt und studiert hat, zeigt, daß auch diese zum Teil aus älteren Quellen geschöpft haben und kommt zu dem Ergebnis, daß Ries wahrscheinlich das im Jahre 1483 gedruckte Bamberger Rechenbuch gesehen hat, das manchem seiner Vorgänger nachweislich als Vorbild diente. Auch über die Quellen seiner Algebra, der Coß, hat Ries einige Aufschlüsse gegeben. Verf. macht nähere Angaben über diese Quellen, ihre Zusammenhänge untereinander, ihre Fundorte und zeigt, inwieweit Ries sie verwertet hat. Er macht es wahrscheinlich, daß die arithmetischen und algebraischen Kenntnisse, die von Italien, Spanien und Frankreich ausgingen, sich in Deutschland im 15. und 16. Jahrhundert über die Benediktinerklöster nach Mittel- und Süddeutsch-

land verbreitet haben. Er erhofft von weiteren Untersuchungen über den genaueren Inhalt der von ihm angeführten Handschriften und über deren gegenseitige Abhängigkeit neue Einblicke in diese Vorgänge und in die Geschichte einzelner mathematischer Aufgaben. Die Arbeit ist mit zahlreichen Literaturangaben versehen.

E. Löffler.

Reidemeister, Kurt: Über Leonhard Euler. Math.-phys. Semesterber. 6, 4—(1958).

Verchunov, V. M.: N. I. Lobačevskij und die Mechanik. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. 13, Nr. 6, 77—89 (1959) [Russisch].

In this very interesting paper the author illuminates the role of the famous Russian geometer Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1793—1856) in the field of Mechanics, while he was in the period 1812—1847 a professor on the University of Kazan, where he gave lectures on arithmetic, elementary geometry, elementary and higher algebra, trigonometry, analytical and descriptive geometry, differential and integral calculus, calculus of variations, theory of probability, theory of numbers, experimental and theoretical physics, different parts of mechanics, geodesy, topography and theoretical and physical astronomy. In these lectures Lobačevskij gave the fundamentals about the motion, space, time, velocity, forces opposing to the known Newton's ideas about absolute space and time, joining the conception of the space with geometry, and the motion with the property of the matter. He first joined the time with the motion in the space giving in this way the performance about of non-untied join among the conceptions of motion, space and time. The parallelogram law of force he used on the impulses proportional to velocities. His conception about central forces coincides with the conception of the known yugoslav scientist Rudjer Bošćević (from Ragusa, 1711—1787, "Philosophiae naturalis Theoria redacta ad legem existentium", Vienna, 1759). At the end of the paper is a list of 24 papers.

D. Rašković.

Körber, Hans-Günther: Aus der Korrespondenz Alexander von Humboldt und Carl Friedrich Gauß mit Teilnehmern an geomagnetischen Beobachtungen. Forsch. Fortschr. 33, 298—303 (1959).

Dávid, Lajos: In memoriam Wolfgang Bolyai (zum 100-jährigen Todestag). Magyar Tud. Akad., mat. fiz. Tud. Oszt. Közleményei 9, 215—236 (1959) [Ungarisch].

Könyves Tóth, K.: W. Bolyai precursor of modern didactics of mathematics (To the 100th anniversary of his death). Mat. Lapok 10, 12—22 (1959) [Ungarisch].

Biermann, Kurt-R.: Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Dokumente für sein Leben und Wirken. (Zum 100. Todestag). Abh. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin Kl. Math. Phys. Techn. 1959, Nr. 2, 68 S. (1959).

Verf. legt mehrere bisher kaum beachtete interessante Dokumente über die Berufung nach Breslau (1826), die Tätigkeit in Berlin (seit 1828) und den Weggang nach Göttingen (1855) vor. Ergänzend zählt er die in Berlin und Göttingen gehaltenen Vorlesungen und die durch kurze Inhaltsangaben gekennzeichneten offiziellen Schreiben an die Breslauer Philosophische Fakultät und an das Preussische Kultusministerium auf. Besondere Hervorhebung verdient das sehr sorgfältige Namenverzeichnis.

J. E. Hofmann.

Geymonat, Ludovico: Peano e le sorti della logica in Italia. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 14, 109—118 (1959).

Commentant une édition récente d'oeuvres choisies de Peano, l'A. maintient à raison, l'unité de l'oeuvre de Peano, ses qualités de pionnier dans le domaine de la logique formalisée, mais les limitations des résultats qu'il a atteints.

R. Feys.

Belousova (Byelousova), V. P. und I. G. Il'in (Ilyin): Boris Jakovlevič Bureev (zum hundertsten Geburtstage). Ukrain. mat. Žurn. 11, 312—314 (1959) [Russisch].

• Hermann, Armin: **Große Physiker. Vom Werden des neuen Weltbildes.** Stuttgart: Ernst Battenberg Verlag 1959. 180 S., davon 66 Tafeln. Ln. DM 19,80; Leder DM 34,—.

An Stelle eines Vorworts des Herausgebers wird auf der Umschlagklappe Max Born zitiert: „Die Welt, die so gern bereit ist, die Gaben der Physik zur Massenvernichtung zu benutzen, täte besser daran, die Denkmethode der Physik zu studieren, die zum Ausgleich von scheinbar unauflösbaren Widersprüchen und zur Versöhnung geführt haben“. — Das ausgezeichnete Buch tut denn auch viel, um zu diesem Studium anzuregen. Nach kurzen Kapiteltexten zu den folgenden Seiten findet man immer ein ganzseitiges Bild mit einer Textseite, die den Beitrag des Abgebildeten zur Entwicklung des physikalischen Weltbildes enthält. So gewürdigt werden Galilei, Newton, Laplace, Hamilton, Huygens, Fresnel, Fraunhofer, Kirchhoff, Faraday, Maxwell, H. Hertz, Helmholtz, Clausius, Boltzmann, Nernst, Lenard, J. J. Thomson, Wien, Millikan, Michelson, H. A. Lorentz, Zeeman, Röntgen, M. Curie, Planck, Einstein (als einziger drei Textseiten), E. Rutherford, Langevin, v. Laue, W. L. Bragg, P. Debye, Bohr, Sommerfeld, J. Franck, Siegbahn, Compton, Raman, O. Stern, de Broglie, Schrödinger, Davisson, Heisenberg, Born, Pauli, Dirac, Anderson, Soddy, Aston, Blackett, Čerenkov, Chadwick, Tamm, v. Weizsäcker, Yukawa, Hahn, Joliot, Fermi, Oppenheimer, Eddington, Bethe, Weyl, Jordan, Hess, Lawrence, Yang, Lee. Kurze biographische Notizen sollen etwas über den Lebensweg der einzelnen aussagen: Ref. empfand sie zunächst als sehr knapp; es ist aber wohl die Absicht des Verf., „den reinen Geist der Wissenschaft“ reden zu lassen, und in der Tat, der knappe, mit vielen unspezifizierten Zitaten verwobene Text, erzeugt eine mit Bewunderung für das Genie gepaarte Spannung, immer weiterblättern zu müssen. Für eine Neuauflage möchte der Ref. einige Wünsche anmerken: 1. Bei M. v. Laue ist vergessen worden, den Nobelpreis zu erwähnen. — 2. Bei W. Pauli und P. Jordan wünschte man sich einen anderen Begleittext: der Begriff der Feldtheorie wird im ganzen Buch nicht adäquat gewürdigt und ist doch ein integrierender Bestandteil der modernen Physik. Gerade Paulis und Jordans Verdienste erfordern eine Würdigung. — 3. Total vergessen wurde die Tieftemperatur- und Festkörper-Physik. Der erste Hersteller des flüssigen He, Kammerlingh-Onnes mußte ebenso wie J. Bardeen, dem wir viel auf beiden Gebieten verdanken, aufgenommen werden. — 4. Ref. fand auch den Text zum Bild Oppenheims nicht angemessen. Er tut ihm sogar grob unrecht. Die Bedeutung Oppenheims liegt doch nicht in der Leitung des Labors, das die A-Bombe herstellte! Viel eher muß man mit der A-Bombe die Namen von Fermi und Teller verbinden. — 5. Bei einer kritischen Durchsicht der Texte vermißt Ref. auch eine klare Trennung zwischen Einzelideen und den großen Lehrerpersönlichkeiten, die wie z. B. M. Born die Entwicklung der Physik in im Einzelnen wohl nicht mehr übersehbarer Weise beeinflussen.

W. Klose.

Mitropol'skij (Mitropolsky), Ju. A. (Y. A.) und S. V. Tjablikov (Tyablikov): Nikolaj Nikolaevič Bogoljubov (zum fünfzigsten Geburtstag). Ukrain. mat. Žurn. 11, 295—311 (1959) [Russisch].

Mit Schriftenverzeichnis.

Galafassi, V. E.: Luigi Brusotti. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 14, 287—294 (1959).

Mit Schriftenverzeichnis.

List of the papers of the late J. Egerváry. Mat. Lapok 10, 1—4 (1959) [Ungarisch].

Schriftenverzeichnis.

Verzeichnis der Arbeiten des mit dem Kossuth-Preis des Jahres 1959 ausgezeichneten Géza Freud. Mat. Lapok 10, 142—144 (1959) [Ungarisch].

Szénássy, Barna: The work of the late Z. Geöcze. *Mat. Lapok* 10, 26—37 (1959) [Ungarisch].

Mit Schriftenverzeichnis.

Waclaw Kozakiewicz. In memoriam. *Canadian math. Bull.* 2, 148—150 (1959).

Mit Schriftenverzeichnis.

Papapetrou, Achilles: Max von Laue 80 Jahre alt. *Forsch. Fortschr.* 33, 316—317 (1959).

Hajnal, András: The work of J. von Neumann in the axiomatic set-theory. *Mat. Lapok* 10, 5—11 (1959) [Ungarisch].

Parodi, Hippolyte: Notice nécrologique sur Balthasar Van der Pol, Correspondant pour les sections des Académiciens libres et des applications de la science l'industrie. *C. r. Acad. Sci., Paris* 249, 1420—1422 (1959).

Smith-Rose, R. L.: Dr. B. van der Pol. *Nature* 184, 1020—1021 (1959).

Behnke, Heinrich, Helmuth Gericke und Vandenhoeck & Ruprecht: Wilhelm Süß zum Gedächtnis. *Math.-phys. Semesterber.* 6, 1—3 (1958).

Andonie, George Șt.: Florin Vasilescu (1897—1958). *Gaz. Mat. Fiz., București* Ser. A 11 (64), 160—164, französ. und russ. Zusammenfassg. 165 (1959) [Rumänisch].

Mit Schriftenverzeichnis.

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

Geymonat, Ludovici: Logica matematica e algebra moderna. Conferenze Sem. *Mat. Univ. Bari* 37, 20 p. (1958).

A simple expository article explaining clearly the idea of Boolean algebra and the cylindric algebras of Tarski and Thompson. The author's account is based upon "La Structure Algébrique des Théories Mathématiques", by L. Henkin (Paris 1956).

T. Hailperin.

Beth, E. W.: On the completeness of the classical sentential logic. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 61, 434—437 (1958).

An original version of a completeness proof which uses the author's method of semantic tableaux. This method is expounded in an earlier paper [*Med. Nederl. Akad. Wet., Afd. Lett., n. R.* 18, Nr. 13, 309—342 (1955)] as well as in §§ 67—70 of his book "The Foundations of Mathematics" (this Zbl. 85, 241). The sentential calculus considered has the primitives negation and implication, and as rules of inference substitution and modus ponens; the axiom-schemes are not specified but it is required for the proof that the following nine formulas be derivable: $[(U \rightarrow V) \rightarrow X] \rightarrow \{(U \rightarrow X) \rightarrow [(V \rightarrow X) \rightarrow X]\}$, $Y \rightarrow Y$, $\bar{Y} \rightarrow Y$, $(Y \rightarrow U) \rightarrow Y$, $(U \rightarrow Y) \rightarrow Y$, $Z \rightarrow (Z \rightarrow U)$, $Z \rightarrow (U \rightarrow Z)$, $(Y \rightarrow U) \rightarrow [(U \rightarrow Z) \rightarrow (Y \rightarrow Z)]$, $(\bar{Y} \rightarrow \bar{Z}) \rightarrow (Z \rightarrow Y)$.

T. Hailperin.

Rasiowa, H. and R. Sikorski: On the isomorphism of Lindenbaum algebras with fields of sets. *Colloquium math.* 5, 143—158 (1958).

Considering a first order theory with axiom set \mathcal{A} added to the predicate calculus (\mathcal{A} not necessarily finite or denumerable) as an abstract algebra, one obtains its Lindenbaum algebra $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ by, so to speak, identifying elements α and β for which the equivalence $\alpha \leftrightarrow \beta$ is in the set of consequences of \mathcal{A} . As such an algebra is a Boolean algebra one is naturally led to the question of its representability by a field of sets. $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ is said to be represented by a field of sets if there is a Boolean isomorphism from $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ onto the field of sets which in addition sends elements corresponding to existential quantifications $\sum_x \alpha(x)$ into unions of sets corresponding to $\alpha\left(\frac{\tau}{x}\right)$, where τ is an arbitrary term of the theory and the union is extended over all terms τ of the theory. A number of filter-theoretic and model-theoretic conditions concerning

representability are obtained. From these theorems and from suitable examples it is seen that " $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ is representable by a field of sets whenever either the set of all variables or the set of individual constants not appearing in the axioms or the set of functors not appearing in the axioms is rich enough." For the first order predicate calculus without additional axioms the Lindenbaum algebra \mathcal{L} is representable by a field of sets. The paper concludes with an investigation of a certain field of sets due to Rieger (this Zbl. 44, 261) and its relationship to \mathcal{L} . *T. Hailperin.*

• Heyting, A. (edited by): **Constructivity in mathematics. Proceedings of the colloquium, held at Amsterdam, 1957.** (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) Amsterdam: North-Holland Publishing Company 1959. 298 p.

Die Arbeiten werden in diesem Zbl. einzeln angezeigt.

Rasiowa, H. and R. Sikorski: **Formalisierte intuitionistische elementare Theorien.** Constructivity in Mathematics, Proc. Colloq. Amsterdam 1957, 241—249 (1959).

Sikorski, Roman: **Der Heytingsche Prädikatenkalkül und metrische Räume.** Constructivity in Mathematics, Proc. Colloq. Amsterdam 1957, 250—253 (1959).

Ein topologischer Raum X als Menge seiner offenen Mengen wird zu einer Heytingschen Algebra durch die Festsetzungen $a \rightarrow b = \text{Int}((X - a) + b)$, $\neg a = \text{Int}(X - a)$, wo Int den offenen Kern bedeutet. Verff. referieren über ihre früheren Arbeiten [hauptsächlich Rasiowa, dies. Zbl. 44, 249; Verff., dies. Zbl. 53, 2; 56; 11; Fundamenta Math. 42, 83—100 (1955) und Sikorski, dies. Zbl. 83, 386]. *Hans Freudenthal.*

Takeuti, Gaisi: **On the fundamental conjecture of GLC. I, II.** J. math. Soc. Japan 7, 249—275, 394—408 (1955).

I. Für eine Formalisierung der unverzweigten Typentheorie (Generalized Logical Calculus), aufgebaut nach dem Muster von Gentzen's LK (dies. Zbl. 10, 145, 146), hatte Verf. (dies. Zbl. 53, 202) als Fundamental-Vermutung die Eliminierbarkeit der Schnitte, mit den Konsequenzen für die Widerspruchsfreiheit der Analysis, formuliert. Dieser Teil I beweist einen Grenzfall für die Logik zweiter Stufe (G^1LC), bei dem die formal unverzweigten $\forall P^i$ (\exists ist kein Grundbegriff) durch eine Beschränkung der Comprehensionsregeln (in der Form $\forall E$ im Antecedens) auf Obersequenzen $\mathcal{A}_x(\mathcal{B}(\frac{x}{x})), \Gamma \rightarrow \theta$ ohne $\forall P^i$ in $\mathcal{B}(\frac{x}{x})$, also effektiv auf die kleinste verzweigte Ordnung beschränkt sind (wozu noch eine Nebenbedingung kommt). Schüttes Beweis (dies. Zbl. 46, 6), der mit anderem Ansatz alle endlichen Ordnungen erfaßt, ist nicht erwähnt, da Verf. offenbar Erweiterungen in anderer Richtung anstrebt. — II. Für das Teilsystem von G^1LC , das durch Ausschließung der \forall -Regeln für Individuenvariablen (außer gebundener Umbenennung) entsteht, wird die Eliminierbarkeit der Schnitte bewiesen. Der Beweis ist übertragbar auf eine Erweiterung von Gentzens LK (dies. Zbl. 10, 145) durch die Quantifikation null-stelliger Prädikatenvariablen. — Methodisch neu ist ein (vorbereitender) Reduktionsschritt, der das bei der Zuordnung von Ordinalzahlen zu Beweisen störende verschiedenartige Im-Beweis-Vorkommen von Formeln $\mathcal{B}(\dot{1}_1, \dots, \dot{1}_n), \mathcal{B}(\dot{t}_1, \dots, \dot{t}_n)$ ausschaltet, die „zusammenhängen“ mit $\mathcal{A}_x(\mathcal{B}(\frac{x}{x}))$ bei der Anwendung von $(\forall EA)$ auf die Sequenz $\mathcal{A}_x(\mathcal{B}(\frac{x}{x})), \Gamma \rightarrow \theta$ („zusammen“ hängen die Formeln einer „Faser“, deren Definition vom „Bund“ dadurch abweicht, daß nicht die beiden Schnittformeln eines Schnittes, aber jeweils Eine Nebenformel mit der Hauptformel einer Figur (wenn vorhanden) zusammenhängen. *G. Hasenjaeger.*

Takeuti, Gaisi: **A meta-mathematical theorem on functions.** J. math. Soc. Japan 8, 65—78 (1956).

Ein Kalkül zweiter Stufe (Hierarchical Logical Calculus) kleinster verzweigter Ordnung (vgl. das Teilstück von G^1LC in vorstehend besprochener Arbeit, Teil I),

der im wesentlichen gerade die endliche Formalisierbarkeit der Formelschemata der ersten Stufe liefert, wird erweitert durch „Funktionale“ (der Typen $(\iota \dots \iota (o \iota \dots \iota) \dots (o \iota \dots \iota))$ im Sinne von Churchs Typentheorie). Unter der Unizitätsvoraussetzung für $\iota y \mathfrak{A} (P_1, \dots, P_n; x, y)$ (in der Form der Beweisbarkeit) wird die (relativ-) widerspruchsfreie Einführbarkeit des dem Ausdruck $\lambda P_1 \dots P_n x \iota y \mathfrak{A} (\dots)$ entsprechenden Funktionalis gezeigt. Anwendung auf die Einführung der Funktionale (1) $\text{Min}(A) = \mu x A x$ in die auf $0, \omega, =, <, '$ beschränkte Theorie der Ordinalzahlen, (2) $\text{sup}(A)$ in die auf $=, <, +, 0, 1, \lambda x (x : n) (n = 2, 3, \dots)$, beschränkte Theorie der reellen Zahlen (hierfür wird ein Eliminationsverfahren skizziert).

G. Hasenjaeger.

Takeuti, Gaisi: On Skolem's theorem. J. math. Soc. Japan 9, 71—76 (1957).

Für ein System \tilde{LK} , das aus G^1LC (vgl. Teil I der ersten der vorstehend referierten Arbeiten) durch die Beschränkung der (VEA) auf Obersequenzen $\mathfrak{A}_n (\mathfrak{B}^n_x)$, $\Gamma \rightarrow \theta$, wo in $\mathfrak{A}_n (P^n_x)$ keine gebundenen Prädikatenvariablen vorkommen (während \mathfrak{B} nicht beschränkt wird), wird unter Verwendung der vorstehend referierten Arbeiten des Verf. bewiesen (als ein finites Gegenstück zum Satz von Löwenheim-Skolem): Ein widerspruchsfreies System der Mengenlehre, formuliert in reinen Allformeln erster Stufe mit Funktionszeichen, das zur Ableitung der Gleichheitsaxiome und der definierenden Eigenschaften der im Beweis verwendeten arithmetischen Hilfsfunktionen ausreicht, bleibt widerspruchsfrei, wenn eine neue Funktion f durch Axiome eingeführt wird, welche die Abzählung des Individuenbereichs durch f ausdrücken (wenn „ $=$ “ als Identität interpretiert wird, obwohl hierfür nur die Kongruenzeigenschaften formuliert werden).

G. Hasenjaeger.

Maehara, Shôji: Equality axiom on Hilbert's ε -symbol. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I 7, 419—435 (1957).

Des Verf. Beweis für das „zweite ε -Theorem“ (dies. Zbl. 67, 250) in bezug auf Gentzens LK (dies. Zbl. 10, 145) wird auf einen ε -Kalkül (LEK) mit Auswahlgleichheit für umfangsgleiche Bedingungen ausgedehnt. Als Beweishilfsmittel wird ein Kalkül HLC eingeführt, der aus Takeutis HLC (vgl. vorletztes Referat) durch Beschränkung auf die Generalisierung einstelliger Prädikatenvariablen (symbolisch: $\forall^0 \xi$ für Klassenvariablen ξ) und Einführung von Klassentermen $\hat{x} \mathfrak{A}(x)$ (wobei die Einschränkungen für \mathfrak{A} für eine Elimination passend gewählt sind) und Einführung von ε als Funktor (mit $\varepsilon x \mathfrak{A}(x)$ für $\varepsilon(\hat{x} \mathfrak{A}(x))$ entsteht. Das Kernstück (Thm. 6): „Die LK -Sequenz $\Gamma \rightarrow \theta$ ist LK -beweisbar, wenn $\forall^0 \xi \forall x (x \in \xi \supset \varepsilon(\xi) \in \xi)$, $\forall^0 \xi \forall^0 \eta (\xi = \eta \supset \varepsilon(\xi) = \varepsilon(\eta))$, $\Gamma \rightarrow \theta$ HLC -beweisbar ist“ wird bewiesen durch Abbau der $(\forall^0 EA)$ und Trivialisierung der zusätzlichen Prämissen in den resultierenden $(\forall^0 EA)$ -freien Beweisen.

G. Hasenjaeger.

Bing, Kurt: On the axioms of order and succession. J. symbolic Logic 22, 141—144 (1957).

Mit dem Axiomensystem Hasenjaegers (dies. Zbl. 38, 151) läßt sich das Axiomensystem (B) von Hilbert-Bernays (HB) I (dies. Zbl. 71, 358) S. 273 gleichwertig vereinfachen zu einem AS (B_1) . $(B) \rightarrow (\text{Ind})$ und $(B_1) \rightarrow (\text{Ind})$ sind unabhängig von einander und schwächer als (A) von HB I, S. 263. Insbesondere sind $a \equiv a$ und $a' \equiv b' \rightarrow a \equiv b$ unabhängig von $(B) \rightarrow (\text{Ind})$. Die Unabhängigkeit besteht auch bezüglich der Logik der zweiten Stufe. [Ref.: Dies ist nicht überraschend, da außer (J_2) von HB I, S. 220 kein Axiom mit Prädikatenvariablen vorausgesetzt ist.]

G. Hasenjaeger.

Lorenzen, Paul: Über die Syllogismen als Relationenmultiplikationen. Arch. math. Logik Grundlagenforsch. 3, 112—116 (1957).

Eine sehr übersichtliche Darstellung der Syllogismen als Relationenmultiplikationen, bei der die Definitionen der Relationen (durch $a - PaQ$: alle P sind Q — und die Konversion \tilde{a} und Negation) und die notwendigen Postulate über die zugrundegelegte Familie von Begriffen knapp und klar herausgestellt werden. Besonders einfach erhält man die Multiplikationstafel, wenn man die Kontravalenz einführt: PjQ , wenn P die Negation von Q ist. Dann lassen sich alle Relationen als Produkte von a und j darstellen, und die Multiplikationstafel folgt allein aus $aa = a$ (barbara) und $jj = 1$ ($1 = \text{Äquivalenz}$).
H. Gericke.

Lorenzen, Paul: Über die Begriffe „Beweis“ und „Definition“. Constructivity in Mathematics, Proc. Colloq. Amsterdam 1957, 169—177 (1959).

Eine grundsätzlich bedeutsame Auseinandersetzung mit dem Aristotelischen logischen Standpunkt, daß ein Beweis stets auf unbeweisbare Sätze (Axiome) und eine Definition stets auf undefinierte Begriffe zurückgehen müsse. Demgegenüber zeigt die induktive (oder rekursive) Definition z. B. von Relationen, daß man hier nicht auf andere Begriffe zurückzugehen braucht. Benutzt man Konstruktionsregeln, d. h. einen Kalkül, zur Herstellung von „Aussagen“, so ist für die Zulässigkeit von Regeln, auch für die Allgemeinzulässigkeit von Regeln in einem beliebigen Kalkül nur die Möglichkeit der Widerlegung definiert. Als Beweis für die Zulässigkeit hat man sich davon zu überzeugen, daß die Behauptung der Zulässigkeit nicht widerlegt werden kann. Das geschieht durch Angabe eines Eliminationsverfahrens. Der Beweis besteht also in der Einsicht in ein solches Verfahren, nicht in einer Abfolge von Sätzen nach dem Schema einer Deduktion; deshalb braucht er nicht auf Axiome zurückzugreifen. — Eine dialogische Interpretation der Regeln der Logik wird angedeutet.
H. Gericke.

Lorenzen, P.: Logical reflection and formalism. J. symbolic Logic 23, 241—249 (1959).

Es geht dem Verf. immer wieder um die Klärung der Situation, die durch das Wort Grundlagenkrise gekennzeichnet ist. Wenn der Formalismus aus der Not eine Tugend macht und erklärt, daß „das zwanzigste Jahrhundert in der Lage sein sollte, den Tatsachen ins Auge zu sehen, insbesondere der Tatsache der Unsicherheit unseres Wissens“, so zeigt Verf., wie man diese Resignation überwinden kann. Gerade die formalen Systeme der Mengenlehre, deren Konsistenz problematisch ist, sind Produkte unserer Phantasie; die Tatsachen, denen wir ins Auge zu sehen haben, sind ganz andere. Die Arithmetik (und ähnlich auch die Logik) beginnt mit Regeln zur Konstruktion gewisser Figuren; arithmetische (und entsprechend logische) Sätze sind Sätze über diese Regeln und haben daher ihre Grundlage nicht in unbeweisbaren Axiomen, sondern eben in den Konstruktionsregeln. Der Übergang von der Arithmetik zur Analysis besteht im Übergang von Zahlen zu Funktionen und Relationen. Wie man aber bei praktischen Rechnungen jeweils nur endlich viele Zahlen braucht, während die Konstruktionsregeln unendlich viele Zahlen herzustellen gestatten, so gewinnt man auch Regeln für die Konstruktion unendlich vieler Funktionen und Relationen, die im wesentlichen durch rekursive Definitionen erfaßt werden, wobei in den Rekursionsformeln logische Partikeln auftreten dürfen. Verf. zeigt, daß mit solchen Mitteln u. a. die Definition der Wohlordnung und ein Teil des Cantor-Bendixsonschen Satzes erfaßt wird, nämlich daß jede abgeschlossene Menge reeller Zahlen eine maximale in sich dichte Untermenge enthält, ja daß durch diese Interpretation die klassischen Aussagen einen präziseren Sinn erhalten.
H. Gericke.

Hermes, Hans: Zum Inversionsprinzip der operativen Logik. Constructivity in Mathematics, Proc. Colloq. Amsterdam 1957, 62—68 (1959).

Die Arbeit behandelt die Bedingungen für die Variablen, die im Inversionsprinzip der operativen Logik auftreten. Durch ein Beispiel und Hinweise auf die Anwendungen des Prinzips wird gezeigt, „daß die von Lorenzen [Einführung in

die operative Logik und Mathematik (dies. Zbl. 66, 248) p. 30] gegebene Formulierung nicht aufrechterhalten werden kann. Anschließend wird eine neue Formulierung vorgeschlagen und begründet und ihre Anwendung auf die Konjunktion besprochen“.

H. Gericke.

Wette, Eduard: Von operativen Modellen der axiomatischen Mengenlehre. *Constructivity in Mathematics*, Proc. Colloq. Amsterdam 1957, 266—277 (1959).

Verf. schreibt: „Ich skizziere einen Weg, auf dem nach meinem Ermessen bewiesen werden kann, daß die generelle Kontinuumhypothese und das Auswahlaxiom formal unentscheidbar sind in einer Kodifikation der Zermeloschen Mengenlehre mit bzw. ohne Auswahlaxiom“. Der hier wiedergegebene Vortrag ist also selbst ein Referat über eine weit umfangreichere Arbeit, die (wie S. 276 gesagt wird) z. T. erst in Entwürfen vorliegt. Grundlage ist „Lorenzens operative Einstellung zum Prozeß mathematischen Definierens und Beweisens“, jedoch wird an Stelle der „elementaren Sprache“ von Lorenzen eine „normale Sprache über Grundzahlen“ konstruiert, „in der formale Aussage-, Definitions- und Beweismittel simultan so miteinander verknüpft sind, daß die abgegrenzten Sprachmittel abgeschlossen sind gegenüber der Gruppe derjenigen logischen und definitorischen Operationen, welche ... mit Mitteilungsvariablen für Relationen formulierbar und nicht ... auf freie und gebundene Relationsvariable angewiesen sind“. Iteration dieser Sprachkonstruktion liefert eine operative Theorie, in deren Rahmen ein Modell der axiomatischen Mengenlehre gewonnen werden kann.

H. Gericke.

Białynicki-Birula, A.: Remarks on quasi-Boolean algebras. *Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III* 5, 615—619 (1957).

In this paper the author continues his work and that of H. Rasiowa on quasi-Boolean algebras started in an earlier paper (this Zbl. 82, 14). Let $\mathfrak{A}_0 = \langle \{0, 1, a, b\}, +, \cdot, \sim \rangle$ be a quasi-Boolean algebra, where $a + b = 1$, $\sim 2 = 1$, $\sim 1 = 0$, $\sim a = a$, $\sim b = b$. It is proved that every quasi-Boolean algebra is isomorphic to a subalgebra of a product of replicas of \mathfrak{A}_0 and that \mathfrak{A}_0 is a functionally free quasi-Boolean algebra. An ideal p is called an \sim ideal if $a \in p$, $\sim a c \in p$ imply $c \in p$. A quasi-Boolean algebra \mathfrak{A} is called simple if it does not have a proper \sim ideal. It follows that every simple quasi-Boolean algebra is isomorphic to a subalgebra of \mathfrak{A}_0 . Several other results are obtained. We mention the following. Let h_1 and h_2 be any two homomorphisms of a quasi-Boolean algebra \mathfrak{A} . If h_1 and h_2 have the same kernel and if this kernel is a maximal \sim ideal then $h_1(\mathfrak{A})$ and $h_2(\mathfrak{A})$ are isomorphic.

Ph. Dvinger.

Hirschhorn, Edwin: Simplification of a class of Boolean functions. *J. Assoc. comput. Machin.* 5, 67—75 (1958).

The author describes a method to resolve the following problem: Let G be a set of n Boolean functions F_i of N Boolean variables Q_k . Each F_i is required to include certain minimal polynomials M_{ij} , $j = 1, 2, \dots, \eta_i$, and to exclude certain other minimal polynomials, M_{ij} , $j = \eta_i + 1, \eta_i + 2, \dots, \xi_i$ (A minimal polynomial in Boolean variables Q_k ($k = 1, 2, \dots, N$) is defined to be $Q_1^* Q_2^* \dots Q_N^*$ where the asterisk denotes either the presence or absence of a prime — negation —). In general, there are some M_{ij} which are arbitrary with respect to inclusion by F_i or exclusion from F_i (i. e. M_{ij} , $j = \xi_{i+1}, \xi_{i+2}, \dots, \mu$). For example M_{ij} correspond to the instructions of a digital computer. Some instructions are included, some are excluded and some are arbitrary with respect to inclusion by F_i or exclusion from F_i . The problem is: how does one design minimal polynomials to the instructions so that F_i ($i = 1, 2, \dots, n$) shall have as few letter-symbol, in their representations, as possible? A mechanical method is given. The method is directly applicable to the problem of selecting the code for the instructions of a digital computer so as to simplify gating in the computer.

M. Nedelcu.

Rogers jr., Hartley: Computing degrees of unsolvability. *Math. Ann.* 138, 123—140 (1959).

The first part of this paper is a concise and very readable exposition of the notions of degree of unsolvability with respect to Turing and one-one reducibility and their relation to the predicate hierarchy. The problems dealt with in the second part of the paper are the location of the recursive isomorphism types of the sets $A_1 = \{x | W_x \text{ is recursive}\}$, $A_2 = \{x | W_x \text{ is simple}\}$, $A_3 = \{x | W_x \text{ is hypersimple}\}$, $A_4 = \{x | W_x \text{ is creative}\}$, $A_5 = \{x | W_x \text{ is complete}\}$. Here W_x is the range of Φ_x , the partial recursive function whose defining equations have Gödel number x . The results obtained are that A_1, A_4 are recursively isomorphic to (i. e. there exists a recursive permutation mapping each of them onto) $S^{(3)}$, A_2, A_3 are recursively isomorphic to $S^{(3)}$, $S^{(3)} \leq_1 A_5 \leq_1 S^{(4)}$. Here \leq_1 means "is one-one reducible to" and $S^{(n)}$ is defined inductively thus: $S^{(0)} = \text{null set}$, $S^{(n+1)} = (S^{(n)})'$, where $'$ is the jump operation defined by $A' = \{x | x \in W_x^A\}$ and W_x^A is the range of Φ_x^A where this denotes the x -th function partial recursive in according to the usual uniform indexing of these. As a corollary is obtained the result that $\{x | \overline{W}_x \text{ is finite}\}$ is recursively isomorphic to $\overline{S^{(3)}}$. The method of proof is to get an upper bound on degree of unsolvability using the predicate hierarchy and the Tarski-Kuratowski algorithm and to obtain lower bounds by obtaining certain rather easily and naturally defined sets isomorphic to $S^{(n)}$ (or $\overline{S^{(n)}}$) and to show that one of these is \leq_1 the set being bounded. One of the main tools is a modification of Friedberg's procedure for the construction of two recursively enumerable sets of different degrees of unsolvability. This is described in a very intuitive and easily understandable way. He finally discusses various open questions such as the classification of the set $A_6 = \{x | \text{for only finitely many } y \in W_x, W_y \text{ is infinite}\}$ and the exact location of A_5 ; he conjectures that A_5, A_6 are recursively isomorphic to $S^{(4)}$. In a note added in proof he points out that for A_6 this follows from a result since proved by Kreisel, Shoenfield and Wang. J. C. Shepherdson.

Rose, Alan: Nouvelle méthode pour déterminer les formules qui correspondent à des éléments universels de décision. *C. r. Acad. Sci.*, Paris 249, 870—872 (1959).

The author and others have recently shown [Novikov and Adjan, this *Zbl.* 80, 241; Pugmire and the author, *Z. math. Logik Grundl. Math.* 4, 66—86 (1958)] how to construct a logical calculator (i. e. a small special purpose digital computer) for enumerating all formulae with four variables which correspond to universal decision elements. He gives here a description and circuit diagram of a simplified form of this computer which now contains only 33 circuit elements (instead of the previous 935). The new method can, he says, easily be extended to deal with formulae having more than four variables. J. C. Shepherdson.

Algebra und Zahlentheorie.

● Dickson, Leonard E.: Algebraic theories. (Formerly titled: Modern algebraic theories.) Unabridged and unaltered republ. of the first ed. New York: Dover Publications, Inc. 1959. IX, 176 p. \$ 1,50.

Vgl. die Besprechung der 1. Aufl. in *J.-Buch Fortschr. Math.* 52 (1926), 94.

● Carmichael, Robert D.: The theory of numbers and Diophantine analysis. Both books bound as one. Unabridged and unaltered republ. of the latest ed. New York: Dover Publications, Inc. 1959. 94; VI, 118 p. \$ 1,35.

Vgl. die Besprechung beider Bücher im *J.-Buch Fortschr. Math.* 45 (1914—15),

Allgemeines. Kombinatorik:

Hall jr., Marshall: A survey of combinatorial analysis. Surveys appl. Math. 4, 35—104 (1958).

Le but de ce tour d'horizon n'est pas d'initier le lecteur à l'analyse combinatoire, mais de lui faire mesurer le chemin parcouru depuis les grands ouvrages de McMahon et de Netto. De rapides progrès ont été possibles grâce à la mise au point de méthodes efficaces et à la collaboration du calcul manuel avec le travail des grandes calculatrices électroniques. Néanmoins certains criblages portent sur des populations d'une telle magnitude que les machines même sont encore trop lentes pour en venir à bout (voir E. T. Parker ce Zbl. 86, 22). On sait que les méthodes de McMahon donnent rarement la solution pratique des problèmes car elles reviennent souvent à formuler les mêmes problèmes en termes différents et à donner un procédé plus impraticable qu'une énumération directe (Saxena, ce Zbl. 44, 4). Un bref résumé historique est suivi de trois chapitres groupant le matériel autour de trois rubriques principales: i. Méthodes d'énumération, ii. Représentants des sous-ensembles et théorème de Ramsey, iii. existence et construction des „designs“. Chap. I. Les questions élémentaires (fonctions génératrices, rectangles latins de trois lignes) sont rapidement exposés et suivis d'une revue des résultats les plus importants sur les partitions. Chap. II. Les travaux de l'A. de P. Hall, d'Hoffman-Kuhn et de Mann-Ryser sur les systèmes de représentants sont suivis d'un exposé du théorème de Ramsey sur les sous-ensembles et de multiples applications à la géométrie, aux ensembles, groupes, matrices, dualité. Problème du commis voyageur. Le chap. III est consacré aux configurations tactiques. Carrés latins, carrés orthogonaux, systèmes de Steiner (l'assimilation d'un tel système à un quasigroupe idempotent coïncidant avec lui-même par toutes les parastrophies n'est pas signalée). Construction des block designs symétriques, relation avec les géométries projectives, differences set, travaux de l'A. de Ryser, Mann, Bose, Shrikhande. Tous les sujets sont traités d'un point de vue élevé. Chaque chapitre est suivi d'une bibliographie sommaire, sévèrement sélectionnée et ne comprenant que les travaux significatifs.

A. Sade.

Hyltén-Cavallius, C.: On a combinatorial problem. Colloquium math. 6, dédié à C. Kuratowski, 59—65 (1958).

The problem in question is a problem of K. Zarankiewicz. By a modification of the method used by Kővári-Sós-Turán (cf. this Zbl. 55, 7) there are proved new estimations for some special values of arguments, first of all in the generalized case of this problem as studied by the reviewer (cf. this Zbl. 71, 12).

K. Čulík.

Porges, Arthur: An analytical expression for X. Amer. math. Monthly 66, 706—707 (1959).

Gould, H. W.: Note on a paper of Sparre Andersen. Math. Scandinav. 6, 226—230 (1958).

Il s'agit des expressions de deux sommes relatives aux coefficients du binôme données autrefois par Sparre Andersen (ce Zbl. 53, 7). L'A. donne une voie naturelle pour conduire à ces expressions en établissant une relation un peu plus générale.

S. Bays.

Gould, H. W.: Dixon's series expressed as a convolution. Nordisk mat. Tidskrift 7, 73—76 (1959).

Mittels zweier Darstellungen der Legendre-Polynome wird die alternierende Reihe $S = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^3 = (-1)^n (3n)! (n!)^{-3}$ von Dixon u. a. in die nichtalter-

nierenden Gestalten

$$S = (-4)^{-n} (6n)! ((2n)!)^{-3} \sum_{k=0}^n \binom{2n}{k} \binom{2n}{n-k} \binom{6n}{4n-2k}^{-1}$$

$$= (-4)^{-n} \binom{2n}{n}^{-1} \sum_{k=0}^n A_k A_{n-k} \quad \text{mit} \quad A_k = \binom{n+k}{n} \binom{2n+2k}{n+k}$$

gebracht.

I. Paasche.

Lineare Algebra. Polynome. Formen. Invariantentheorie:

Cardoso, Jayme Machado: Bemerkung über endliche Vektorräume. Anuário Soc. Paranaense Mat., II. Ser. 1, 1—3 (1958) [Portugiesisch].

Gaiu, Em.: Sur un determinant. Gaz. Mat. Fiz., București, Ser. A 11 (64), 92—95, französ. und russ. Zusammenfassg. 95 (1959) [Rumänisch].

● Hohn, Franz E.: Elementary matrix algebra. New York: Macmillan Company 1958. XI, 305 p. \$ 7,50.

The aim of this excellent book is the presentation of the most essential material on matrix algebra and determinant theory "as simply as possible and in a logical order with the objective of preparing the reader to study intelligently the applications of matrices in his special field". It is designed as a textbook for juniors, seniors, and graduate students in mathematics and engineering, as well as other physical and social sciences. It is also well adapted as a reference and review volume in matrix theory, since the topics are separated into distinct, self-contained chapters, and the text is filled with illustrative examples that make it very easy to understand. All topics are developed from their beginnings, and the reader is led in gradual steps from the familiar and the concrete to the theoretical aspects of the subjects discussed. Not only is it the purpose of this text to present useful methods in the manipulation of matrices, but also to aid the student "to progress significantly in mathematical maturity as a result of careful study of this book" and to prepare him for later work in abstract algebra. There are a very great number of exercises throughout the book that "range from purely formal computation and extremely simple proofs to a few fairly difficult problems designed to challenge the reader". The author states that detailed treatment of applications has been omitted in order to keep down the size of the volume.

The book is divided into nine chapters. Chapter I, introduction to matrix algebra, deals with the fundamental operations and the transpose, and symmetric, skew-symmetric, Hermitian, scalar and inverse matrices. Chapter II, determinants, covers quite completely the foundations, the Laplace expansion, and the adjoint matrix. Chapter III, the inverse of a matrix, contains definition and properties of the inverse, inversion by synthetic elimination, linear computations, and the partitioning of matrices. Chapter IV, rank and equivalence, deals with fundamental definitions, elementary transformations in matrix form, the rank of the product of two matrices, matrices and the concept of a field. Chapter V, linear equations and linear dependence, discusses the fundamental theorem for linear equations, the linear dependence of vectors and basic theorems thereon, the linear dependence of other mathematical objects, complete systems of solutions of linear equations, and a further discussion of the rank of a matrix. Chapter VI, vector spaces and linear transformations, deals with definitions of vector spaces, basis and dimension, the basic properties of linear transformations, transformations of coordinates in vector spaces, Sylvester's law of nullity, and a more general definition of a vector space. Chapter VII, unitary and orthogonal transformations, is concerned with length and orthogonality of vectors, the Cauchy-Schwarz inequality, unitary and orthogonal matrices and transformations, and orthogonality and linear vector spaces. Chapter

VIII, the characteristic equation of a matrix, deals with characteristic roots and vectors and the characteristic value problem, polynomial functions of a matrix, the Cayley-Hamilton theorem, and Hermitian and real symmetric matrices. Chapter IX, bilinear, quadratic, and Hermitian forms, is concerned with the equivalence of bilinear forms, equivalence of quadratic forms, the Kronecker and Lagrange reductions, Sylvester's law of inertia, definite quadratic forms and definite matrices, and Hermitian forms. In the appendices, a review is given of the notations Σ and Π , the algebra of complex numbers, and the general concept of isomorphism. In the bibliography, 156 books on vector spaces, matrices, determinants, and their applications are listed in categories ranging from abstract algebra to applications to electrical engineering and other fields. It is a selected list that provides references to major areas of applications.

E. Frank.

● **Mitrinović, D. S. und D. Mihailović: Lineare Algebra. Analytische Geometrie. Polynome.** [Linearna algebra. Analitička geometrija. Polinomi]. Beograd: Naučna Knjiga 1959. XVI, 414 S. [Serbo-kroatisch].

This book is adopted to the program of Mathematics for first year students at the Electrotechnical Faculty in Beograd, but it will be very useful for students of similar faculties and high schools. Content: Introduction, Linear algebra (matrices, determinants, linear equations), Analytical geometry (vector calculus in space. . . surfaces of the second order), Rational functions (complex numbers, polynomials, Horner's process, numerical methods of solutions of equations, Hurwitz's polynomials), Inequalities (about 200 inequalities are listed) and Appendix. The book is written clearly and we would say in a modern fashion. Numerical methods are specially stressed in the third part of the book. Analytical geometry is written by the second named author while the rest is written by the first named author.

S. Kurepa.

● **Heading, J.: Matrix theory for physicists.** London: Longmans, Green & Co., Ltd. 1958. XI, 242 p. 35 s. net.

This book aims to describe in elementary manner the matrix methods that have proved of considerable value in the physical investigation. The author takes pains to keep the mathematical equipment required within that possessed by the usual undergraduate students in physics and mathematics. The author also puts emphasis on the treatment of matrix theory as a powerful tool than a manipulation of abstract algebra. Furthermore, it is stated that the matrix methods are more tractable in many respects rather than the vector methods. The fundamental knowledge concerning determinants, vectors, partial differentiation and electromagnetics are assumed as needed throughout the monograph. In the first two chapters the basic mathematical theory of matrix is elucidated. The first chapter opens with an account of various types of matrix and treats the fundamental operations concerning matrices. The second chapter contains a detailed discussion of the subject of characteristic roots and vectors which play an important role in applied mathematics. Among the topics considered are the diagonalization of one or two matrices, positive definite quadratic forms, and Hermitian matrix, apart from the more abstract spectral theory of operators associated with matrix. Then follow the five chapters giving the systematic development of the theory based on the matrix operations and dealing with some specific problems in the following fields: three-dimensional geometry, mechanics, electromagnetic theory, the special theory of relativity and quantum mechanics. The reader may feel this book to be convenient, because of each almost independent illustration of the five chapters. Hence this book will be found appropriate for the student at the undergraduate level in physics and mathematics who wishes to learn more about the application of the matrix theory in various branches of theoretical physics.

S. Ueno.

● **Souriau, Jean-Marie:** *Méthodes mathématiques de la physique. Calcul linéaire.* („Euclide“. Mathématiques et astronomie.) Paris: Presses Universitaires de France 1959. 263 p. 22,00 NF.

Dieses Lehrbuch der linearen Algebra weicht an vielen Stellen in bemerkenswerter Weise von den üblichen Darstellungen ab. Das Hauptgewicht wird auf die linearen Operatoren gelegt, denen auch andere Begriffe wie z. B. der der Basis untergeordnet werden. Diese Behandlungsweise ermöglicht eine besonders einheitliche und komprimierte Darstellung. Sie setzt bereits bei der axiomatischen Definition des Vektorraumes ein, der gleichzeitig mit seinem Dualraum eingeführt wird. Die Matrizen- und Tensoralgebra wird einem gemeinsamen Kalkül untergeordnet. An die Stelle der äußeren Algebra tritt eine direkte Behandlung der alternierenden multilinearen Operatoren. Eine völlig neue Methode stellt die spektrale Zerlegung der Matrizen dar. Sie ist für viele Anwendungen besonders geeignet und vermeidet das Normalformenproblem. — Inhalt. I. Allgemeine Algebra: Mengen, Operatoren, Multiplikation von Operatoren, Invertierung, Permutationen und Gruppen. II. Lineare Algebra: Vektorräume, Abbildungsräume, direktes Produkt, Unterräume, lineare Operatoren. III. Matrizenkalkül: Allgemeiner Matrizenbegriff, Matrizen von Zahlen. IV. Räume n -ter Dimension: Endlichdimensionale Räume, Basis, Spur, Dimension, Rang, lineare Gleichungssysteme. V. Multilineare Algebra: Multilineare Operatoren, Tensorkalkül. Kalkül der alternierenden Operatoren, Determinanten. VI. Spektraleigenschaften: Vektorpolynome, spektrale Zerlegung, komplexe Erweiterung.
H.-J. Kowalsky.

Groh, Helmut: *Zur Theorie der Ideale in der äußeren Algebra.* Ann. Univ. Saraviensis 5, 128—136 (1957).

Es sei E der n -dimensionale Vektorraum über einem Körper. Für das zweiseitige Ideal J der äußeren Algebra E^\wedge von E bedeute F die Menge aller x aus dem Dualraum von E mit $xJ \subseteq J + J^*$. (Der zu Φ konjugierte Vektor Φ^* der äußeren Algebra ist durch $\Phi^* = \Phi_0 - \Phi_1 + \dots + (-1)^n \Phi_n$ definiert.) Dann heißt der zu F orthogonale Unterraum ε von E der zwei-assozierte Unterraum von J . Entsprechend werden die links- bzw. rechts-assozierten Unterräume von Links- bzw. Rechtsidealen definiert. Faßt man die äußere Algebra E^\wedge von ε als Unteralgebra von E^\wedge auf, so gilt $J = [J \cap E^\wedge]$, und ε ist der kleinste Unterraum von E mit dieser Eigenschaft. Entsprechendes gilt für die Links- und Rechtsideale und ihre assoziierten Unterräume. Es seien nun J und J' zwei zweiseitige Ideale, und $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_s$ und ε_d seien die zwei-assozierten Unterräume von $J, J', J + J'$ und $J \cap J'$. Verf. zeigt: Aus $\varepsilon \cap \varepsilon' = 0$ folgt $\varepsilon_s = \varepsilon + \varepsilon', \varepsilon_d = \varepsilon + \varepsilon'$ und $J \cap J' = (J \cap J')^*$.
H.-J. Kowalsky.

Ajzenštat, V. S.: *Über Bedingungen dafür, daß der Zentralisator einer Menge von Matrizen aus Skalaren besteht.* Doklady Akad. Nauk BSSR 3, 83—86 (1959) [Russisch].

In der (n, n) -Matrix $E_{i,j}$ stehe an der Stelle (i, j) eine 1 und sonst lauter Nullen. Verf. untersucht, wann mit der Menge $E_{i_1, j_1}, E_{i_2, j_2}, \dots, E_{i_m, j_m}$ nur Skalarmatrizen elementweise vertauschbar sind. Das ist genau dann der Fall, wenn die Matrix $\begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_m \\ j_1, j_2, \dots, j_m \end{pmatrix}$ folgende Eigenschaften hat: 1. In mindestens einer Zeile kommt jede der Zahlen 1, 2, \dots, n mindestens einmal vor. 2. Greift man beliebige k ($= 1, 2, \dots, m-1$) Spalten heraus, so haben diese mit den übrigen $m-k$ Spalten mindestens eine Zahl gemeinsam.
R. Kochendörffer.

Fan, Ky and A. S. Householder: *A note concerning positive matrices and M -matrices.* Monatsh. Math. 63, 265—270 (1959).

Es seien A und B reelle quadratische Matrizen der Ordnung n . Die Elemente von A seien sämtlich positiv. Dagegen enthalte B außerhalb der Hauptdiagonalen keine positiven Elemente, B sei nicht-singulär und alle Elemente von B^{-1} seien

nicht-negativ. Schließlich bedeute A_k bzw. B_k diejenige Matrix, die entsteht, wenn man in A bzw. B die Elemente der k -ten Zeile und der k -ten Spalte durch Nullen ersetzt. Es gibt dann eindeutig bestimmte positive Zahlen λ, λ_k und bis auf positive Vielfache ebenfalls eindeutig bestimmte Vektoren $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ ($k = 1, \dots, n$) mit folgenden Eigenschaften: $x_i > 0$, $x_i^{(k)} > 0$ für $i \neq k$, $x_k^{(k)} = 0$, $Ax = \lambda Bx$ und $A_k x^{(k)} = \lambda_k B_k x^{(k)}$ ($k = 1, \dots, n$). Verff. beweisen folgende drei Behauptungen: (a) $\lambda > \lambda_k$ für $k = 1, \dots, n$. (b) Es gibt positive Zahlen c_1, \dots, c_n mit $x = \sum c_k x^{(k)}$. (c) Bei festem k ist die Ungleichung $\lambda > \rho > \lambda_k$ gleichwertig damit, daß die Matrix $A - \rho B$ nicht-singulär ist und $(A - \rho B)^{-1}$ in der k -ten Spalte (und in der k -ten Zeile) nur positive Elemente besitzt. — Die Problemstellung und die Beweise knüpfen an eine frühere Arbeit des Verff. (dies. Zbl. 81, 251) an. Für die zweite Behauptung werden zwei Beweise (ein algebraischer und ein topologischer) angegeben.

H.-J. Kowalsky.

Haynsworth, Emilie V.: Note on bounds for certain determinants. Duke math.

J. 24, 313—319 (1957).

Es sei $A = (a_{ij})_1^n$, $a_{ij} \geq 0$; $a_i = \min_j a_{ij}$, $a_i^* = \max_j a_{ij}$, $k \geq 2$, $c_i = a_i - a_i^*/k \geq 0$, $a_{ii} \geq (n+1)(k-1)a_i^*/k$. $r = [(2k-1)n-1][(k-1)n-1]^{n-1}/k^{2n}$. Dann ist $\det A$ nicht negativ. Wenn $a_{ii} \geq (n+1)(k-1)a_i^*/k^2$ statt letzterer Ungl. gilt, dann ist $\det A \geq r a_1^* \cdots a_n^*$. Unter den früheren Bedingungen gilt nur die schwächere Grenze $\det A \geq r c_1 \cdots c_n$.

J. L. Brenner.

Ostrowski, A. M.: On the bounds of a one-parametric family of matrices. J. reine angew. Math. 200, 190—199 (1958).

E_n sei die Einheitsmatrix, $A_n = (a_{ij}^{(n)}) = \sigma E_n + U_n$ die $n \times n$ „Jordansche Elementarmatrix“ mit $a_{ii}^{(n)} = \sigma$, $a_{i,i+1}^{(n)} = 1$, $a_{ij}^{(n)} = 0$ sonst. Verff. untersucht die größte $[(\lambda(A_n))^2]$ und die kleinste Wurzel $[(\lambda(A_n))^2]$ von $A_n A_n^*$. λ und λ lassen sich angeben als $\max \|A \xi\|$ bzw. $\min \|A \xi\|$ mit der Nebenbedingung $\|\xi\| = 1$. Es gilt 1. $\lambda_n(\sigma) = \lambda_n(-\sigma)$, $\lambda_n(\sigma) = \lambda_n(-\sigma)$. 2. $|\sigma| + 1 \geq \lambda_n(\sigma) \geq \max(|\sigma| - 1, 1 - |\sigma|)$. 3. $\sigma + 1 \geq \lambda_n(\sigma) > \sigma - 1$, ($\sigma > 1$). 4. $\sigma^n \frac{1-\sigma}{1-2\sigma+\sigma^n} \geq \lambda_n(\sigma) \geq \sigma^n \frac{1-\sigma}{1-\sigma^n}$ [mit $\lambda_n(\sigma) = \lambda(A_n)$, $\lambda_n(\sigma) = \lambda(A_n)$]. Verff. gibt auch asymptotische Beziehungen an.

J. L. Brenner.

Lax, P. D.: Differential equations, difference equations and matrix theory. Commun. pure appl. Math. 11, 175—194 (1958).

Verff. betrachtet Mengen reeller Matrizen, für die alle Linearkombinationen mit reellen Koeffizienten nur reelle Eigenwerte haben. Matrizen dieser Art treten als Koeffizienten vektoriell geschriebener hyperbolischer partieller Differentialgleichungssysteme erster Ordnung auf. Diese Tatsache sowie Zusammenhänge mit sachgemäßen (properly posed) Problemen werden diskutiert. Unter anderem beweist Verff. als Erweiterung bekannter Sätze, daß über dem linearen Raum, den die oben charakterisierten Matrizen aufspannen, der größte Eigenwert eine konvexe, der kleinste eine konkave Matrixfunktion ist. Bezüglich der durch den konvexen Konus von Matrizen mit positiven Eigenwerten induzierten Teilordnung sind alle Eigenwerte monotone Matrixfunktionen. Eines der Matrixtheoreme dient dann zur Übertragung des Friedrichsschen Stabilitätstheorems für Differenzengleichungen mit positiven Koeffizienten vom symmetrischen auf den unsymmetrischen Fall. Einige Anwendungen dieses Theorems beschließen die Arbeit.

G. Bertram.

Weinberger, H. F.: Remarks on the preceding paper of Lax. Commun. pure appl. Math. 11, 195—196 (1958).

Die von P. Lax (vgl. vorstehendes Referat) unter Bezugnahme auf hyperbolische Differentialgleichungssysteme bewiesenen Matrixtheoreme werden vom Verff. im Rahmen der Matrixtheorie rein algebraisch bewiesen.

G. Bertram.

Passaquindici, Maria: Sulla stabilità dei polinomi e delle matrici. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 13, 77—88 (1959).

Let two square matrices be given. The author gives sufficient conditions for their sum to be positive definite, and sufficient conditions that it have latent roots with zero or negative real parts only. In the next section she considers sufficient conditions under which a "stable" or "Hurwitz-polynomial" (i. e. one whose every root has negative real part) remains such after changing the coefficients, and this is extended to the case of matrices with characteristic equations of Hurwitz type.

S. Vajda.

Davis, Chandler: All convex invariant functions of hermitian matrices. Arch. der Math. 8, 276—278 (1957).

Verf. nennt eine Funktion, definiert in einem reellen linearen Raum \mathfrak{S}_n von hermiteschen $n \times n$ -Matrizen in einem halbgeordneten Vektor-Raum \mathfrak{B} unitär-invariant, wenn $f(U^{-1} A U) = f A$ für jedes $A \in \mathfrak{S}_n$ und für jede unitäre Matrix U . Er betrachtet die Konvexität von unitär-invarianten Funktionen. (f heißt konvex, wenn $f(t A + (1-t) B) \leq t f(A) + (1-t) f(B)$, für jedes $t \in [0, 1]$). Da der Wert $f(A)$ einer unitär-invarianten Funktion f durch die Eigenwerte von A bestimmt ist, entspricht er einer symmetrischen Funktion eines reellen n -Vektorraumes. Verf. beweist den Satz: eine unitär-invariante Funktion ist dann und nur dann konvex, wenn die entsprechende Funktion konvex ist.

K. Shoda.

Marcus, Marvin and B. N. Moyls: Linear transformations on algebras of matrices. Canadian J. Math. 11, 61—66 (1959).

Verff. untersuchen Transformationen T der Algebra C_n aller $n \times n$ Matrizen mit komplexen Elementen mit $T(\alpha A + \beta B) = \alpha T(A) + \beta T(B)$. Sie beweisen: 1. Wenn für jedes A Rang $T(A) = \text{Rang } A$ gilt, dann ist entweder $T(A) = U A V$ oder $T(A) = U A' V$, wo U, V bestimmte nicht singuläre Matrizen bedeuten. 2. Wenn für jedes Hermitesche A $T(A)$ und A dieselben Eigenwerte haben, dann gilt für jedes A entweder $T(A) = U A U^{-1}$ oder $T(A) = U A' U^{-1}$. 3. Wenn für jedes unimodulare A $T(A)$ und A dieselbe Determinante haben, dann gilt für jedes A entweder $T(A) = U A V$ oder $T(A) = U A' V$, wo U, V unimodular sind.

J. L. Brenner.

Marcus, Marvin and Roger Purves: Linear transformations on algebras of matrices: The invariance of the elementary symmetric functions. Canadian J. Math. 11, 383—396 (1959).

Es sei M_n der Vektorraum aller n -reihigen, quadratischen Matrizen, und für jedes $A \in M_n$ sei $E_r(A)$ die r -te elementar-symmetrische Funktion der Eigenwerte von A . Verff. betrachten lineare Abbildungen T von M_n in sich, die die Gleichung $E_r(T(A)) = E_r(A)$ für alle $A \in M_n$ erfüllen und zeigen: Gilt $4 \leq r \leq n-1$, so gibt es Matrizen $U, V \in M_n$ mit $UV = e^{i\varphi} I_n$ und $r\varphi \equiv 0 \pmod{2\pi}$, so daß $T(A) = U A V$ für alle $A \in M_n$ oder aber $T(A) = U A' V$ für alle $A \in M_n$ gilt. Für $r = 1, 2$ ist die entsprechende Behauptung falsch, wie an Gegenbeispielen gezeigt wird. Der Fall $r = 3$ bleibt offen.

H.-J. Kowalsky.

Marcus, M., B. N. Moyls and R. Westwick: Extremal properties of hermitian matrices. II. Canadian J. Math. 11, 379—382 (1959).

Ergebnisse von Ky Fan über Hermitesche Matrizen wurden von M. Marcus und J. L. McGregor (dies. Zbl. 73, 253) für den Fall nichtnegativer Hermitescher Matrizen verallgemeinert. In der vorliegenden Arbeit werden entsprechende Untersuchungen für beliebige Hermitesche Matrizen durchgeführt. Es sei H eine beliebige, n -reihige Hermitesche Matrix mit den Eigenwerten $h_1 \geq \dots \geq h_n$, und es gelte $1 \leq r \leq k \leq n$. Ferner sei

$$g(x_1, \dots, x_k) = \sum \{ (H x_{i_1} \wedge \dots \wedge H x_{i_r}, x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_r}) : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq k \}.$$

Verff. beweisen dann die Gleichung $\max g = \max E_r(h_1, \dots, h_s, h_{n-k+s+1}, \dots, h_n)$.

2

Dabei ist links die Maximumbildung über alle Orthonormalsysteme x_1, \dots, x_k des n -dimensionalen Raumes zu erstrecken. Auf der rechten Seite bedeutet E_r die r -te elementarsymmetrische Funktion, und die Maximumbildung bezieht sich auf alle s mit $0 \leq s \leq k$. Die analoge Gleichung gilt für die Minima. *H.-J. Kowalsky.*

Cheney, Ward and Allen A. Goldstein: Note on a paper by Zuhovickij concerning the Tchebycheff problem for linear equations. *J. Soc. industr. appl. Math.* 6, 233—239 (1958).

Die vorliegende Note hat den Zweck, die Arbeit von S. I. Zuchovickij (dies. Zbl. 42, 299, vgl. auch Goldstein und Cheney, dies. Zbl. 84, 19) zugänglich zu machen und zu vervollständigen. — Sei A eine reelle Matrix mit m Zeilen $a'_{(i)}$ ($i = 1, \dots, m$) und n Spalten, wo $m > n$ und jedes System von n Zeilen linear unabhängig ist (Haarsche Bedingung). Für das lineare Gleichungssystem $a'_{(i)} x = b_i$ soll die „Minimax-Lösung“ im Sinne von Tschebyscheff gefunden werden, d. h. man soll das Minimum der Funktion $F(x) = \max_{1 \leq i \leq m} |R_i(x)|$ mit $R_i(x) = a'_{(i)} x - b_i$ bestimmen. Haar hat bewiesen [*Math. Ann.* 78, 294—311 (1917)], daß die Minimax-Lösung $x = \bar{x}$ eindeutig bestimmt ist; vgl. auch N. I. Achiezer, Vorlesungen über Approximationstheorie (dies. Zbl. 52, 290), § 46. Der Wert $F(\bar{x})$ heißt die Minimalabweichung. Zur Bestimmung von \bar{x} wird die Polyederfläche $\xi = F(x)$ im Raum E_{n+1} betrachtet. Ein „kritischer Punkt“ ist ein Punkt y für den

$$F(y) = |R_{i_1}(y)| = \dots = |R_{i_{n+1}}(y)|$$

gilt; im allgemeinen ist es die Abszisse einer Ecke jenes Polyeders. Es wird ein Prozeß beschrieben, welcher von einem willkürlichen x ausgehend durch höchstens n -malige Anwendung zu einem kritischen Punkt führt. O. B. kann sodann angenommen werden, daß $i_j = j$ ($j = 1, \dots, n+1$) und daß die $R_j(y) > 0$ sind. Man bestimme nun $n+1$ Punkte $v^{(j)} \in E_n$ derart, daß $a'_{(i)} v^{(j)} = b_i$ ($i = 1, \dots, n+1$; $i \neq j$; $j = 1, \dots, n+1$), was auf Grund der Haarschen Bedingung möglich ist, dazu eindeutig. Sei S die konvexe Hülle von $\{v^{(1)}, \dots, v^{(n+1)}\}$. Es wird sodann bewiesen (was in der Note von Zuchovickij übergangen worden war), daß (I) y dann und nur dann eine Minimax-Lösung darstellt, wenn $y \in S$; (II) für $y \notin S$ ein Index j_0 derart existiert, daß das Segment $\overline{v^{(j_0)} y}$ einen kritischen Punkt w enthält, für den $F(w) < F(y)$ gilt.

H. Schwerdtfeger.

Dulmage, A. L. and N. S. Mendelsohn: The term and stochastic ranks of a matrix. *Canadian J. Math.* 11, 269—279 (1959).

Let $A = \|a_{ij}\|$ be a $n \times n$ matrix with non-negative entries $a_{ij} \geq 0$. The termrank of A is the maximal number ρ of places $(i_1, j_1), \dots, (i_\rho, j_\rho)$ in A such that $k \neq h$ implies $i_k \neq i_h, j_k \neq j_h$ (where $1 \leq i_k, j_k \leq n$) and $\prod_{k=1}^{\rho} a_{i_k j_k} \neq 0$. Then $\rho \geq S/M$, where S is the sum of all entries in A and M is the maximum of row and column sums. A matrix is said to be T -double stochastic (T -d. s.) if all row and column sums are equal to T (instead of usually $T = 1$). If A is a submatrix generated by n first rows and columns of a $(n+r) \times (n+r)$ T -d. s. matrix B , B is said to be a (r, T) -d. s. extension of A . Such an extension exists always if $r \geq n$ and $T \geq M$ and for $r < n$ exists if and only if $M \leq T \leq S/(n-r)$. If A is a submatrix (generated by the first n rows and columns) of a d. s. $(n+\sigma) \times (n+\sigma)$ matrix, but is not of any d. s. $(n+i) \times (n+i)$ matrix for all $i < \sigma$, then σ is called the stochastic rank of A . Thus $\sigma = [S/M]$. To every matrix A there corresponds the biparted (undirected) graph K_A defined as follows: 1. (2.) set of vertices is the set $I(J)$ of all row (column) indices of A and a pair (i_k, j_h) is an edge if and only if $i_k \in I, j_h \in J$ and $a_{i_k j_h} > 0$. The set α of all (r, T) -d. s. extensions of A (as point-set in space of dimension $(n+r)^2$) is convex and $B \in \alpha$ is said to be a vertex matrix, if B is not expressible in the form $pC + (1-p)D$, where $C, D \in \alpha, C \neq D$ and $1 > p > 0$.

Now $B \in \chi$ is a vertex matrix if and only if K_B does not contain a circuit. There is given a linear programming formulation of previous questions. *K. Čulík.*

Gaddum, Jerry W.: Linear inequalities and quadratic forms. *Pacific J. Math.* 3, 411—414 (1958).

Die reelle quadratische Form $A(x) = \sum a_{ik} x_i x_k$ ist bedingt definit bzw. fast-definit, wenn $A(x) > 0$ für $x \geq 0$ bzw. für $x > 0$ gilt. Setzt man in $A(x)$ einen Teil der Variablen $(x) = (x_1, \dots, x_n)$ Null, so bleibt eine quadratische Form der restlichen Variablen (\hat{x}) und diese heißt ein Hauptminor $B(\hat{x})$ von $A(x)$. Mit Verwendung früherer Ergebnisse (J. W. Gaddum, dies. Zbl. 48, 165) wird gezeigt: Ist C eine beliebige Matrix, so ist $Cx > 0$ bzw. $Cx \geq 0$ lösbar dann und nur dann, wenn $D = C \cdot C^T$ eine bedingt definite bzw. fast-definite quadratische Form ergibt. Diesem Resultat sind mehrere Sätze ähnlicher Art, die den Begriff des Hauptminors verwenden, vorausgestellt. *G. Aumann.*

Gasapina, U.: Le equazioni di quarto grado. *Periodico Mat.*, IV. Ser. 35, 44—55 (1957).

Bericht über drei bekannte Lösungsmethoden der biquadratischen Gleichung: Geometrische Interpretation (Kegelschnittbüschel) der Methode von Ferrari, Eulers Methode, Lagranges Methode. *I. Paasche.*

Barsotti, Leo: Eine Bedingung dafür, daß die Wurzeln einer Gleichung 4. Grades eine harmonische Gruppe bilden. *Anuário Soc. Paranaense Mat.*, II. Sér. 1, 35—37 (1958) [Portugiesisch].

Mignosi, Giuseppe: Sulla enumerazione delle radici della più generale equazione algebrica in un corpo finito. Convegno internaz. Reticoli Geom. proiettive, Palermo-Messina 1957, 99—108 (1958).

In questa breve Nota l'A. anzitutto espone, coordinandole, alcune ricerche relative alla enumerazione delle radici distinte di una qualsiasi equazione algebrica in un corpo finito qualunque; indica poi un metodo che permette di determinare, con operazioni razionali, il numero delle radici distinte di una tale equazione aventi un dato ordine di molteplicità; e permette anche di determinare il massimo di questi ordini di molteplicità. Con ciò risulta anche determinato il numero delle radici, contate ciascuna tante volte quanto è il suo ordine di molteplicità. — L'A. studia anche l'equazione binomia. *F. Cecioni.*

Derwidué, L.: Sur la localisation des zéros des polynômes à coefficients complexes. *Mathesis* 68, 13—23 (1959).

The author in a previous study (this Zbl. 82, 245) gave a theorem which was an extension of that of Frank [this Zbl. 46, 245; *Math. Nachr.* 19, 182—185 (1958)]. In this paper the author states his theorem more precisely, as follows: Let $f_j \equiv x^{s_j}(1 + q_j x^2 + p_j x^4 + \dots + a_j x^{2r_j})$, $k_j \equiv U_j + Q_j x^2 + P_j x^4 + \dots + A_j x^{2e_j}$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, where s_j is odd and the coefficients $q_j, p_j, \dots, a_j, U_j, Q_j, P_j, \dots, A_j$, and c_j are real. The equation

$$H_n(x) \equiv \begin{vmatrix} c_0 f_0 + k_0 i + 1 & -1 & 0 & & 0 \\ 1 & c_1 f_1 + k_1 i & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & c_{n-2} f_{n-2} + \frac{k_{n-2} i}{1} & -1 \\ & & & & c_{n-1} f_{n-1} + k_{n-1} i & \end{vmatrix} = 0$$

has no pure imaginary roots, and has the same number of roots with positive real parts as the equation

$$H_n(x, 1) \equiv \begin{vmatrix} c_0 f_0 + 1 & -1 & 0 & & 0 \\ 1 & c_1 f_1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & c_{n-2} f_{n-2} & -1 \\ & & & & c_{n-1} f_{n-1} & \end{vmatrix} = 0.$$

Furthermore, the equation

$$\Phi_{2n+1}(x, 1) \equiv \begin{vmatrix} c_0 f_0 + k_0 i + 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & c_1 f_1 + k_1 i & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & c_2 f_2 + k_2 i & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & c_3 f_3 + k_3 i - 1 & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ & 1 & 0 & \dots & & 1 \ c_{2n} f_{2n} + k_{2n} i \end{vmatrix} = 0$$

(which is assumed to have no pure imaginary roots) has roots with positive real parts in number equal to $v_0 + v_1 + \dots + v_{2n} + \mu$, augmented by an even number. This even number is zero if $s_j = 1$, $t_j = 0$. Here t_j is the even number of pure imaginary zeros of f_j ; v_j is the number of zeros of f_j with positive real parts and v_0 the number for $f_0 + k_0 i + 1$; μ is the number of negative c_j . As applications, a method is given for the calculation of the roots of algebraic equations with complex coefficients analogous to that given by Hitchcock (this Zbl. 22, 258) and by Frank (this Zbl. 60, 53), as well as a simple proof of a necessary and sufficient condition of Frank for all the roots of an equation with complex coefficients to have negative real parts. E. Frank.

Aparo, Enzo: Sulle equazioni algebriche matriciali. Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 22, 20—23 (1957).

L'A. traite le problème général non linéaire des valeurs propres d'une matrice dont les éléments sont des polynômes en λ ; il montre comment on peut simplifier les calculs en considérant des valeurs auxiliaires de λ qui permettent d'utiliser des propriétés connues des polynômes de Tschebyscheff. A. de Castro.

Motzkin, T. S. and J. L. Walsh: Location of zeros of infrapolynomials. Compositio math. 14, 50—70 (1958).

p und q seien normierte Polynome n -ten Grades. q heißt Unterpolynom von p bez. der Punktmenge E , wenn $|q(z)| < |p(z)|$ gilt für alle $z \in E$, $p(z) \neq 0$. p heißt Infrapolynom bez. E , wenn es kein Unterpolynom besitzt. Diese Definition erfaßt die allgemeinste Polynomklasse, auf welche die Schlußweise anwendbar ist, mit der Fejér bewiesen hat, daß die Nullstellen der Tschebyscheff-Polynome von E in der konvexen Hülle von E liegen. Vornehmlich für unendliche Punktfolgen E wird in der vorliegenden Arbeit die Nullstellenverteilung der Infrapolynome untersucht. Es ist nicht möglich, die zahlreichen Resultate wiederzugeben. H. Tietz.

Osborn, Howard A.: A class of bilinear forms. Trans. Amer. math. Soc. 90, 485—498 (1959).

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K , et soit A un endomorphisme de E . L'A. considère l'ensemble $C(A)$ des formes bilinéaires f sur $E \times E$ pour lesquelles A est auto-adjoint, autrement dit $f(Ax, y) = f(x, Ay)$ quels que soient x, y dans E . Soit \mathfrak{R} l'anneau des endomorphismes de E , et soit $\mathfrak{C}(A)$ le centralisateur de A dans \mathfrak{R} ; alors $C(A)$ est un $\mathfrak{C}(A)$ -module à droite naturellement isomorphe à $\mathfrak{C}(A)$ (considéré comme module à droite sur lui-même). En outre, le sous-anneau \mathfrak{A} de \mathfrak{R} engendré par A et les scalaires de K est dans le centre de $\mathfrak{C}(A)$; l'A. décrit $\mathfrak{C}(A)$ comme \mathfrak{A} -algèbre, en particulier lorsque E est monogène en tant que \mathfrak{A} -algèbre; on obtient entre autres des tables de multiplication explicites pour des bases convenablement choisies. J. Dieudonné.

Wild, Jonathan: On the index of a quadratic form. Canadian math. Bull. 1, 180 (1958).

Kurzer Beweis des folgenden bekannten Resultats: Ist T ein totalisotroper Unterraum eines Vektorraums V mit symmetrischer Bilinearform, und existieren in V totalisotrope Unterräume einer Dimension $m > \dim T$, so ist unter diesen auch ein T enthaltender. P. Dembowski.

Gruppentheorie:

Sade, Albert: Quasigroupes obéissant à certaines lois. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A 22, 151—180 (1958).

Abschnitt I gibt eine Zusammenstellung der in Gruppoiden (algebraische Gebilde mit einer binären Verknüpfung) untersuchten Gesetze. II. Es werden solche Quasigruppen betrachtet, bei denen die von je zwei verschiedenen Elementen erzeugten Unterquasigruppen sämtlich dieselbe endliche Ordnung k haben. Ist k kleiner als die Ordnung n der Quasigruppe, so haben je zwei solcher Unterquasigruppen höchstens ein Element gemeinsam; die Menge der (von je zwei Elementen erzeugten) Unterquasigruppen ist also ein Steiner-System, im Falle $n = k^2 - k + 1$ insbesondere eine projektive Ebene. Genauer untersucht werden die Fälle $k = 3$ und $k = 4$. Im ersten Fall muß die Quasigruppe kommutativ sein und das Gesetz $a = (ab)b$ erfüllen. Jede die Gesetze $b(ba) = a = (ab)b$ erfüllende Quasigruppe ist kommutativ und ergibt unter Hinzunahme des Gesetzes $a^2 = a$ den Fall $k = 3$; die sich dabei ergebenden Steiner-Systeme werden bei Bruck (dies. Zbl. 81, 17) aus kommutativen Loops mit $b(ba) = a$ durch Wegnahme des neutralen Elements gebildet. III. Gruppoiden, in denen jede Gleichung $xa = b$ eindeutig nach x auflösbar ist. Zu $a \neq b$ und jedem x wird die Folge der $x, xa, (xa)b, ((xa)b)a, \dots$ gebildet. Im endlichen Fall reduziert sich diese auf einen Zyklus (circuit fermé); im unendlichen Fall wird dies zusätzlich vorausgesetzt. Bei festen a, b kommt jedes Element entweder in genau einem Zyklus, und zwar zweimal, oder in genau zwei Zyklen, und zwar je einmal, vor. Es wird der Zusammenhang dieser Zyklen mit dem Gesetz $(xy)y = x$ untersucht. IV. In der Quasigruppe Q ist die Abbildung $z \rightarrow z \setminus z$ [dabei $x(x \setminus y) = y$] genau dann eine Permutation, wenn sie in einem durch $x \times y = (x\xi \cdot y\eta)\xi^{-1}$ definierten Isotop von Q zur identischen Abbildung wird, d. h. dieses Isotop idempotent ist. (In Th. 16 hat Verf. die Einschränkung auf spezielle Isotope zu erwähnen vergessen; daß sie unentbehrlich ist, zeigt bereits die idempotente Quasigruppe aus 3 Elementen). Im endlichen Fall folgt die Permutationseigenschaft von $z \rightarrow z \setminus z$ schon daraus, daß jedes Element rechtsneutrales Element für mindestens ein Element ist. Die Existenz von a, b , für die $xy = ab$ mit $xb = ay$ gleichbedeutend ist, besagt, daß ein Loop-Isotop das Gesetz $x^2 = y^2$ erfüllt. V. Eine Teilmenge S einer Quasigruppe Q heißt Singulärteiler, wenn es eine Äquivalenzrelation \equiv in Q mit den folgenden Eigenschaften gibt: Wenn $a, b \in Q - S$ und $ca \equiv cb$ oder $ac \equiv bc$, so $a \equiv b$; wenn $a \equiv b$, $c \equiv d$, so $ac \equiv bd$ oder $ac \in S$ oder $bd \in S$; wenn $a, b \in S$, so $a \equiv b$. Im Komplexprodukt zweier Restklassen H, K (bez. \equiv) ist dann genau eine Restklasse L enthalten, und die Menge der Restklassen bildet mit der Verknüpfung $(H, K) \rightarrow L$ wieder eine Quasigruppe. VI. Als Rechtsdefektivquasigruppe wird ein Gruppoid Q dann bezeichnet, wenn es eine Teilmenge R von Q mit den folgenden Eigenschaften gibt: Das Verknüpfungsergebnis xy ist dann und nur dann definiert, wenn $x \in Q$, $y \in R$; im Falle $r \in R$, $q \in Q$ gibt es genau ein x mit $xr = q$; wenn $qx = qy$, so $x = y$. (Die Bemerkung des Verf., daß man im Falle $Q = R$ die Quasigruppendifinition erhält, stimmt bei unendlicher Menge Q nicht, wie die Menge der ganzen Zahlen mit der Verknüpfung $(x, y) \rightarrow x + 2y$ zeigt.) Eine zu Q isomere Rechtsdefektivquasigruppe entsteht, wenn für ein Mengenpaar R', Q' mit $R' \subseteq R$, $Q' \subseteq Q$, $Q'R' \subseteq Q'$, $(Q - Q')R' \subseteq Q - Q'$ und eine Permutation η von R' im Falle $x \in Q'$, $y \in R'$ das Verknüpfungsergebnis xy durch $x(y\eta)$ ersetzt wird; im Falle $Q' = Q$, $R' = R$ geht die so definierte Isomerie in einen Sonderfall der Isotopie über. Es entsteht die Frage, wann zwei Quasigruppen durch eine Folge von Isomeren ineinander übergeführt werden können. VII. Beispiele von Quasigruppen mit $(ab)b = a$. VIII. Genügt die Quasigruppe Q dem Gesetz $(ab)b = a$, so gibt es genau dann ein durch $(x \times y)\zeta = x\xi \cdot y\eta$ definiertes Isotop mit $\zeta \neq \xi$, in dem ebenfalls dieses Gesetz gilt, wenn es eine Permutation ζ

von Q mit $xy = (x\zeta \cdot y)\zeta$ gibt; diese muß dann sogar regulär sein. IX. Isomerien bei denen das Gesetz $(ab)b = a$ erhalten bleibt. X. Bemerkungen über Quasigruppen, welche die Gesetze $(ab)b = a = b(ba)$ erfüllen. *G. Pickert.*

Parker, E. T.: Orthogonal latin squares. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* 45, 859—861 (1959).

Deux groupoïdes $Q = E(\cdot)$ et $R = E(\times)$, définis sur le même ensemble, E , sont orthogonaux si $x \cdot y = z \cdot t$ et $x \times y = z \times t \Rightarrow x = z$ et $y = t$. (Ref., *Zbl.* 80, 17). L'existence de tels groupoïdes, dans le cas des quasigrupes finis, dépend de l'ordre de ces quasigrupes. Il est bien connu qu'il n'existe pas de solution du 6^o ordre et l'on a longtemps cru qu'il en était de même pour tous les ordres de la forme $4k+2$. Mais Bose et Shrikande ont obtenu des quasigrupes orthogonaux d'ordre $4k+2$ à partir de $k=5$. On a cherché sans succès à obtenir par criblage une solution pour $k=2$; les machines électroniques se sont révélées trop lentes pour faire face à une prospection d'une telle ampleur. L'A. présente deux quasigrupes du 10^o ordre dont il avait déjà donné la primeur dans *Amer. math. Soc., Notices*, 6, No. 3, 276 (1959). Plus généralement, il existe une paire de quasigrupes orthogonaux d'ordre $\frac{1}{2}(3q-1)$, où q est une puissance d'un nombre premier de la forme $4k+3$, ($k \neq 0$), dont l'A. donne la construction. De ces deux quasigrupes on ne peut déduire un ensemble demosien de quasigrupes deux à deux orthogonaux engendrant un plan du 10^o ordre. Sur la même question, voir E. T. Parker. *Proc. Amer. math. Soc.* 10, 946—949 (1959). *A. Sade.*

Maury, Guy: Une caractérisation des demi-groupes noëthériens intégralement clos. *C. r. Acad. Sci., Paris* 248, 3260—3261 (1959).

Cette note étend aux demi-groupes noëthériens D (commutatifs, à élément unité, avec condition de chaîne ascendante pour les idéaux) la caractérisation des anneaux commutatifs noëthériens intégralement clos. Pour que D soit intégralement clos il faut et il suffit que pour tout idéal premier essentiel Q d'un idéal principal (a) , a étant un élément simplifiable et non inversible, il n'y ait pas d'idéal Q -primaire strictement contenu entre Q et $Q^{(2)}$, $Q^{(2)}$ étant la composante Q -primaire de l'idéal Q^2 . *J. Guérindon.*

Łoś, J. and Š. Schwarz: Remarks on compact semigroups. *Colloquium math.* 6, dédié à C. Kuratowski, 265—270 (1958).

The authors prove first that if X is a compact space, $f: X \times \cdots \times X$ (k times) $\rightarrow X$ is continuous, and X_ξ , $\xi < \alpha$, a decreasing family of non-empty closed sets of X such that for each $\xi_0 < \alpha$ there exist $\xi_1, \xi_2, \xi_0 \leq \xi_1 < \xi_2 < \alpha$, with $f(X_{\xi_1} \times \cdots \times X_{\xi_2}) = X_{\xi_0}$, then $f(\bigcap_{\xi < \alpha} (X_\xi \times \cdots \times X_\xi)) = \bigcap_{\xi < \alpha} X_\xi$. By a unified method based on this topological lemma, they derive some theorems concerning compact semigroups. In particular, the following are proved. Let S be a compact semigroup. For every $a \in S$ there exist a unique maximal subsemigroup $R^{(a)}$ [resp. $L^{(a)}$] having the property $aR^{(a)} = R^{(a)}$ [resp. $L^{(a)}a = L^{(a)}$], a unique maximal subsemigroup $M^{(a)}$ [resp. $P^{(a)}$] with the property $M^{(a)}aM^{(a)} = M^{(a)}$ [resp. $aP^{(a)}a = P^{(a)}$]; $R^{(a)}$ [resp. $L^{(a)}$] is a closed right [resp. left] ideal of A , and $M^{(a)}$ is a closed two-sided ideal; $P^{(a)} = R^{(a)} \cap L^{(a)} = R^{(a)}L^{(a)} \subset R^{(a)}$ [resp. $L^{(a)} \subset L^{(a)}R^{(a)} \subset M^{(a)}$]. *K. Morita.*

Dekker, Th. J.: On free products of cyclic rotation groups. *Canadian J. Math.* 11, 67—69 (1959).

Verf. beweist, daß zwei den Nullpunkt festlassende Drehungen des dreidimensionalen euklidischen Raumes um den Winkel α eine freie Gruppe erzeugen, falls nur die Drehachsen verschieden sind und $\cos \alpha$ transzendent ist. Ein weiterer Satz über die Darstellung freier Produkte zyklischer Gruppen durch Drehgruppen ist in einem allgemeineren Ergebnis von Balcerzyk und Mycielsky enthalten (dies. *Zbl.* 79, 28).

H. Leptin.

Groot, J. de and H. de Vries: Indecomposable abelian groups with many automorphisms. *Nieuw Arch. Wiskunde*, III. Ser. 6, 55—57 (1958).

Two examples are given of (classes of) torsionsfree indecomposable Abelian groups of order m , where $\aleph_0 \leq m \leq \aleph$, which have automorphism groups of order 2^m . This contrasts with the groups given by J. de Groot (this Zbl. 77, 32) and H. de Vries and A. B. de Miranda (this Zbl. 78, 15), all of which turn out to have relatively small automorphism groups. A correction of an error in Example 1 will be published soon in the „*Nieuw Archief voor Wiskunde*“.

M. C. R. Butler.

Massey, W. S.: On the universal coefficient theorem of Eilenberg and MacLane. *Bol. Soc. mat. Mexicana*, II. Ser. 3, 1—12 (1958).

If A, B are graded differential groups, so is $\text{hom}(A, B)$, and associating with any cycle $f \in \text{hom}(A, B)$ the induced $f_* \in \text{hom}(H(A), H(B))$ gives a homomorphism $\Omega: H(\text{hom}(A, B)) \rightarrow \text{hom}(H(A), H(B))$, which is an epimorphism if A is free. If now $f \in \Phi \in \Omega^{-1}(0)$, then $f_* = 0$, and in the exact sequence of the (algebraic) mapping cylinder, $M(f)$, of f , $H(M(f))$ is an extension of $H(A)$ by $H(B)$. Thus defining $\text{ext}(H(A), H(B))$ in the original, pre-projective resolution way, one has $\Xi: \Omega^{-1}(0) \rightarrow \text{ext}(H(A), H(B))$. Theorem: Ξ is an isomorphism onto. There follows, as an immediate corollary, the universal coefficient theorem in singular homology.

W. H. Cockcroft.

Weiss, E.: A deflation map. *J. Math. Mech.* 8, 309—329 (1959).

For the cohomology in negative dimension of finite groups a map called deflation is defined, as a counterpart or dual to so-called inflation (or lift) in positive dimension. Thus, with the standard (complete) complexes $\Sigma X_r, \Sigma Y_r$ of a finite group G and its normal subgroup H , maps $\Lambda_{-r}: Y_{-r} \rightarrow X_{-r}$, $r \geq 1$, are defined by

$$\Lambda_{-r}((\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1})^e) = \sum_{\tau \in eH, \sigma_i \in \alpha_i} (\sigma_1, \dots, \sigma_{r-1})^\tau,$$

where α_i are cosets of $G \bmod H$. Then the maps Λ_{-r} (and a well-known canonical map $\Lambda_0: X_0 \rightarrow Y_0$) induce maps $H^{-r}(G, A) \rightarrow H^{-r}(G/H, A^H)$, $r \geq 1$, called deflation, for negative dimensional cohomology groups on a G -module A . So the here defined deflation is roughly the combination of the ordinary deflation for homology groups and the norm map on H , and is what was called modified residuation by Nakayama (this Zbl. 73, 14); it was treated also in some of Artin's Princeton lectures, the reviewer understands. Properties of the deflation maps with respect to exact sequences, associativity and cup product, e. g., are studied, in conjunction with dual, inflation maps.

T. Nakayama.

Itô, Noboru: Über den kleinsten p -Durchschnitt auflösbarer Gruppen. *Arch. der Math.* 9, Festschrift Hellmuth Kneser, 27—32 (1958).

Als Zusatz einer genaueren Übersicht über Sylowgruppen von endlichen auflösbaren Gruppen beweist Verf. folgenden Satz. Es sei G endlich und auflösbar. Zu jeder nicht-Mersenneschen ungeraden Primzahl p gehören zwei p -Sylowgruppen P_1, P_2 , mit $P_1 \cap P_2 = \cap P_i$, worin $\{P_i\}$ die Menge aller p -Sylowgruppen bedeutet. Ist $O(G)$ ungerade, dann kann p auch eine Mersennesche Primzahl sein. Für $p = 2$ sind die Bedingungen etwas komplizierter.

J. L. Brenner.

Ree, Rimhak: On generalized conjugate classes in a finite group. *Illinois J. Math.* 3, 440—444 (1959).

Two elements a and b in a finite group G are σ -congruent if there exists $x \in G$ such that $b = x^{-1} a x^\sigma$, where σ is a given endomorphism of G . This equivalence relation partitions G into σ -classes. A subset S of G is σ -invariant if $x \in S$ implies that $x^\sigma \in S$. The author makes use of group characters to prove that the number of σ -classes equals the number of σ -invariant classes of conjugate elements in G (Th. 1) by first showing that the number of σ -classes in G is equal to the number of σ -invariant irreducible ordinary characters of G (Th. 2) and this in turn is shown to be equal to the number of σ -invariant classes of conjugate elements in G (Th. 3). As

consequences of Theorem 2 it is proved that: 1. Any automorphism of G leaving invariant all classes of conjugate elements is induced by an inner automorphism of the group algebra of G over the complex field Ω . 2. The group algebra \bar{A} of \bar{G} (G extended by σ) over Ω is isomorphic to the group algebra over Ω of the direct product of G and a cyclic group of order m , the order of σ . Added in proof is the outline of a simple direct proof of Theorem 1 due to H. Nagao and based on the number of solutions (x, y) of $x^{-1} y x^{\sigma} = y$, counted in two ways. M. Burrow.

Kodama, Tetsuo and Koichi Yamamoto: Some properties of the symmetric group. Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ., Ser. A **12**, 104—112 (1958).

Es sei l eine feste Primzahl, $0 \leq q < l$, $n = l + q$, $T = (m_1, \dots, m_l)$ eine Partition von n , $f(T)$ der Grad der zugehörigen irreduziblen Darstellung der symmetrischen Gruppe S_n , $\lambda_j = m_j + l - j$, $L(T) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Dann sind (1) $L(T) = (l + j, \lambda_2, \dots)$ ($l > \lambda_2$, $j \geq 1$, j kommt in $L(T)$ nicht vor), (1') $L(T) = (l + j, \dots, l, \dots, j, j - 1, \dots, 1)$ ($j \geq 1$) und (2) $L(T) = (l, \dots)$ die Typen, für die $l \nmid f(T)$. Die Typen (1) und (1') sind paarweise assoziiert. Die Anzahl der Partitionen T mit $L(T)$ vom Typ (1') ist $N_1(n) = \sum_{s=1}^q \tau(s) p(q-s)$, wo $\tau(v)$ die Anzahl der Teiler von v , $p(v)$ die Anzahl der Partitionen von v ist; beim Typ (2) findet sich $N_2(n) = l p(q) - 2 \sum_{s=1}^q \tau(s) p(q-s)$. Daher ist $2N_1(n) + N_2(n) = l p(q)$ die Anzahl der Charaktere von S_n , deren Grade $\not\equiv 0 (l)$ sind (die in Brauers Terminologie zu den l -Blöcken der niedersten Art gehören). Die Anzahl der restlichen Charaktere (von denen unter diesen Voraussetzungen jede einen Block der höchsten Art bildet) ist also $p(n) - l p(q)$. H. Boerner.

Robinson, G. de B.: A remark by Philip Hall. Canadian math. Bull. **1**, 21—23 (1958).

Wie für den Grad f^λ der zur Partition $[\lambda]$ von n gehörigen irreduziblen Darstellung der symmetrischen Gruppe S_n die Formel $f^\lambda = n! / H^\lambda$, wo $H^\lambda = \prod h_{ij}$ das Produkt der „Hakenlängen“ des zugehörigen Young-Diagramms, so gilt für den Grad $\delta^\lambda(d)$ der zugehörigen irreduziblen Darstellung der vollen linearen Gruppe $GL(d)$ die Formel $\delta^\lambda(d) = \prod C_{ij} / H^\lambda$, wo $C_{ij} = d + j - i$ — bemerkt Ph. Hall. H. Boerner.

Green, J. A.: On the indecomposable representations of a finite group. Math. Z. **70**, 430—445 (1959).

In dieser wichtigen Arbeit werden zu einem Körper \mathbb{k} der Charakteristik p und einer endlichen Gruppe \mathfrak{G} (\mathbb{k}, \mathfrak{G})-Moduln (im folgenden einfacher: \mathfrak{G} -Moduln) betrachtet, also endlich-dimensionale Vektorräume, die zu Darstellungen von \mathfrak{G} über \mathbb{k} gehören. Ist \mathfrak{H} Untergruppe von \mathfrak{G} und L ein \mathfrak{H} -Modul, so bezeichnet $L^{\mathfrak{G}}$ den durch L induzierten \mathfrak{G} -Modul, für den bekanntlich $\dim L^{\mathfrak{G}} = \dim L \cdot (\mathfrak{G} : \mathfrak{H})$ ist. Ein \mathfrak{G} -Modul M heißt eine Komponente des \mathfrak{G} -Moduls N , wenn M zu einem direkten Summanden von N isomorph ist, und \mathfrak{H} -projektiv, wenn es einen \mathfrak{H} -Modul L gibt, so daß M eine Komponente von $L^{\mathfrak{G}}$ ist. Aus einer Arbeit von Higman [Duke Math. J. **21**, 369—376 (1954; dies. Zbl. **55**, 255)] folgen dann die Sätze: M ist genau dann \mathfrak{H} -projektiv, wenn es Komponente von $(M_{\mathfrak{H}})^{\mathfrak{G}}$ ist ($M_{\mathfrak{H}}$ entsteht aus M durch Beschränkung des Operatorenbereichs auf \mathfrak{H}); oder wenn M einen $(\mathbb{k}, \mathfrak{H})$ -Endomorphismus η besitzt, so daß $\sum_{i=1}^n x_i^{-1} \eta x_i$ die Identität in M ist, wo die x_i ein Vertretersystem der \mathfrak{H} -Rechtsnebenklassen bilden. Ferner: Jeder \mathfrak{G} -Modul ist \mathfrak{B} -projektiv, wenn \mathfrak{B} eine p -Sylowgruppe von \mathfrak{G} ist. — Für jeden unzerfällbaren \mathfrak{G} -Modul M gibt es eine minimale Untergruppe \mathfrak{B} von \mathfrak{G} , für die M \mathfrak{B} -projektiv ist; d. h. für jede Untergruppe \mathfrak{H} , für die M \mathfrak{H} -projektiv ist, gilt $\mathfrak{B} \leq_{\mathfrak{G}} \mathfrak{H}$ (d. h. es gibt eine in \mathfrak{G} zu \mathfrak{B} konjugierte Untergruppe von \mathfrak{H}). \mathfrak{B} ist bis auf Konju-

ation in \mathfrak{G} bestimmt und heißt Scheitel von M . Aus dem obigen Satz über p -Sylowgruppen folgt, daß jeder Scheitel p -Untergruppe ist. Ist \mathfrak{B} Scheitel von M , so heißt jeder unzerfällbare \mathfrak{B} -Modul S , für den M Komponente von $S^{\mathfrak{G}}$ ist, eine Quelle von M . Satz: M sei unzerfällbarer \mathfrak{G} -Modul mit Scheitel \mathfrak{B} und \mathfrak{S} -projektiv; $M_{\mathfrak{S}} = H_1 \oplus \dots \oplus H_t$ sei Zerlegung von $M^{\mathfrak{G}}$ in unzerfällbare \mathfrak{S} -Moduln mit den Scheiteln $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_t$. Dann ist $\mathfrak{B}_{\tau} \leq_{\mathfrak{G}} \mathfrak{B}$ für $\tau = 1, \dots, t$, und für ein τ gilt das

— Zeichen, d. h. M ist Komponente von H_{τ} , und dann ist die Quelle von H_{τ} auch Quelle von M . Dies gilt bei beliebigem M für $\mathfrak{S} = \mathfrak{B}$, und das erlaubt das Problem der Bestimmung von Scheitel und Quelle auf dasselbe Problem für p -Gruppen zurückzuführen. — Wenn \mathfrak{G} p -Gruppe ist, so gilt: Ist L absolut unzerfällbar, so $L^{\mathfrak{G}}$. Bei beliebigem \mathfrak{G} gilt: Die Dimension eines unzerfällbaren \mathfrak{G} -Moduls M ist durch $\mathfrak{B}:\mathfrak{B}$ teilbar, wo \mathfrak{B} Scheitel von M und \mathfrak{B} eine \mathfrak{B} enthaltende p -Sylowgruppe von \mathfrak{G} ist. — Über den Brauerschen Charakter $\varphi(x)$ (definiert für alle p -regulären x) der zu einem über algebraisch abgeschlossenem \mathfrak{k} unzerfällbaren \mathfrak{G} -Modul M gehörenden Darstellung wird bewiesen: $\varphi(x)$ ist teilbar durch die höchste Potenz von p , die in $(\mathfrak{D}:y^{-1}\mathfrak{B}y \cap \mathfrak{D})$ für alle $y \in \mathfrak{G}$ aufgeht; dabei ist \mathfrak{B} Scheitel von M und \mathfrak{D} eine p -Sylowgruppe des Normalisators von x in \mathfrak{G} . — Endlich besteht folgender Zusammenhang mit den Brauerschen Blöcken \mathfrak{B} und ihren Defektgruppen \mathfrak{D} : Wenn M zu \mathfrak{B} gehört und \mathfrak{B} der Scheitel von M ist, dann ist $\mathfrak{B} \leq_{\mathfrak{G}} \mathfrak{D}$; außerdem gibt es in \mathfrak{B} ein (irreduzibles) M_0 mit dem Scheitel \mathfrak{D} . H. Boerner.

Green, J. A.: Les polynomes de Hall et les caractères des groupes $GL(n, q)$. Centre Belge Rech. math., Colloque d'Algèbre supérieure, Bruxelles du 19 au 22 déc. (1956, 207—215 (1957).

Die symmetrischen Polynome über dem Körper K der komplexen Zahlen, formal in ∞ vielen Variablen geschrieben, bilden eine Algebra S über K , für die als Basis die „Potenzproduktsummen“, oder die symmetrischen Grundfunktionen, oder auch die „Schur-Funktionen“, Charaktere der ganzrationalen Darstellungen der vollen linearen Gruppen, dienen können. Ph. Hall hat in der Theorie der abelschen Gruppen der Primzahlpotenzordnung p^n (p fest) eine „Algebra der endlichen abelschen p -Gruppen“ H eingeführt, bei der diese Gruppen selbst als Basiselemente dienen. Die Koeffizienten beim Produkt sind Polynome in p , und wenn man p als Unbestimmte auffaßt, handelt es sich um eine Algebra über $K(p)$. Es stellt sich heraus, daß H zu S in eine Art isomorphe Beziehung gesetzt werden kann, wenn man noch $t = 1/p$ als neue Variable einführt. Formeln in H gehen dann für $t = 0$ in die entsprechenden in S über. — Es besteht auch eine Beziehung zur Darstellungstheorie der allgemeinen linearen Gruppe über Galois-Feldern. H. Boerner.

Vilenkin, N. Ja. (N. J.), É. L. (E. L.) Akim and A. A. Levin: The matrix elements of the irreducible unitary representations of the group of Euclidean three-dimensional space motions, and their properties. Doklady Akad. Nauk SSSR 112, 987—989 (1957) [Russisch].

Die im Titel bezeichnete Aufgabe führt auf Ausdrücke in Besselfunktionen und Clebsch-Gordon-Koeffizienten. D. Laugwitz.

Hulanicki, A.: On the topological structure of 0-dimensional topological groups. Fundamenta Math. 46, 317—320 (1959).

Verf. nennt das topologische Produkt beliebig vieler zweielementiger T_1 -Räume eine verallgemeinerte Cantorsche Menge (Spezialfall abzählbar vieler Faktoren: Cantorsches Diskontinuum) und beweist den Satz: Jede kompakte, 0-dimensionale, unendliche topologische Gruppe ist einer verallgemeinerten Cantorschen Menge homöomorph, anders ausgedrückt: Der Boolesche Verband der zugleich offenen und abgeschlossenen Mengen einer kompakten, 0-dimensionalen, unendlichen topologischen Gruppe ist frei. G. Bruns.

Hartman, S. and Jan Mycielski: On the imbedding of topological groups into connected topological groups. *Colloquium math.* **5**, 167—169 (1958).

Sei G eine beliebige topologische Gruppe und G^* die Menge aller Funktionen $f: [0, 1] \rightarrow G$, zu denen eine endliche Zerlegung von $[0, 1]$ in disjunkte Teilintervalle $[a_i, a_{i+1})$ existiert, derart, daß f auf den Teilintervallen konstant ist. G^* ist in natürlicher Weise eine Gruppe, und die konstanten Funktionen bilden eine zu G isomorphe Untergruppe G' von G^* . Ist N der Normalteiler aller $f \in G^*$ mit $f(0) = 1$, so ist G^* semidirektes Produkt von G' und N , d. h. $G = G' N$, $G' \cap N = (1)$. Verff. topologisieren G^* derart, daß G' auch topologisch zu G isomorph und abgeschlossen in G^* ist und daß G^* bogenweise und lokal bogenweise zusammenhängend wird. Ist G metrisch, so läßt sich auch G^* metrisieren. Ist G die Gruppe der Ordnung 2, so ist G^* eine metrische bogenweise und lokal bogenweise zusammenhängende Gruppe vom Exponenten 2. H. Leptin.

Wright, Fred B.: Hölder groups. *Duke math. J.* **24**, 567—571 (1957).

In zwei vorangehenden Arbeiten [dies. Zbl. **79**, 256; *J. math. Soc. Japan* **9**, 228—233 (1957)] hat Verf. das Radikal einer abelschen topologischen Gruppe definiert, seine Eigenschaften untersucht und zu Strukturuntersuchungen gewisser Klassen abelscher topologischer Gruppen benutzt. Die vorliegende Arbeit enthält zunächst die Verallgemeinerung der Definition des Radikals (und verwandter Begriffe) auf nicht abelsche topologische Gruppen. Verf. zeigt dann, daß eine zusammenhängende Gruppe ohne Radikal abelsch ist. Sodann wird das starke Radikal einer Gruppe als Durchschnitt aller „hyperresidual“ (= hr-) Untergruppen definiert, Einzelheiten siehe Definition 5 der Arbeit. Eine Hölder-Gruppe ist dann eine Gruppe ohne starkes Radikal. Der Name „Hölder-Gruppe“ wird durch den folgenden Satz erklärt: Die topologische Gruppe G ist dann und nur dann eine maximal radikalfreie Hölder-Gruppe (d. h. 0 ist eine hr-Untergruppe), wenn ein stetiger Isomorphismus von G in den reellen Zahlen existiert. H. Leptin.

Palais, Richard S.: Imbedding of compact, differentiable transformation groups in orthogonal representations. *J. Math. Mech.* **6**, 673—678 (1957).

Let M be a differentiable manifold and G a compact Lie group acting differentiably in M . It is proved that if O is an invariant open submanifold of M with compact closure, then there is an equivariant diffeomorphism of O into some euclidean space on which G acts linearly. Therefore in particular if M is compact, there is an equivariant imbedding of M into such a space (see also G. D. Mostow, this Zbl. **80**, 167) — The proof rests on the following local imbedding theorem. Let M and N be Riemannian manifolds operated on differentiably by a compact Lie group G . Let p, q be $\in M$ and $\in N$ respectively such that $G_p = G_q$. Let V_p and V_q denote the space of tangent-vectors at p and q orthogonal to the orbits through p and q . Assume that the representation of G_p in V_p be equivalent to a subrepresentation of G_q in V_q . Then there is an equivariant diffeomorphism of a tubular neighbourhood of the orbit through p into a tubular neighbourhood of the orbit through q . W. T. van Est.

Dieudonné, Jean: Lie groups and Lie hyperalgebras over a field of characteristic $p > 0$. VI. *Amer. J. Math.* **79**, 331—388 (1957).

Dieudonné, Jean: Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique $p > 0$. VII. *Math. Ann.* **134**, 114—133 (1957).

(Part V s. this Zbl. **72**, 262). — In part VI of his work on formal Lie groups the author turns to study noncommutative groups in some detail, in particular their representation by algebraic groups; this is preceded by the definition of various concepts which, although trivial for ordinary groups, are no longer so for formal Lie groups which are merely given by a group law. The principal notion is that of isogeny (cf. M. Rosenlicht, this Zbl. **73**, 376), giving a coarser (and hence more tractable) classification than isomorphism, and which may loosely be defined as follows: Two formal Lie groups G, G' (over a perfect ground field of finite charac-

teristic p) are said to be isogenous if they have the same dimension n and there is a homomorphic correspondence between G and G' which, for a suitable choice of coordinates x in G and x' in G' takes the form $x'_i = x_i^{p^{\lambda_i}}$ ($i = 1, \dots, n$) where the λ_i are integers (positive, negative or zero). The largest difference $|\lambda_i - \lambda_j|$ is called the height of the isogeny; thus an isomorphism is essentially an isogeny of height 0. If G, G' are groups of dimension n, n' respectively, a homomorphism of G into G' is called a monomorphism (epimorphism) if $n \leq n'$ ($n \geq n'$) and for a suitable choice of coordinates it takes the form $x'_i = x_i$ ($i = 1, \dots, n$) $x'_j = 0$ ($j = n+1, \dots, n'$) ($x'_i = x_i$ ($i = 1, \dots, n'$)). A subgroup of a formal Lie group G is defined (up to isomorphism) as a pair (H, f) consisting of a group H and a monomorphism f of H into G . Using a suitable definition of inner automorphism, normal subgroups may be defined; they are also characterized as the kernels of homomorphisms (or epimorphisms) and in terms of their hyperalgebra. Analogues of the isomorphism and Jordan-Hölder theorems are proved, with „isomorphism” replaced by „isogeny”, and derived groups and central series are defined. On the other hand, the fact that the subgroups of a formal Lie group form a complete lattice is only established much later, after some rather delicate considerations using the representation by algebraic groups (see below). Other difficulties occur, e. g. if N_i ($i = 1, 2$) is a normal subgroup of G with subhyperalgebra \mathfrak{N}_i , then $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$ need not be a hyperalgebra. The main lemma here states that in a group G with hyperalgebra \mathfrak{G} , with a subgroup H and a normal subgroup N whose hyperalgebras are \mathfrak{H} and \mathfrak{N} respectively, the subalgebra of \mathfrak{G} generated by $\mathfrak{H} \cup \mathfrak{N}$ is the hyperalgebra of $H \vee N$ (the least subgroup containing H and N). — After these basic considerations the author defines representations by algebraic groups. Let G be an algebraic group with connected identity-component G_0 ; the group multiplication is a rational mapping of $G_0 \times G_0$ into G_0 which leads to a group law (by introducing uniformizing parameters in the completion of the local ring of G_0 at e), and hence to a formal Lie group G^* . In particular the formal Lie group $\mathrm{GL}^*(n)$ is thus obtained, where $\mathrm{GL}(n)$ is the general linear group over the “universal domain” Ω . Any formal Lie group isogenous to a subgroup of $\mathrm{GL}^*(n)$ is said to be representable. A basic result is that for any formal Lie group G with centre Z , G/Z is representable. The algebraic hull of certain subgroups of $\mathrm{GL}^*(n)$ is then defined and it is shown that the derived group G' of a representable group G is “algebraic” in the sense that the image of G' under any isogeny into GL^* coincides with its algebraic hull; moreover, this image coincides with the derived group of the algebraic hull of the image of G . Many of the results of A. Borel (this Zbl. 70, 261) on soluble maximal subgroups, maximal tori and Cartan subgroups are also shown to hold for formal Lie groups. Defining a formal Lie group to be simple (semisimple) if it has no non-trivial (abelian) normal subgroup and is non-abelian, the author shows that simple (semisimple) formal Lie groups correspond (by isogeny) to simple (semisimple) algebraic groups. Together with certain results of Chevalley (not yet published) this shows that all simple formal Lie groups over an algebraically closed field are known up to isogeny. In particular it follows that the Witt algebras and their generalizations which are not isomorphic to Lie algebras of the Killing-Cartan list cannot correspond to formal Lie groups. — In part VII the author takes up again the study of abelian formal Lie groups, this time from the point of view of isogeny (cf. part VI). The following basic theorems are established for an algebraically closed ground field: I. Every abelian formal Lie group is isogenous to a direct product of Witt groups and simple groups (Dieudonné, this Zbl. 64, 255). II. Every simple abelian group of dimension n is isogenous to a group $G_{n,0,m}$ with m prime to n [Dieudonné, this Zbl. 64, 256; the hyperalgebra of $G_{n,0,m}$ has multiplication table $X_{h,i}^p = X_{h,i+1}$ ($i < n-1$), $X_{h,n-1}^p = X_{h-m,0} = 0$ ($X_{k,0} = 0$ for $k < 0$)]. III. The endomorphism ring of the simple group $G_{n,0,m}$ is isomorphic to an order of the division ring of rank $(m+n)^2$ over the p -adic field \mathbb{Q}_p , with centre \mathbb{Q}_p .

and invariant $n/(m+n)$ (Deuring, *Algebren*, 1937, this Zbl. **11**, 198). In paper IV of this series (this Zbl. **64**, 256) the study of abelian formal Lie groups was reduced to the consideration of certain modules over the ring E^+ of noncommutative formal power series over a ring W of Witt vectors. Once isogenous groups are identified, the modules over E^+ may be replaced by modules over A , where A is defined as E^+ except that negative powers of t are allowed. Now an A -module can be associated with each abelian formal Lie group (l. c.) such that two groups are isogenous if and only if the corresponding A -modules are A -isomorphic. To describe the A -modules, use is made of the fact that A is a Euclidean ring; moreover, when the ground field is algebraically closed, the indecomposable torsion A -modules are (with an exception corresponding to the case of unipotent groups) irreducible, and an explicit form for the irreducible elements of A may be given. The author concludes with an example of an infinite set of simple groups, all isogenous, but no two of them isomorphic.

P. M. Cohn.

Verbände. Ringe. Körper:

Valda, Dragoș: Détermination des structures modulaires par des systèmes à axiomes indépendants. Acad. Republ. popul. Romîne, Studii Cerc. mat. **8**, 457—466, russ. und französ. Zusammenfassg. 464—465 (1957) [Rumänisch].

In einer Algebra S mit zwei überall definierten Verknüpfungen \cup und \cap gelte $x \leq z$ genau, wenn wenigstens eine der folgenden Aussagen zutrifft: $x = z$, $x = x' \cap z$, $x = z \cap x'$, $z = z' \cup x$. S ist ein modularer Verband, wenn gilt (I₁) $x \cap ((x \cup y) \cup z) = x$, (I₂) $x \leq z$ impliziert $z \cap (y \cup x) = x \cup (y \cap z)$; diese Axiome sind unabhängig. Eine Algebra S mit zwei überall definierten Verknüpfungen „ \cdot “ und „ $+$ “ und einer (teilweisen) Ordnung \leq ist ein modularer Verband, wenn gilt (II₁) $x \leq y$ impliziert $zx \leq zy$ und $z + x \leq z + y$, (II₂) $xy \leq x + y$, (II₃) $x^2 = x$, (II₄) $xz = x$ impliziert $x + yz = z(y + x)$; diese Axiome sind unabhängig; ändert man in (II₄) das zweite $=$ in \leq um, so werden noch die Verbände charakterisiert.

W. Felscher.

Pierce, R. S.: A generalization of atomic boolean algebras. Pacific J. Math. **9**, 175—182 (1959).

In the present paper the author studies Boolean algebras which are α -atomic (α an infinite cardinal number) in the following sense. A partially ordered set P is α -compact if P is closed under finite meets, contains a zero element and satisfies the condition that if $M \subseteq P$ has cardinality α and no finite subset of M has meet zero, then M has a non-zero lower bound in P . A Boolean algebra B is α -atomic if B contains a dense subset which is α -compact. The author shows first that a Boolean algebra is atomic if and only if it is ∞ -atomic (i. e. α -atomic for all cardinals α). Then he demonstrates that for every α there exists an α -atomic Boolean algebra. As a special result he obtains that every α -representable (i. e. the α -homomorph of an α -field) Boolean algebra is an α -homomorph of an α -atomic α -field. Some other properties of α -atomic Boolean algebras are investigated. A typical result is the following (known for fields of sets). Let \bar{B} be an α -distributive, 2^α -complete Boolean algebra. Suppose B is an α -subalgebra of \bar{B} which is 2^α -complete. Then B is a 2^α -subalgebra of \bar{B} . The last part of the paper is devoted to the representation problem for α -atomic Boolean algebras. Let B be an α -atomic Boolean algebra. Then B is isomorphic to a dense subalgebra of the normal completion of an α -atomic α -field of sets.

Ph. Dwinger.

Pierce, R. S.: Distributivity in Boolean algebras. Pacific J. Math. **7**, 983—992 (1957).

A Boolean algebra B is λ -distributive (λ an infinite cardinal number) if the following identity holds in B , whenever S and T are index sets of cardinality $\leq \alpha$

$$\bigwedge_{\sigma \in S} (\bigvee_{\tau \in T} a_{\sigma\tau}) = \bigwedge_{\psi \in F} (\bigvee_{\sigma \in S} a_{\sigma\psi(\sigma)}),$$

where $F = T^S$. (It is assumed that the l. u. b. on the right side of the equality exists. The paper under review studies λ -distributive Boolean algebras, their Stone spaces and the lattice of continuous functions on these Stone spaces [cf. E. C. Smith and A. Tarski. Trans. Amer. math. Soc. **84**, 230—257 (1957)]. The main results are the following. 1. Let B be a 2^α -complete Boolean algebra which is α -distributive. Let I be an α -complete ideal of B . Then B/I is α -distributive if and only if I is a 2^α -complete ideal. 2. Let B be a Boolean algebra. Then B is α -distributive if and only if the lattice $C(X(B))$ of real valued, continuous functions on the Stone space $X(B)$ of B is α -distributive. 3. Let B be \aleph_0 -complete Boolean algebra. Then B is \aleph_0 -distributive if and only if every real valued, continuous function on $X(B)$ is locally constant on a dense subset of $X(B)$.
Ph. Dwinger.

Anderson, Lee W.: On the breadth and co-dimension of a topological lattice. Pacific J. Math. **9**, 327—333 (1959).

Beweis der beiden folgenden Sätze: (1) Ist L ein lokal kompakter, distributiver topologischer Verband, in dem je zwei vergleichbare Punkte in einer abgeschlossenen, zusammenhängenden Kette (total geordneten Menge) liegen, so ist die Breite von L (= kleinste natürliche Zahl n der Eigenschaft, daß jede endliche Teilmenge F von L eine Teilmenge F' von höchstens n Elementen besitzt, welche der Bedingung $\bigwedge F = \bigwedge F'$ genügt) höchstens gleich der Codimension von L . (2) Ist L ein kompakter, zusammenhängender, distributiver topologischer Verband und ist $\text{codim}(L) \leq n$, so hat das Zentrum von L höchstens $2^n - 2$ Elemente.
G. Bruns.

Cohn, P. M.: On a class of simple rings. Mathematika, London **5**, 103—117 (1958).

In the note under review, the author proves the following theorem: If R is an algebra over a field K without zero divisors or unit element, then R can be embedded in an algebra S over K in which the equation $ax - xb = c$ has a solution x for all c in S and all non-zero a, b in S . If non-zero a and b and some c are given in R , the hardest part of the proof is to find an algebra R' with the same properties as R , containing R as a subalgebra and also containing a solution x to the equation $ax - xb = c$. Using this construction and transfinite induction it is not hard to find an algebra R_1 containing R as a subalgebra such that for any non-zero a, b and any c in R there is a solution x in R_1 of the above equation. The desired S is then the union of the inductively defined chain $R \subseteq R_1 \subseteq R_2 \subseteq \dots$. The recipe for the construction of R' is as follows: Adjoin an identity to R to obtain an algebra T , form the algebra $F = T + T^2 + \dots$ where $T^{n-1} \otimes T = T^n$ and the multiplication is defined by $(y_1 \otimes \dots \otimes y_r)(z_1 \otimes \dots \otimes z_s) = y_1 \otimes \dots \otimes y_r z_1 \otimes \dots \otimes z_s$. Let x be the element $1 \otimes 1$ of F and factor F by the ideal generated by $ax - xb - c$. The subalgebra R of F maps monomorphically into this factor and the desired R' is an ideal of the factor containing R and the image of x . That R' actually has all the desired properties requires a considerable amount of complicated argument.
J. P. Jans.

Kertész, A.: Correction to my paper "Systems of equations over modules." Acta Sci. math. **19**, 251—252 (1958).

The author has stated [ibid. **18**, 207—234 (1957; this Zbl. **83**, 258), Theorem 8] that, if R is a semi-simple ring, then any compatible system of linear equations over an R -module has a general solution which is the sum of a particular solution and of a "complementary function" containing arbitrary parameters. It is pointed

out in this note that each of these parameters, in fact, has to satisfy one simple condition. M. C. R. Butler.

Kurata, Yoshiki: Some remarks on quasi-Frobenius modules. Osaka math. J. 10, 213—220 (1958).

On first giving some characterizations of quasi-Frobenius $A - B$ -modules, introduced by Azumaya [Amer. J. Math. 81, 249—278 (1959)] recently, in the case where the rings A, B satisfy minimum condition, the paper extends some properties of quasi-Frobenius rings given by Nakayama (this Zbl. 26, 58, first review), including the annihilator duality, the theorem on components of the left or right annihilator of the radical, and the “dimension” relation for Frobenius case, to such quasi-Frobenius modules over rings with minimum condition. T. Nakayama.

Gopalakrishnan, N. S., N. Ramabhadran and R. Sridharan: A note on the dimension of modules and algebras. J. Indian math. Soc., n. Ser. 21, 185—193 (1958).

It is proved first, in generalization of some results in Higman (this Zbl. 77, 42) and Eilenberg-Nakayama [Nagoya math. J. 9, 1—16 (1955)], that if Γ is a subring of a ring A and if every (A, Γ) -projective left A -module is (A, Γ) -injective too, the relative left global dimension $d(A, \Gamma)$ is 0 or ∞ . Besides some corollaries to this theorem, it is proved that if A is a K -free algebra of dimension 0, K being commutative, then $\text{l. dim}_A A = \dim_K A$ for every left A -module A (which is analogous to a result on modules of finite dimension over Frobenius algebras in Eilenberg-Nakayama, loc. cit.) and, further, $\text{gl. dim } K = \text{gl. l. dim } A$. The paper considers also the injective dimension of modules over a Frobenius algebra and thus generalizes a result on group rings in Eilenberg-Nakayama, loc. cit. T. Nakayama.

Sridharan, R.: On some algebras of infinite cohomological dimension. J. Indian math. Soc., n. Ser. 21, 179—183 (1958).

After some remarks on algebras with cohomological dimension ∞ , it is proved that if Γ is an integral domain which is also an algebra over a field K then the cohomological dimension $\dim_K \Gamma$ of Γ over K is greater than or equal to the transcendence degree over K of the quotient field of Γ . This gives for example an elementary proof to the fact that the cohomological dimension of the ring of formal power series over a field is ∞ [Eilenberg-Rosenberg-Zelinsky, Nagoya math. J. 12, 71—93 (1957)]. T. Nakayama.

Kowalski, M.: On the determinants of Wronski in linear rings. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III. 4, 789—792 (1957).

L'A. considera: (1) un anello commutativo C dotato di unità; (2) un anello commutativo lineare K , su C ; (3) un endomorfismo lineare D („derivazione“) di K ; (4) un operatore lineare A („prodotto per la variabile indipendente“) definito in K , e verificante la condizione $D(Ax) = A(Dx) + x$ ($x \in K$). Il principale risultato è il seguente. Sia $F(w)$ un polinomio sull'anello C , nella indeterminata w , decomposto

in fattori irriducibili $F(w) = c \prod_{j=1}^q f_j^{x_j}(w)$, il termine di grado massimo in f_j essendo w^{n_j} ; sia $f_j(D)x_{js} = 0$, $D^\mu x_{js} A^p (D^\nu x_{js}) = D^\nu x_{js} A^p (D^\mu x_{js})$ [$x_{js} \in K$; $j = 1, 2, \dots, q$; $s = 1, 2, \dots, n_j$; $p = 1, 2, \dots, \alpha_j - 1$; $\mu, \nu = 0, 1, \dots, n_j, \alpha_j - 1$]. Si ha allora

$$W_F = \prod_{j=1}^q [1! 2! \dots (\alpha_j - 1)!]^{n_j} \prod_{1 \leq \kappa < \mu \leq q} R_{f_\kappa f_\mu}^{x_\kappa \alpha_\kappa} \cdot \prod_{j=1}^q R_{f_j f_j}^{x_j (\alpha_j - 1)/2} \cdot \prod_{j=1}^q W_{f_j}^{\alpha_j},$$

dove W_{f_j} rappresenta il determinante „wronskiano“ degli elementi x_{js} ($s = 1, 2, \dots, n_j$), W_F rappresenta il determinante wronskiano degli elementi $A^r x_{js}$ ($j = 1, 2, \dots, q$; $r = 0, 1, \dots, \alpha_j - 1$; $s = 1, 2, \dots, n_j$), $R_{f_\kappa f_\mu}$ il risultante dei due polinomi f_κ ed f_μ , $R_{f_j f_j}$ il discriminante del polinomio f_j . Ne seguono criteri di indipendenza lineare per soluzioni della equazione $F(D)x = 0$ nella incognita $x \in K$.

F. Bertolini.

Zahlkörper. Funktionenkörper:

Popovici, Constantin P.: Critères de décomposition en facteurs premiers dans les anneaux imaginaires d'entiers quadratiques. Acad. Republ. popul. Romîne, Bul. şti., Sect. Şti. mat. fiz. 9, 5—17, russ. und französ. Zusammenfassg. 16—17 (1957) [Rumänisch].

Dans les corps quadratiques imaginaires $\mathfrak{A}(\sqrt{-p})$, d'après un résultat de l'A., la décomposition des entiers quadratiques en facteurs quadratiques indécomposables ne peut être unique que si $p = 1, 2, 3, 7, 11$ et $p \equiv 19 \pmod{24}$, où p est un entier naturel premier. Dans ce travail, l'A. cherche de trouver, pour le dernier cas, des critères efficaces pour l'unicité de la décomposition. L'on démontre, par exemple, que dans ce cas la décomposition est unique si et seulement si les expressions $x^2 + p$, avec $0 < x < \sqrt{\frac{1}{3}p}$, x étant un entier naturel, sont de la forme q ou $4q$, q étant un nombre premier.

D. Vaida.

Popovici, Constantin P.: Sur l'unicité de la décomposition en facteurs premiers dans les anneaux des entiers de Dirichlet. Acad. Republ. popul. Romîne, Studii Cerc. mat. 8, 73—101, russ. und französ. Zusammenfassg. 100—101 (1957) [Rumänisch].

On sait que tout entier d'un corps relativement quadratique de Dirichlet peut être représenté comme produit d'entiers indécomposables de Dirichlet, mais que cette décomposition n'est pas en général unique. Dans ce travail, on démontre l'existence de corps relativement quadratiques de Dirichlet, dont les entiers s'expriment d'une manière unique par des produits d'entiers indécomposables de Dirichlet; on donne aussi ces corps „pour les valeurs de δ tel que $N(\delta) \leq 100$, $N(\delta)$ étant la norme de l'entier de Gauss δ qui figure sous le radical. Pour obtenir le résultat les entiers indécomposables de Dirichlet ont été répartis en trois catégories: a) entiers de Dirichlet indécomposables qui sont des diviseurs propres des entiers premiers de Gauss, b) entiers de Dirichlet indécomposables qui sont des entiers premiers de Gauss, n'admettant pas d'entiers de Dirichlet comme diviseurs propres, c) entiers de Dirichlet indécomposables, non associés à ceux mentionnés en b), mais diviseurs propres des entiers de Gauss qui se présentent comme produits d'entiers premiers de Gauss, appartenant à la catégorie b). L'unicité de la décomposition en produit d'entiers indécomposables de Dirichlet est équivalente avec la condition que la catégorie c) soit vide. En essence, le travail est fondé sur le théorème suivant: Si la décomposition des entiers de Gauss en facteurs indécomposables de Dirichlet est unique, les entiers de Dirichlet, se décomposent d'une manière unique en facteurs indécomposables de Dirichlet et inversement.

D. Vaida.

Leopoldt, Heinrich-Wolfgang: Über Klassenzahlprimeiler reeller abelscher Zahlkörper als Primteiler verallgemeinerter Bernoullischer Zahlen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 23, H. Hasse zum 60. Geburtstag, 36—47 (1959).

Bezüglich der Berechnung der Klassenzahl eines reellen abelschen Zahlkörpers weiß man hauptsächlich deshalb wenig, weil dabei die Aufstellung eines Grundeinheitensystems sehr schwierig ist. Also beweist Verf. ohne Hilfe der tiefen Eigenschaften der Einheiten: Ist l ein nicht im Grad n aufgehender ungerader Klassenzahlprimeiler des reellen abelschen Zahlkörpers K , so ist ein gewisses Produkt $B_K(l)$ verallgemeinerter Bernoullischer Zahlen durch l teilbar. Ist insbesondere l unverzweigt in K , so läßt sich $B_K(l)$ in der Form

$$B_K(l) = \prod_{\chi \neq 1} B_{\chi}^{l-1}$$

schreiben, wobei das Produkt über alle vom Hauptcharakter verschiedenen Charaktere χ von K zu erstrecken ist. B_{χ}^m bezeichnet die vom Verf. eingeführte, zum Charakter χ gehörige Bernoullische Zahl vom Index m (H.-W. Leopoldt, dies. Zbl. 80, 30). Wenn also $\zeta_K(s)$ die Dedekindsche Zetafunktion von K ($n > 2$) und $l > 2$ ein nicht in n steckender, in K unverzweigter Klassenzahlprimeiler ist, so ist die

rationale Zahl $\pi^{-n(l-1)} \zeta_K(l-1)$ für l ganz. Dies ist eine Verallgemeinerung des Kummer'schen Satzes: Wenn die Klassenzahl des größten reellen Teilkörpers des Körpers der l -ten Einheitswurzeln durch die Primzahl l teilbar ist, so gilt dasselbe für das Produkt der Bernoullischen Zahlen B^{2t} ($1 \leq t \leq \frac{1}{2}(l-3)$). Aus diesem Ergebnis folgt z. B.: Es sei $K = P(\sqrt[p]{p})$ der reell-quadratische Zahlkörper mit der Primzahldiskriminante p und $\chi(x)$ das Legendre-Symbol $\left(\frac{x}{p}\right)$. Sind dann für die

ungeraden Primzahlen $l < \frac{1}{2} \sqrt{p} \log p$ die rationalen Zahlen B_x^{l-1} sämtlich jeweils zu l prim, so hat K die Klassenzahl eins. Z. Suetuna.

Carlitz, L.: Some arithmetic properties of generalized Bernoulli numbers. Bull. Amer. math. Soc. **65**, 68—69 (1959).

Bezüglich der von H.-W. Leopoldt eingeführten Bernoullischen Zahlen B_χ (dies. Zbl. **80**, 30) gibt Verf. einige Bemerkungen hauptsächlich für den Fall, daß der Führer des Charakters χ eine Primzahl oder eine Primzahlpotenz ist. Z. Suetuna.

Kuniyoshi, Hideo: On the cohomology groups of p -adic number fields. Proc. Japan Acad. **34**, 609—611 (1958).

Let L be a finite separable extension field over a p -adic number field K , and let \mathcal{A} and R be the rings of the p -adic integers of L and K respectively. We can consider \mathcal{A} as an algebra over R , and let A be a two-sided \mathcal{A} -module. The paper deals with the homology and cohomology groups of A over \mathcal{A} . The author proves in this case a theorem corresponding to the well known result of Eilenberg and Mac Lane concerning the cohomology groups of cyclic groups (S. Eilenberg, this Zbl. **31**, 342; See § 11). Some consequences are deduced. We have, for instance: $H^n(\mathcal{A}, A) \simeq H^{n+2}(\mathcal{A}, A)$; $H_n(\mathcal{A}, A) \simeq H_{n+2}(\mathcal{A}, A)$. The fundamental step in the proof is the construction of a suitable \mathcal{A}^e -projective resolution over \mathcal{A} (\mathcal{A}^e denotes the enveloping algebra of \mathcal{A} , of course). M. Cugiani.

Shimura, Goro: Fonctions automorphes et variétés Abéliennes. Séminaire Bourbaki 10e année, Textes des Conférences, Exposé Nr. 167, 9 p. (1958).

Every modular elliptic function is a rational function of the modulus $j(\tau)$ of the elliptic curve. A number theoretical generalization is the fact that the field of elliptic functions of level q is generated by j and the so-called „Teilwerte“ mod q of the classical \wp -function. In this note the author gives the generalization of these theorems in the case that the elliptic curve is replaced by an abelian variety of dimension $n > 1$. The moduli of the variety are defined using the theory of polarized varieties. (Cf. Matsusaka, this Zbl. **85**, 153). In the following part of the paper the specialization to Siegel's modular group is carried through. [Cf. École Normale Supérieure, Séminaire Henri Cartan: Fonctions automorphes, (10e année: 1957/58) Vol. 2, No. 18—20 (1958), and Ann. of Math. **70**, 101—144 (1959) of the same author.] Let S_n be the space of complex matrices $n \times n$ with positive non-degenerate imaginary part. Some of the results of this paper are: i) If $F(z)$ denotes the projective family of the abelian variety in the point z , there are meromorphic functions φ_j on S_n such that the Chow point of $F(z)$ is (apart from an analytic set of codimension 1) $\{1, \varphi_1(z), \dots, \varphi_\alpha(z)\}$. ii) The functions φ_j are invariant under the modular group. iii) $C(\varphi_1, \dots, \varphi_\alpha)$ is the field of Siegel's modular functions. Introducing Kummer varieties analogous results are obtained in the case of modular functions of level q . It is possible to obtain in this way an arithmetical theory of automorphic functions of several variables. F. van der Blij.

Zahlentheorie:

Brun, Viggo: Algorithmes euclidiens pour trois et quatre nombres. 13. Skand. Mat.-Kongr., Helsinki 1957, 45—64 (1958).

Seit Jacobi hat man immer wieder versucht, den Euklidischen Algorithmus auf Zahlentripel und Zahlen- n -tupel zu erweitern, jedoch hat keiner dieser Versuche

befriedigt. Sie alle versuchen den Divisionsalgorithmus zu verallgemeinern. Verf. bemerkt nun, daß im Originaltext von Euklid keine Rede von einer Division ist, sondern nur von Subtraktionen. Es seien also drei reelle Zahlen $a > b > c$ gegeben und drei ganze Zahlen X, Y, Z gesucht, deren Verhältnisse mit denen von a, b, c möglichst gut übereinstimmen sollen. Wie man bei gewöhnlichen Kettenbrüchen mit den Näherungsbrüchen $0/1$ und $1/0$ beginnt, so beginnt er hier mit den Tripeln $1:0:0, 0:1:0, 0:0:1$. Von einem System

$$a \ X', Y', Z'; \quad b \ X'', Y'', Z''; \quad c \ X''', Y''', Z'''$$

geht er beim nächsten Schritt über zu

$$a-b \ X', Y', Z'; \quad b \ X'' + X', Y'' + Y', Z'' + Z'; \quad c \ X''', Y''', Z'''.$$

Dies entspricht bei gewöhnlichen Kettenbrüchen dem Übergang zum nächsten Nebennäherungsbruch. Verf. zeigt dann, daß das Verfahren konvergiert. Dann und nur dann, wenn die drei Zahlen linear abhängig sind, wird einmal und von da ab immer eine Zahl des Tripels $c = 0$. Er führt den Algorithmus an einigen Beispielen durch und zeigt, daß er für das Tripel $\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, 1$ periodisch ist. Er überträgt den Algorithmus auf vier Größen, muß aber beim Konvergenzbeweis einen Ausnahmefall ausschließen. Einen Ansatz zu diesem Verfahren hat Verf. bereits 1919/20 [Christiania Vid. Selsk. Skrift. 1919, Nr. 6 (1919); 1920, Nr. 2 (1920)] gegeben. O.-H. Keller.

Gaiu, Em.: Congruences de matrices ayant comme éléments des nombres entiers. Gaz. Mat. Fiz., Bucureşti. Ser. A 11 (64), 334—336, russ. und französ. Zusammenfassg. 337 (1959) [Rumänisch].

L'A. définit la congruence entre deux matrices par rapport à un nombre naturel m et établit un analogue du théorème de Fermat-Euler sur les nombres entiers. Français. Zusammenfassg.

Robinson, Raphael M.: Some factorizations of numbers of the form $2^n \pm 1$. Math. Tables Aids Comput. 11, 265—268 (1957).

Verf. hat für die IBM 701 ein Programm zur Berechnung von Teilern $< 2^{35}$ einer Zahl N aufgestellt und berichtet von Anwendungen auf $N = 2^n \pm 1$. Die Primzerlegung einer beliebigen Zahl bis 2^{70} wäre zwar möglich, würde aber schon für $N \approx 2^{48}$ eine Stunde Rechenzeit benötigen. — Unter den Zahlen $< 2^{32}$ gibt es keine noch unbekannten (vgl. Selfridge, Math. Tables Aids Comput. 7, 274—275 (1953)) Teiler (Fermat-) Gaußscher Zahlen. — Die Vermutung, daß $2^p - 1$ für $p = 2^q - 1$ (p, q prim) stets Primzahl sei, wurde schon von Wheeler (vgl. Verf., dies. Zbl. 58, 175) für $q = 13$ widerlegt, aber ohne Angabe von Faktoren. Hier werden für $q = 17$ und 19 je ein Faktor angegeben. — Weitere Faktoren von Zahlen $N = 2^n \pm 1$ werden angegeben. Die Note schließt mit einer Übersicht über die bisher vollständig zerlegten N sowie über die Kenntnisse von Mersenneschen Zahlen $2^p - 1$ ($p \leq 257$). G. Beyer.

Creangă, I. et Corina Haimovici: Sur le sousgroupe des classes des restes premiers mod m qui satisfont la congruence $x^k \equiv 1 \pmod{m}$. An. şti. Univ. Al. I. Cuza Iaşi, n. Ser., Sect. I 3, 1—10, russ. und französ. Zusammenfassg. 10 (1957) [Rumänisch].

Les AA. étudient le groupe G des classes des restes par rapport au module m , premiers avec le module. Ce groupe étant un groupe fini abélien, on établit que son sous-groupe G_k , dont les éléments sont les solutions de la congruence $x^k \equiv 1 \pmod{m}$, a l'ordre $t = \prod_{i=1}^r (k, \varphi(p_i^{\alpha_i}))$, où $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ et φ est la fonction d'Euler.

En ce qui concerne les classes des restes qui contiennent des entiers y pour lesquels la congruence $x^k \equiv y \pmod{m}$ a des solutions, les AA. établissent que ces classes des restes forment un groupe isomorphe avec le facteur-groupe G/G_k . La solution x de la congruence $x^k \equiv y \pmod{m}$ est dénommée racine $k^{\text{ème}}$ de y et on propose d'écrire

$$x \equiv \sqrt[k]{y} \pmod{m}.$$

C. P. Popovici.

Schulz, Werner: Einige Bemerkungen über Differenzenschemata mod n . Math. Nachr. 19, H. L. Schmid Gedächtnisband, 129—135 (1958).

The author considers sequences S_k of n integers a_{kh} ($h = 0, 1, \dots, n-1$) satisfying $S_{k+1} = \Delta S_k$ i. e. $a_{k+1,h} = \Delta a_{kh}$ (where $a_{kh} = a_{k,n+h}$) for $k = 0, 1, \dots$. Periodicity properties mod n of such sequences are investigated. It is proved that in the case $n = p^m$ (p prime) all sequences S_k with $k \geq q$ are null sequences (with all $a_{kh} \equiv 0 \pmod{n}$); for the smallest such q one has $q \leq mp^m$. This result can be improved to $q \leq m p^m - (m-1) p^{m-1}$ as is shown for $m = 2$. In the case $n = p$ (p odd prime), $a_{00} = 0$, $a_{01} = 1$, $a_{0h} = 0, 1$ or -1 for all $h = 2, 3, \dots, n-1$, the above number q satisfies $q \geq \frac{1}{2}(p+1)$ and one has $q = \frac{1}{2}(p+1)$ if and only if the a_{0h} are equal to the Legendre symbols $\left(\frac{p}{h}\right)$. H. J. A. Duparc.

Thébault, Victor: Questions d'arithmétique. Mathesis 67, 249—257 (1958).

Une des questions traitées par l'A. donne la relation entre le nombre de chiffres à base B d'un élément u_n d'une suite récurrente et la valeur de n . Dans un autre problème il s'agit à trouver des nombres de la forme $abba$ (écrits à base B inconnue) qui sont le carré des nombres de la forme cc ou cd (avec $c \neq d$), où a, b, c satisfont encore d'autres relations données. La résolution est réduite à celle d'une équation de Pell.

H. J. A. Duparc.

Zeckendorf, E.: La valeur nulle ou négative du discriminant dans les équations quadratiques. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 27, 68—73 (1958).

L'A. considère les suites récurrentes (u_n) d'ordre 2 et les suites associées (v_n) dans les deux cas où le discriminant D du polynôme caractéristique de la suite est égal à zéro ou négatif. Pour $D = 0$ il donne les représentations bien connues de u_n et v_n . Pour D négatif il dérive des propriétés géométriques sur les points avec les coordonnées cartésiennes u_n et v_n .

H. J. A. Duparc.

Zeckendorf, E.: Équations quadratiques à discriminant carré. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 27, 128—141 (1958).

L'A. considère les suites récurrentes (u_n) d'ordre 2 et les suites associées (v_n) dans les cas très simples où le discriminant D du polynôme caractéristique $E^2 - kE + m$ de la suite est un carré. Il donne les formules élémentaires pour u_n et v_n . Ensuite il considère le cas où $-D$ est un carré. Pour $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ il emploie ses résultats pour résoudre en entiers x, y l'équation $x^2 + y^2 = 4m^n$. Comme dans une publication précédente (v. la récession ci-dessus) il donne une représentation géométrique des points (u_n, v_n) . Enfin il ajoute des problèmes du type $x^2 + Cy^2 = AB^n$ dont il donne des solutions en employant aussi des séries récurrentes proprement choisies.

H. J. A. Duparc.

Wang, Yuan: A note on the least primitive root of a prime. Science Record, n. Ser. 3, 174—179 (1959).

Verf. beweist die folgende Verschärfung eines Resultates von D. A. Burgess (dies. Zbl. 81, 271). Zu gegebenen $\delta > 0$, $A > 0$ existiert ein $P = P(\delta, A)$, so daß $\left| \sum_{n=N+1}^{N+H} \chi(n) \right| < \frac{H}{\log^A p}$ für alle $p > P$, $H > p^{1+\delta}$ und ganzzahliges N und jeden Nichthauptcharakter χ mod p . In Verbindung mit der Brunschen Methode ergibt sich hieraus für die kleinste positive primitive Wurzel $g(p)$ der Primzahl p mit einer nur von ε abhängigen O -Konstanten $g(p) = O(p^{1+\varepsilon})$. Dies verbessert das Resultat $g(p) = O(m^\varepsilon p^{1/2})$, $m = \text{Anzahl der Primteiler von } p-1$, von Erdős und Shapiro (dies. Zbl. 79, 63). Unter Annahme der erweiterten Riemannschen Vermutung folgt über Ankeny (dies. Zbl. 46, 40) hinaus $g(p) = O(m^6 \log^2 p)$.

H.-E. Richert.

Hornfeck, Bernhard: Über natürliche Zahlen, deren Primteiler in mindestens k -ter Potenz auftreten. Math. Ann. 138, 442—449 (1959).

Es sei \mathfrak{N}_k die Menge aller natürlichen Zahlen, deren Primteiler alle in mindestens der Potenz ($k \geq 1$), ganz auftreten und \mathfrak{M}_k die Menge derjenigen natürlichen Zahlen aus \mathfrak{N}_k , deren sämtliche Primteiler aus einer fest gewählten Teilmenge \mathfrak{T} der Menge aller Primzahlen stammen, wobei wir die asymptotische Beziehung

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \in \mathfrak{T}}} 1 \sim \tau \frac{x}{\log x} \quad (\tau > 0)$$

voraussetzen. Mit Hilfe der Beweisidee, die auf der Anwendung eines reellen Tauber-satzes von Hardy und Littlewood beruht, beweist Verf. u. a.: Es sei C die Eulersche Konstante,

$$B_k = \sum_{\substack{p \in \mathfrak{T} \\ p \leq 2}} \frac{1}{v(p - p^{(k-1)/k} + 1)^v} \quad \text{und} \quad S_k = \sum_{p \in \mathfrak{T}} \frac{p^{(k-1)/k} - 1}{p(p - p^{(k-1)/k} + 1)}.$$

Dann gilt

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in \mathfrak{M}_k}} 1 \sim k \frac{\exp(B_k + S_k - C\tau)}{\Gamma(\tau)} \cdot \frac{x^{1/k}}{\log x} \exp\left(\sum_{\substack{p \leq x^{1/k} \\ p \in \mathfrak{T}}} \frac{1}{p}\right).$$

Das asymptotische Ergebnis im Spezialfall $k = 1$ ist das Wirsiingsche Resultat [Arch. der Math. 7, 263—272 (1956)].

Leech, John: Note on the distribution of prime numbers. J. London math. Soc. 2, 56—58 (1957).

Sind $\pi_1(x)$ und $\pi_3(x)$ die Anzahlen der Primzahlen p von der Form $4n + 1$ und $4n + 3$ im Intervall $1 < p \leq x$, so ändert die Differenz $\pi_1(x) - \pi_3(x)$ bei wachsendem x bekanntlich unendlich oft das Vorzeichen. Verf. hat bei gewissen numerischen Untersuchungen über die Verteilung der Primzahlen gefunden, daß die Ungleichung $\pi_1(x) - \pi_3(x) > 0$ zum ersten Mal durch $x = 26861$ und dann unterhalb 3000000 nur noch durch einige Zahlen zwischen 616000 und 634000 erfüllt wird. Weiter hat er für die Anzahl $\pi_i(x)$ der Gaußschen Primzahlen $a + bi$ mit $a \geq 1$, $b \geq 0$, $a^2 + b^2 \leq x$, die bekanntlich $\sim \text{Li}(x)$ und zunächst $< \text{Li}(x)$ ist, festgestellt: $\pi_i(x) = \text{Li}(x) + 19,5$ für $x = 617537$. Zwischen den beiden Ergebnissen besteht durch die Gleichung $\pi_i(x) = 2\pi_1(x) + \pi_3(\sqrt{x}) + 1$ ein gewisser Zusammenhang. — Für $\pi(x) - \text{Li}(x)$ kann man zwar eine Schranke angeben, unterhalb welcher die Differenz einmal positiv ist, aber ein x mit positiver Differenz ist nicht bekannt. —

B. Schoeneberg.

Hawkins, David: The random sieve. Math. Mag. 31, 1—3 (1957).

The author makes several remarks on the admissibility of comparing density properties of the sequence of primes with that of other sequences of events S_n with probability $p(S_n) = 1/\log n$. Also the sequence of lucky numbers is taken into consideration and more general the random sieve. The random sieve starts from the sequence of positive integers; then the integer $P_1 = 2$ is considered and one out of every couple of numbers of this sequence is cancelled. Let P_2 be the first remaining number after P_1 . Then one out of every P_2 subsequent numbers is cancelled (the probability of a subsequent number to be cancelled be $1/P_2$); this process is continued indefinitely. The numbers which survive form the random sieve. The question has been put whether probability properties on this sieve may lead to conclusions on the density of primes. Numerical experiments on lucky numbers might justify putting such questions.

H. J. A. Duparc.

Sierpiński, W.: Sur une question concernant le nombre de diviseurs premiers d'un nombre naturel. Colloquium math. 6, dédié à C. Kuratowski, 209—210 (1958).

Elementar ergibt sich, daß zwei Nachbarzahlen n und $n + 1$ bis auf den Fall 8, 9 nur so Primzahl oder Primzahlpotenz sind, daß eine der beiden eine Mersennesche bzw. Fermatsche Primzahl ist. Demgemäß kennt man bis jetzt 24 solche Fälle, und die

Hypothese, daß es ihrer nur endlich viele gibt, ist äquivalent mit der Hypothese *n* endlich vieler Mersennescher und Fermatscher Primzahlen. *A. Aigner.*

Goormaghtigh, R.: Sur l'indicateur. *Mathesis* 68, Supplément Nos. 4—5—1—18 (1959); 68, 268—269 (1959).

Gewisse Fragen über die Eulersche φ -Funktion, schon wiederholt behandelt, neuerer Zeit besonders von Klee, [*Amer. math. Monthly* 54, 332 (1947)] werden elementar et was weiter ausgeführt. Zunächst werden alle „Ausnahmefälle“ $\varphi(2h+1) \leq \varphi(2h+2)$ oder $\varphi(2h+1) \leq \varphi(2h)$ bis zur Grenze 5000 aufgesucht. Soll eine solche ungerade Zahl $2h+1$ durch 3 und 5 nicht teilbar sein, so ist sie $> 10^{21}$. Hier auf folgen die Gleichungen $\varphi(n+2) = \varphi(n)$, $\varphi(n+2) = \varphi(n) \pm 2$. Dann wiederholt und verallgemeinert Verf. die bereits von A. Pickler [*J.-Ber. Maximilian-Gymnasium Wien* (1901)] gebrachten Untersuchungen über „verbotene Werte“ (Werte, welche die φ -Funktion nicht annimmt) und bringt auch einiges über die Anzahl der Lösungen von $\varphi(x) = 2a$ bei gegebenem a . Schließlich betrachtet Verf. Zahlen, bei denen jede größere Zahl auch einen größeren φ -Wert hat, und zeigt, daß jedes Produkt der ersten Primzahlen $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p$ von dieser Art ist. — Der Nachtrag (J. 268) verweist auf eine Arbeit von L. Moser [*Amer. math. Monthly* 56, 22—23 (1949)]. *A. Aigner.*

Schinzel, A.: Sur l'équation $\varphi(x+k) = \varphi(x)$. *Acta arithmetica* 4, 181—184 (1958).

In Erweiterung eines Ergebnisses von Sierpiński (dies. Zbl. 70, 42) beweist Verf. zwei Sätze: 1. Für jedes k existiert ein Exponent α , so daß die Gleichung $\varphi(x+k^\alpha) = \varphi(x)$ mindestens 2 Lösungen hat. — 2. Für jedes $k \leq 8 \cdot 10^{47}$ hat die Gleichung $\varphi(x+k) = \varphi(x)$ wenigstens 2 Lösungen. (Bei geradem k sogar für $k \leq 3 \cdot 10^{49}$, d. Ref.; in die hierbei benutzte Primzahlfolge gehört anstatt 449 richtig 499). — Gerade k erscheinen auch reicher an solchen Lösungen als ungerade. Unter der Annahme, daß es unendlich viele Primzahlen p gibt, so daß $2p-1$ auch Primzahl ist, gibt es sogar unendlich viele Lösungen der Titelgleichung für jede gerade k . Eine analoge Vermutung für ungerade k ist nicht berechtigt; so hat z. B. $\varphi(x) = \varphi(x+3)$ bis 10000 nur die zwei Lösungen $x=3$ und $x=5$. *A. Aigner.*

Rao, K. V. Rajeswara: On integers a_n relatively prime to $f(a_n)$. *J. London math. Soc.* 34, 145—152 (1959).

Es sei A eine stark monoton wachsende Folge, bestehend aus m n + r $0 \leq r_s < m$, $n = 1, 2, \dots$, $s = 1, \dots, t$, $m \geq t \geq 1$. $f(x)$ sei eine positive ganzzahlige Funktion, die monoton gegen $+\infty$ strebt. Für Elemente $a \in A$ bezeichne $f^*(A, k)$ die Anzahl mit $f(a) = k$, $S(A, x)$ die Anzahl der $a \leq x$, $Q(f, A, x)$ die Anzahl der $a \leq x$ mit $(a, f(a)) = 1$; $A(x)$ sei das größte $a \leq x$. Ferner sei
$$\sum_{k=2}^{f(A(x))-1} |f^*(A, k) - f^*(A, k-1)| \log k + f^*(A, f(A(x))-1) \log f(A(x)) + f^*(A, f(A(x))) = o(S(A, x)), \quad f(A(x)) \log f(A(x)) = o(S(A, x)).$$

Unter diesen Voraussetzungen zeigt Verf.

$$\frac{Q(f, A, x)}{S(A, x)} \rightarrow \prod_{p \nmid m} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \frac{1}{t} \sum_{s=1}^t \frac{\varphi(\lambda_s)}{\lambda_s}, \quad \text{wo } \lambda_s = (m, r_s).$$

Dieser Satz verallgemeinert ein Resultat von Lambek und Moser (vgl. dies. Zbl. 64, 279), wo $A = \{n\}$ ist. Andere Zahlenfolgen werden angegeben, die allen Voraussetzungen des Satzes von Lambek und Moser genügen, für die jedoch (bald) ein passendes f der fragliche Limes nicht existiert. *H.-E. Richert.*

Delange, Hubert: Sur certaines fonctions arithmétiques. *C. r. Acad. Sci., Paris* 245, 1197—1200 (1957).

In Fortführung seiner früheren Untersuchungen (dies. Zbl. 79, 67) betrachtet Verf. zwei Funktionen, $f = \omega_{E_1}$ oder $= \Omega_{E_1}$, $g = \omega_{E_2}$ oder $= \Omega_{E_2}$, wobei E_1, E_2

wisse, zueinander fremde Teilmengen der Menge aller Primzahlen mit der relativen Dichte α bzw. β sind. Mit geeigneten U, V gilt bei $x \rightarrow \infty$ gleichmäßig für $2 \leq u_0 < U, |v| \leq v_0 < V$

$$\sum_{n \leq x} w^{f(n)} v^{g(n)} = G(u, v) x (\log x)^{\alpha u + \beta v - \alpha - \beta} + O(x (\log x)^{\alpha \operatorname{Re} u + \beta \operatorname{Re} v - \alpha - \beta - 1}).$$

abei ist $G(u, v)$ eine in $u < U, |v| < V$ holomorphe Funktion. Weitere Formeln dieser Art und verschiedene Anwendungen derselben werden angegeben.

H.-E. Richert.

Gutnik, L. A.: On the arithmetic of matrices. Doklady Akad. Nauk SSSR 121, 36—789 (1958) [Russisch].

Verf. gibt einen Ergebnisbericht über Untersuchungen zur Arithmetik quadratischer nicht-singulärer Matrizen mit ganzen rationalen Elementen. Zwei Linksteiler einer Matrix heißen äquivalent, wenn sie sich nur um einen Rechtsteiler aus der unimodularen Gruppe unterscheiden. Zu vorgegebener Matrix wird die Anzahl der Äquivalenzklassen der Linksteiler (die außerdem gleich der Anzahl der Äquivalenzklassen der Rechtsteiler ist) bestimmt. Sei δ eine schiefsymmetrische Matrix in Jacobischer Normalform, p eine Primzahl und b eine natürliche Zahl, die größer ist als eine gewisse von δ und p abhängige Schranke. Verf. gibt die Ordnung der Einheitengruppe von $\delta \bmod p^b$ an. Für zwei schiefsymmetrische Matrizen π und ϱ ergibt sich ein analytischer Ausdruck für die Anzahl der Klassen von Matrizen χ mit $\pi \chi = \varrho$ in bezug auf Linksäquivalenz der χ gegenüber der Einheitengruppe von π . Ist q eine natürliche Zahl, die durch die dritte Potenz der Determinante von $\pi \varrho$ teilbar ist, so ist die Gleichung $\chi' \pi \chi = \varrho$ dann und nur dann durch eine Matrix χ mit ganzen rationalen Elementen lösbar, wenn sie $\bmod q$ lösbar ist.

K.-B. Gundlach.

Stuchlik, Franz: Beiträge zur Zahlentheorie Hermitescher Formen. II. Wiss. Z. Hochschule Schwermaschinenbau Magdeburg 3, 1—5 (1959).

[Teil I ibid. 2, 11—14 (1958)]. — Die Arbeit beschränkt sich auf binäre definite Hermitesche Formen, deren Koeffizienten ganze Gaußsche Zahlen sind. Es werden Reduktion, Endlichkeit der Klassenzahl, Automorphismen und Darstellbarkeit von ganzen Zahlen behandelt. Die Ergebnisse sind teilweise Spezialfälle allgemeiner bekannter Sätze.

N. Hofreiter.

Wild, R. E.: On the number of lattice points in $x^t + y^t = n^{t/2}$. Pacific J. Math. 9, 929—940 (1958).

Let $t = 2M/(2N + 1)$ with integers $N \geq 0, M \geq N + 1$. Let $L_t(n^{t/2})$, $n > 0$, be the number of lattice points (x, y) with $x^t + y^t \leq n^{t/2}$. The paper gives a complicated asymptotic formula for the integral

$$S(n) = \frac{t}{2n^{t/2-1}} \int_0^n L_t(w^{t/2}) w^{t/2-1} dw.$$

$S(n)$ is written as a sum of five parts involving the gamma, trigonometric, and Bessel functions and infinite series with the aid of a formula from Whittaker and Watson (p. 366) on Bessel functions. The main result is then derived with the aid of an asymptotic expansion for the general Bessel function (Whittaker and Watson, A course of modern analysis, Cambridge 1952, p. 368).

J. P. Tull.

Venkov, B. A.: Lobačevskijsche Metrik und Voronojsche Metrik in der Geometrie der Zahlen. Trudy tret'ego vsesojuzn. mat. S'ezda, Moskva, Ijuń—Ijul' 1956 3, 4—21 (1958) [Russisch].

“The aim of this report is to survey some little known work, mainly by Leningrad mathematicians, about the regular division of euclidean or noneuclidean space. The expression ‘regular division of space’ is to be understood here in the wide sense of the words, i. e., we treat of the filling of space by polyhedra which adjoin one another according to some definite law, where the covering may be multiple, i. e. the

polyhedra may overlap. Most of the configurations treated here were obtained as the result of attempts to solve different problems in the theory of numbers". (Author's introduction.) It is impossible to condense suitably this already condensed expository lecture. Most of the work seems to have been published already, but there is at least some account of two Leningrad doctoral dissertations.

J. W. S. Cassels.

Toulmin, G. H.: Subdivision of an interval by a sequence of points. *Arch. of math.* 8, 158—161 (1957).

Verf. beweist eine verschärfte Fassung eines zuerst von A. Ostrowski aufgestellten Satzes: Die Folge verschiedener Zahlen $a_1 = 0, a_2, a_3, \dots$ liegt ganz in einem Intervall $[0, 1)$. Die Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n unterteilen dieses Intervall in n Teilintervalle, von denen das größte die Länge v_n , das kleinste die Länge u_n hat. Verf. beweist nun, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n \leq 1/\log 4 = \Omega$ für alle Folgen gilt, und Ω die für alle Folgen bestmögliche Schranke ist. Es gilt auch $\lim_{n \rightarrow \infty} n v_n \geq 2\Omega$ mit 2Ω als bestmögliche Schranke. Die Folge $a_n = \{\log_2(2n-1)\}$ erreicht in beiden Abschätzungen die Schranke.

H. Hejtmánek.

Lekkerkerker, C. G.: Lattice points in unbounded point sets. I: The one-dimensional case. II: The n -dimensional case. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 61, 197—205, 206—216 (1958).

Im ersten Teil seiner Arbeit gibt Verf. kurze Beweise von vier Sätzen, die bereits von J. F. Koksma, de Bruijn und H. Kersten erhalten wurden. Diese Sätze beschränken sich auf den eindimensionalen Fall. Satz 1: Ist $f(x)$ eine nichtnegative

meßbare Funktion und $\int_0^\infty f(x) dx < \infty$, so gilt für fast alle x $F(x) = \sum_{n=1}^\infty f(nx) < \infty$.

Satz 2: Ist $f(x)$ Riemann-integrierbar in jedem endlichen Intervall und $\int_0^\infty f(x) dx = \infty$,

dann existiert ein $x > 0$ mit $F(x) = \infty$. Zu jeder Lebesgue-meßbaren Menge V aus $[0, \infty)$ lassen sich folgende Mengen bilden: W_1 aus allen $x > 0$, so daß $kx \in V$ für unendlich viele positive ganze Zahlen k gilt, W_2 mit $kx \in V$ für höchstens endlich viele k und W_3 für kein k . Satz 3: Es existiert eine Jordan-meßbare Menge V mit $\mu(V) = \infty$, so daß $\mu(W_1) = 0$ und $\mu(W_3) = \infty$. Satz 4: ρ und d sind positive Zahlen mit $\rho < 1$. Wenn V Dichte $\geq \rho$ in jedem Intervall einer Folge von punktfremden Intervallen der Länge d hat, so ist $\mu(W_2) = 0$. — Im zweiten Teil werden diese vier Sätze mit Hilfe der Theorie des Siegelschen Maßes in Gitterräumen auf den n -dimensionalen Fall übertragen und können folgendermaßen formuliert werden: Satz 1: Ist $f(x)$ eine nichtnegative Riemann-integrierbare Funktion in R_n und $\int_{R_n} f(x) dx < \infty$, dann gilt für fast alle Gitter Λ $\sum_{x \in \Lambda} f(x) < \infty$. Satz 2: Ist $\int_{R_n} f(x) dx = \infty$, dann ist die Menge der Gitter Λ mit $\sum_{x \in \Lambda} f(x) = \infty$ überdicht. Satz 3: Es existiert eine Jordan-meßbare Menge V in R_n mit $\mu(V) = \infty$, so daß fast alle Gitter nur endlich viele Punkte in V haben. Satz 4: ρ und d sind positive Zahlen mit $\rho < 1$. Wenn V Dichte $\geq \rho$ in jedem Würfel einer Folge von punktfremden Würfeln $g^{(k)} + dE$, $g^{(k)} \in R_n$, $E: 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, n$ hat, dann haben fast alle Gitter unendlich viele Punkte in V .

H. Hejtmánek.

Korobov, N. M.: Abschätzungen trigonometrischer Summen und ihre Anwendungen. *Uspechi mat. Nauk* 13, Nr. 4 (82), 185—192 (1958) [Russisch].

In Anlehnung an Methoden von Vinogradov wird eine leicht verbesserte Abschätzung der Summen $\sum_{x \leq P} e(f(x))$ (f ein Polynom) gewonnen, die zahlentheoretisch

Folgerungen erlaubt:

$$\zeta(1+it) = O(\log^{2/3}|t|), \quad \pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u} = O(x e^{-a \log^{3/5} x})$$

$$\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{12} x^2 + O(x(\log x)^{2/3+\epsilon}). \quad G. Hoheisel.$$

Pipping, Nils: Approximation zweier reellen Zahlen durch rationale Zahlen mit gemeinsamem Nenner. Acta Acad. Aboensis, Math. Phys. 21, Nr. 1, 17 p. (1957).

The author developps a method to approximate two given real numbers t_1 and t_2 by rational numbers v_n/u_n and w_n/u_n . The procedures of Jacobi and Törnquist essentially using the euclidean algorithm for finding triples u_n, v_n, w_n were ameliorated by Viggo Brun who splitted this algorithm into an algorithm on subtractions. The author again ameliorates the algorithm; from a triple u_n, v_n, w_n he finds the following which is equal either to $u_n, v_n, w_n - v_n$ or to $u_n, v_n, w_n - u_n$, the choice depending on inequality properties. It appears that this procedure yields triples which were not found by the other methods. Several examples illustrate the method.

H. J. A. Duparc.

T. Sós, Vera: On the theory of diophantine approximations. II: Inhomogeneous problems. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 9, 229—241 (1958).

(Teil I s. dies. Zbl. 80, 35.) Borel konnte den Satz von Hurwitz, daß für irrationales α $x|\alpha x - y| < 1/\sqrt{5}$ für unendlich viele Paare von Zahlen (x, y) lösbar ist, insoweit verschärfen, daß er zeigte, daß unter 3 aufeinanderfolgenden Paaren von Näherungsnennern und Näherungszählern (q, p) aus dem Kettenbruchalgorithmus sicher eines Lösung für diese Ungleichung ist. Weiter ist bekannt, daß unter zwei solchen Paaren sicher eines Lösung der Ungleichung $x|\alpha x - y| < \frac{1}{2}$ ist. Für jedes Paar gilt $x|\alpha x - y| < 1$. Die Konstanten $1, \frac{1}{2}$ und $1/\sqrt{5}$ sind bestmöglich. Durch Erhöhung der Zahl 3 kann die Schranke $1/\sqrt{5}$ nicht mehr verbessert werden. Verf. entwickelt zuerst einen kettenbruchähnlichen Algorithmus und überträgt dieses Problem auf den inhomogenen Fall. Er kann zeigen, daß für jedes Paar $x|\alpha x - \beta - y| < 2/3$ gilt und für eines unter zwei aufeinanderfolgenden Paaren $x|\alpha x - \beta - y| < \frac{1}{2}$. Zum Fall 3 ist zu sagen, daß für jede positive ganze Zahl l bewiesen wird, daß die Ungleichung $x|\alpha x - \beta - y| < c$, $c < 1/\sqrt{5}$, im allgemeinen für jedes von l aufeinanderfolgenden Paaren dieses Algorithmus nicht lösbar ist. H. Hejtmánek.

Mordell, L. J.: Integer quotients of products of factorials. J. London math. Soc. 34, 134—138. Corrigendum. Ibid. 485 (1959).

The following two theorems are proved: 1. Let p be a prime number and let a, b, c be non-negative integers such that $a \neq 0$ or p , and $b \neq p$ and $p = al + bm$, where $l > 0$, $m \geq 1$ are integers. Then there is an infinite number of integers x such that

$$(px)! / ((ax)!)^l ((bx + c)!)^m$$

is an integer. 2. If p is any integer > 1 , there is an infinite number of integers x such that $(px)! / ((x+1)!)^p$ is an integer. Besides, a very simple arithmetical proof is given for the fact that multinomial coefficients are integers. Remark of the reviewer: in two places (page 136 line 3 and page 137 line 22) $(px)!$ is printed instead of $(px)!$

A. Schinzel.

Perron, Oskar: Über einen Kettenbruch von Ramanujan. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1958, 19—23 (1959).

The author derives the value of the Ramanujan continued fraction

$$1 + b + \frac{q^2 x}{1 + qb} + \frac{q^2 x}{1 + q^2 b} + \frac{q^3 x}{1 + q^3 b} + \dots$$

namely, $(1+b)P(b, x)/P(qb, qx)$, $|q| \neq 1$, where

$$P(b, x) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{q^{2^p} x^p}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^p) (1+b)(1+qb)\dots(1+q^{p-1}b)}.$$

(Reviewer's note: This can be obtained as a limit case of the Heine continued fraction, cf. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Vol. II, p. 125, this Zbl. 77, 66. Perron, cf. p. 127, applies the same limit technique to a special case of the Ramanujan continued fraction considered above).

E. Frank.

Analysis.

• **Tranter, C. J.:** *Techniques of mathematical analysis.* (Physical Science Texts.) London: The English Universities Press Ltd. 1957. XII, 396 p. 27/6 net.

Ein ausgezeichnetes Übungsbuch für Anfänger und Schüler der ersten Semester. Über tausend Beispiele und Aufgaben sind bearbeitet, von denen ein großer Teil aus der Examenspraxis einiger englischer Lehranstalten entnommen ist. Die Beispiele und Übungsaufgaben sind gut zusammengestellt; sie sind interessant und instruktiv. Im Text findet der Leser die wichtigsten Grundtatsachen der elementaren Analysis. Die Sätze werden größtenteils ohne Beweise mitgeteilt. Das Buch ist also kein Lehrbuch, und kann nur demjenigen empfohlen werden, der einen Kurs der Analysis schon mitgemacht hat. Der Inhalt: 1. Reelle Zahlen. Fundamentale Ungleichungen. Funktionen einer reellen Veränderlichen. 2. Endliche Summen (in diesem Kapitel werden Identitäten und Methoden behandelt, mit Hilfe derer gewisse endliche Summen in geschlossener Form geschrieben werden können). 3. Unendliche Folgen und Reihen. 4. Komplexe Zahlen. 5. Die Theorie der algebraischen Gleichungen. 6. Moivre'sche Formel, trigonometrische, Exponential- und logarithmische Funktionen im komplexem Gebiet. 7. Determinanten (auch die Theorie der Gleichungssysteme). 8. Differentialrechnung. 9. Partielle Ableitung. 10. Methoden zur Ausrechnung von unbestimmten und bestimmten Integralen. 11. Geometrische Anwendungen der Differential- und Integralrechnung. 12. Differentialgleichungen.

S. Fenyő.

• **Webb, H. A. and D. G. Ashwell:** *A mathematical tool-kit for engineers.* London: Longmans, Green & Co., Ltd. 1957. VII, 70 p. 10 s. net.

Das kleine, bescheidene Bändchen will dem Ingenieur eine Hilfe sein bei der Behandlung einiger einfacher in der Ingenieurpraxis öfters auftretender mathematischer Aufgaben. Mathematische Strenge wird nicht angestrebt. Inhalt: Einige elementare Differentialgleichungen. Einige Anwendungen des Operators $D = \partial/\partial x$. Einige Methoden zur Berechnung von Integralen. Fourierreihen, Umlaufintegrale, Variationsrechnung. Besselfunktionen. Den einzelnen Abschnitten sind kleinere Übungsbeispiele beigelegt.

J. Heinhold.

• **Irving, J. and N. Mullineux:** *Mathematics in physics and engineering.* (Pure and Applied Physics. Vol. 6.) New York and London: Academic Press 1959. XVII, 883 p. \$ 11,50.

In der englischsprachigen mathematischen Literatur gibt es eine große Anzahl von Büchern, die den mathematischen Wissensstoff vermitteln, den einerseits Physiker und Techniker zu eigener wissenschaftlich fundierter Arbeit benötigen, der jedoch andererseits in den sogenannten Kursusvorlesungen über Mathematik an deutschen Technischen Hochschulen infolge Zeitmangels nicht vorgetragen werden kann. Unter diesen Büchern nimmt das vorliegende infolge seiner restlos geglückten Stoffauswahl und seiner auch dem nicht voll fachlich durchgebildeten Leser verständlichen Darstellungsweise einen hohen Rang ein. Das Hauptziel des Buches ist es, den Leser mit den wichtigsten Methoden bekannt zu machen, die er zur Lösung der in Physik und Technik anfallenden mathematischen Probleme benötigt. Zahlreiche gründlich

behandelte Beispiele aus Elastizitätstheorie, Strömungslehre, Elektromagnetismus, Wärmelehre und Wellenmechanik veranschaulichen die Anwendung der entwickelten mathematischen Methoden, sei es zur exakten oder zur näherungsweise Lösung der gestellten Probleme. Zahlreiche Aufgaben werden am Ende jedes Kapitels gestellt und am Schluß des Buches die Lösungen, mindestens aber der Lösungsweg angegeben. Auch die jedes Kapitel abschließenden Literaturhinweise sind sehr zu begrüßen; hier kann höchstens angemerkt werden, daß die angeführte englisch geschriebene Literatur die in anderen Sprachen geschriebene völlig erdrückt.

Kap. I (Einführung in partielle Differentialgleichungen) stellt die Wellengleichung, die Laplacesche Gleichung und die Diffusionsgleichung an die Spitze und bringt nach der d'Alembertschen Lösung der eindimensionalen Wellengleichung die Methode der Trennung der Veränderlichen unter Zugrundelegung verschiedener Koordinatensysteme. Etwas Charakteristikentheorie und die Riemannsche Integrationsmethode schließen das Kapitel ab. Kap. II beginnt mit der Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen durch potenzreihenähnlichen Ansatz. Es werden die üblichen in den Anwendungen auftretenden Gleichungstypen durchdiskutiert. Etwas Störungstheorie (Entwicklung der Lösung nach einem Parameter) beschließt das Kapitel. Bessel- und Kugelfunktionen werden in Kap. III näher studiert. Kap. IV beschäftigt sich mit der Laplace-Transformation und verwandten Transformationen, soweit sie sich im Reellen behandeln lassen, und ihren Anwendungen auf die Lösung von Differentialgleichungen. Eine gut fundierte Matrizentheorie mit Anwendung auf lineare Gleichungssysteme bringt Kap. V. Kap. VI ist den analytischen Methoden der klassischen (Lagrange, Hamilton) und der Wellen-Mechanik (Schrödingergleichung) gewidmet. Kap. VII bringt die Grundzüge der klassischen Variationsrechnung, das isoperimetrische Problem, die Methode von Rayleigh-Ritz und die von Trefftz mit zahlreichen Anwendungen. Kap. VIII bringt die Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen und den Begriff der konformen Abbildung. Unter dem Titel „Residuenkalkül“ vertieft Kap. XI die Theorie und führt bis zu asymptotischen Entwicklungen und der Sattelpunktmethode. Nun kann in Kap. X die Theorie der Fourier- und Laplace-Transformation sowie weiterer verwandter Transformationen weitergehend diskutiert werden als in Kap. IV. Zahlreiche Anwendungen, z. T. auch rein mathematischer Natur, z. B. auf gewisse lineare Integralgleichungen erster Art wie etwa die Abelsche. — Numerische Methoden zwecks Rechnung mit herkömmlichen Rechenmaschinen entwickelt Kap. XI. Operatoren mit finiten Differenzen werden behandelt, ferner Methoden zur numerischen Interpolation, Quadratur und Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen, einschließlich Eigenwertproblemen; lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten; Begriff der finiten Differenzen in zwei Dimensionen. — Kap. XII ist den linearen Integralgleichungen von Volterra und Fredholm und ihrem Zusammenhang mit gewöhnlichen Differentialgleichungen gewidmet, wobei auch auf numerische Lösungsmethoden eingegangen wird. Den Schluß bilden die Variationseigenschaften der Eigenwerte. — Der mathematisch weiter interessierte Leser findet in einem Anhang von 80 Seiten wertvolle Ergänzungen zu dem bisher vorgetragenen Stoff.

R. Iglisch.

Menger, K.: Is w a function of u ? Colloquium math. 6, dédié à C. Kuratowski, 41—47 (1958).

Verf. erläutert die von ihm eingeführten Begriffe der „Fluente“ und „Funktion“ und einige diesbezügliche Bezeichnungsweisen (s. K. Menger, Calculus. A modern approach. Dies. Zbl. 65, 33).

G. Aumann.

Menger, Karl: Rates of changes and derivatives. Fundamenta Math. 46, 89—102 (1958).

Den verschiedenen Auffassungen von einer „veränderlichen Größe“, wie sie in der reinen Mathematik und ihren Anwendungen bestehen, begegnet Verf. durch die

Begriffe der Funktion und Fluente (K. Menger, Calculus. A modern approach. Dies. Zbl. 65, 33). Dies führt, wie in vorliegender Arbeit näher dargelegt, zu einer unterschiedlichen Behandlung des Ableitungsbegriffes (was nach Meinung des Ref. nicht gerade nach Vereinfachung aussieht). *G. Aumann.*

Soble, A. B.: Abstract structure of inequalities. Math. Mag. 31, 179—184 (1958).

Ziemlich elementare Anwendungen der Monotonie der linear gebrochenen Abbildung auf Ungleichungen. *G. Aumann.*

Bellman, Richard: On a general method in the theory of inequalities. Revista Ci. 59, 21—33 (1958).

Eigenschaften einer Funktion $\Phi(x)$ werden untersucht mit Hilfe ihrer Darstellung als $\Phi(x) = \max_{\|y\| \leq 1} L(x, y)$, wobei die Norm $\|y\|$ jeweils noch zu definieren ist.

Insbesondere wählt Verf. in erster Linie für $L(x, y)$ eine für jedes y lineare Funktion von x ; dann ist $\Phi(x_1 + x_2) \leq \Phi(x_1) + \Phi(x_2)$. Z. B. würde Verf. u. U. ersetzen $|x|$ durch $\max_{-1 \leq y \leq 1} (x y)$. — Hölders Ungleichung wird geschrieben in der Form

$$\Phi(x) \equiv \left(\sum_{i=1}^N x_i^p \right)^{1/p} = \max_{\|y\| \leq 1} \sum_{i=1}^N x_i y_i \quad \text{mit} \quad \|y\| = \left(\sum_{i=1}^N y_i^q \right)^{1/q} \quad \text{und} \quad q = \frac{p}{p-1}.$$

Mit Hilfe dieser Darstellung der Funktion $\Phi(x)$ beweist Verf. die Ungleichung von Minkowski, sowie eine Ungleichung von Beckenbach; weiter in etwas analoger Weise solche über Matrizen von Bergström, Ostrowski und Taussky, Ky Fan. — Es folgen Andeutungen von einigen weiteren Anwendungen und Zusammenhängen: Variationsrechnung, Funktional $M(f) = \max |f|$, orthogonale Projektion.

J. Hersch.

Olkin, Ingram: On inequalities of Szegő and Bellman. Proc. nat. Acad. Sci. USA 45, 230—231. Acknowledgment of priority. Ibid. 1553 (1959).

Die Verallgemeinerung der im Titel genannten Ungleichungen lautet:

$$\left(1 - \sum_1^m (-1)^{j-1} w_j \right) f(0) + \sum_1^m (-1)^{j-1} w_j f(a_j) \geq f \left(\sum_1^m (-1)^{j-1} w_j a_j \right),$$

wobei $1 \geq w_1 \geq \dots \geq w_m \geq 0$, $a_1 \geq \dots \geq a_m \geq 0$ und f eine stetige konvexe Funktion auf $[0, a_1]$ ist. *G. Aumann.*

Olkin, Ingram: A class of integral identities with matrix argument. Duke math. J. 26, 207—213 (1959).

p sei eine natürliche Zahl, X und A seien reelle p -reihige symmetrische Matrizen, A positiv definit, k_1, \dots, k_p seien reelle Zahlen, $a_j = k_p + \dots + k_{p-j+1}$, $j = 1, \dots, p$, und es sei $a_j > \frac{1}{2}(j-1)$, $j = 1, \dots, p$. Man setze $\bar{X}^j = (x_{il})$, $1 \leq i, l \leq j$, $\bar{X}^j = (x_{il})$, $j \leq i, l \leq p$. Verf. gibt einen kurzen und eleganten Beweis für die Identität

$$\int_{X \geq 0} \left[|X|^{a_p - (p-1)/2} e^{-\text{tr} A X} \prod_{i=1}^p |\bar{X}^i|^{k_i - 1} \right] dX = \pi^{p(p-1)/4} \prod_{i=1}^p \Gamma(a_j - \frac{1}{2}(j-1)) |\bar{A}^j|^{-k_j}.$$

Dies ist eine von Bellman (dies. Zbl. 73, 278) aufgestellte Verallgemeinerung einer Identität von Siegel und Ingham. Verf. gewinnt hieraus Verallgemeinerungen einer Anzahl weiterer häufig vorkommender Integralidentitäten. *K.-B. Gundlach.*

Mengenlehre:

Szász, Pál: Über den Äquivalenzsatz der Mengenlehre. Mat. Lapok 10, 49—52. russ. und deutsche Zusammenfassg. 52 (1959) [Ungarisch].

Der bekannte Beweis von J. König für den Cantorsche Äquivalenzsatz wird in ausführlicher und anschaulicher Form ausgearbeitet. *Deutsche Zusammenfassg.*

Mostowski, A.: On a problem of W. Kinna and K. Wagner. Colloquium math. 6, dédié à C. Kuratowski, 207—208 (1958).

Betrachtet man neben der von W. Kinna und K. Wagner (dies. Zbl. 65, 284) betrachteten Eigenschaft (E) die Aussagen (K) „Jede Menge M hat die Eigenschaft (E)“ und (O) „Jede Menge läßt sich ordnen“, so haben Kinna und Wagner gezeigt, daß im Rahmen der üblichen Axiome der Mengenlehre ohne Auswahlaxiom die Gültigkeit von (O) aus der von (K) erschlossen werden kann. Mostowski zeigt hier unter Bezugnahme auf ein von ihm konstruiertes Modell der Mengenlehre (A. Mostowski, dies. Zbl. 22, 120), daß der umgekehrte Schluß nicht gilt. *G. Aumann.*

● **Cuesta Dutari, Norberto:** *Mathematik der Ordnung*. Madrid: C. Bermejo, Impressor 1958. 513 S. [Spanisch] = *Revista Acad. Ci. Madrid* 52, 147—321, 609—770 (1958); 53, 33—190 (1959) [Spanisch].

Die ersten zwei Kapitel über Mengen und ihre Mächtigkeiten, über Wohlordnung, Ordinal- und Kardinalzahlen sind vorbereitender Art. Im 3. Kapitel werden die totalen Ordnungsstrukturen untersucht, insbesondere die vom Verf. geförderte Methode der Einbettung einer totalgeordneten Menge in ein Diadikum (= Menge aller Teilmengen einer wohlgeordneten Menge), womit sich gewisse Ansätze von Hausdorff in der Theorie der gestuften Mengen besser erfassen lassen. Auch das Suslinsche Problem wird mit dieser Methode behandelt. Das 4. Kapitel betrifft die teilweise geordneten Mengen und die Verbände. Wohl wird das Dualitätsprinzip eingeführt, aber man vermißt den Begriff der Galois-Verbindung und diesbezügliche Isomorphiesätze. Des Verf. Theorie von der Darstellung teilweise geordneter Mengen unter Bezugnahme auf ein Triadikum (= Menge aller Tripartitionen einer wohlgeordneten Menge) wird ausführlich besprochen. Die vollständigen Linien in teilweise geordneten Mengen, u. a. auch jene im infinitesimal und teilweise geordneten System der Folgen reeller Zahlen, bilden den Abschluß. Wenn auch auf gewisse Anwendungen eingegangen wird, so hätte etwas weniger ordnungstheoretischer Purismus der Bedeutung dieses Buches durchaus gedient (z. B. wird die allgemeine Topologie überhaupt nicht berührt). Nach jedem der 45 Abschnitte finden sich Problemstellungen, außerdem umfangreiche Literaturangaben, die untereinander viele Wiederholungen aufweisen und die Autoren ohne Vornamen zitieren z. B. „Schmidt“ (= Jürgen Schmidt), „Neumann“ (= John v. Neumann) usw. Als einen deutlichen Mangel aber mußte es der Ref. empfinden, daß eine so umfangreiche und wichtige Monographie kein Sach- und Zeichen-Verzeichnis enthält.

G. Aumann.

Wolk, E. S.: *Dedekind completeness and a fixed-point theorem*. Canadian J. Math. 9, 400—405 (1957).

In Abweichung und Verschärfung des von Freudenthal (dies. Zbl. 14, 313, zweites Referat), M. H. Stone [Proc. Nat. Acad. Sci. USA 26, 280—283 (1940)], Bochner (dies. Zbl. 60, 272) und McShane (dies. Zbl. 46, 162 sowie Order-preserving maps and integration processes, dies. Zbl. 51, 293) benutzten Begriffs der Dedekind-vollständigen (teilweise) geordneten Menge ist hier Dedekind-Vollständigkeit dasselbe wie doppelte (nach oben und unten) Induktivität im Sinne von Bourbaki (dies. Zbl. 45, 329, *Éléments de mathématique* XX, 1. part. livre I, chap. III, Ensembles ordonnés. Cardinaux. Nombres entiers; Paris 1956) (diese Gleichwertigkeit beruht auf dem Lemma von Iwamura, siehe Maeda, *Kontinuierliche Geometrien* (dies. Zbl. 81, 26), S. 238. Verf. bettet eine „uniforme“ geordnete Menge in eine doppeltinduktive ein, nach dem genauen Muster der üblichen Dedekind-MacNeilleschen Vervollständigung einer beliebig geordneten Menge; daß man, unter Benutzung der allgemeinen Dedekind-MacNeilleschen Vervollständigung, ohne neuerliche Konstruktion, sogar jede beliebig geordnete Menge in eine „doppeltinduktive Hülle“ einbetten kann, wird nicht erwähnt. Charakterisierung der doppeltinduktiven geordneten Mengen durch die Gültigkeit eines Fixpunktsatzes für „directable“ Selbstabbildungen, nach dem Muster der von Davis (dies. Zbl. 64, 261) angegebenen Charakterisierung einer schlechthin vollständigen geordneten

Menge durch die Gültigkeit des Fixpunktsatzes für isotone Selbstabbildungen von Knaster-Kantorovitch-Tarski (Tarski, dies. Zbl. 64, 260). *Jürgen Schmidt.*

Nikodým, Otton Martin and Stanisława Nikodým: Some theorems on divisibility of infinite cardinals. Arch. der Math. 8, 96—103 (1957).

The authors prove several more or less known statements concerning ordinal and cardinal numbers, using a particular terminology fitted for field theory (cf. this Zbl. 65, 23). Initial ordinals (i. e., ordinals α satisfying $\text{card } \xi < \text{card } \alpha$ for each ordinal $\xi < \alpha$) are called distinguished ordinals; a distinguished ordinal α is said to be a divisor of a distinguished ordinal β or that β is a multiplum of α if a well-ordered set of type β (e. g., the set I_β of ordinals $< \beta$) contains a cofinal set of type α . α is called prime, provided α is regular, etc. If p, q are infinite cardinals, and if q is a multiplum of p , $p < q$, then $q \geq \aleph_{(p)}$, where $\aleph_{(p)}$ denotes the aleph $= p$ (Theor. 6); in other words: if the infinite cardinal p is cofinal with q and $q > p$, then $q \geq \aleph_{(p)}$; or for ordinals: if ω_α is cofinal with ω_β and $\omega_\beta > \omega_\alpha$, then $\omega_\beta \geq \omega_{\omega_\alpha}$.

G. Kurepa.

Popruzenko, J.: Sur la vitesse de la croissance des suites infinies d'entiers positifs. I: Echelle des vitesses. Fundamenta Math. 46, 235—242 (1959).

Soit M l'ensemble des ω -suites convergentes des entiers positifs; par conséquent si $x \in M$, alors $x = \{x_n\}$ et $\lim x_n = \infty$ ou la suite x_n est presque constante (stationnaire). Pour $x, y \in M$ on définit $x \ll y$ ou $y \gg x$ si $\lim_n \frac{y_n}{x_n} = \infty$; $x \sim y \stackrel{\text{def.}}{=} 0 < \lim_n \frac{x_n}{y_n} \leq \lim_n \frac{x_n}{y_n} < \infty$. M est quasi-ordonné. Si $c = \aleph_1$, il existe un sous-ensemble E de M jouissant de la propriété suivante: (Π). Chaque membre non-stationnaire de M est situé entre deux membres de E . Si c est régulier, les propositions (T), (U) que voici sont équivalentes (Th. III): (T): $(M_i \gg)$ contient une chaîne E de type $\omega_{(c)}^* + \omega_{(c)}$ jouissant de la propriété (Π); (U): Chaque sous-ensemble bien ordonné non-borné de $(M; \gg)$ resp. de $(M; \ll)$ est du type d'ordre $\omega_{(c)}$. On pose $c = 2^{\aleph_0} = \omega_{(c)}$.

G. Kurepa.

Bagemihl, Frederick: Some results connected with the continuum hypothesis. Z. math. Logik Grundl. Math. 5, 97—116 (1959).

Several propositions connected with the continuum hypothesis (H) are formulated and their mutual relationships and consequences examined. Here are some of such propositions: (℔) (resp. ℔). The union of $< c$ linear sets of category I (measure 0) is of category I (measure 0). ℔ (resp. ℔): There exists a linear set of power c intersecting every linear perfect nowhere dense set (resp. every linear set of measure 0) in $< c$ points. (℔): The plane R_2 contains a set A intersected by every horizontal line in a set of category I and intersected by every vertical line in a set of measure 0. (℔*) (resp. ℔*): The linear continuum R_1 is not the union of $< c$ sets of category I (resp. of measure 0). (℔) (resp. ℔): R_2 contains a set A intersected by every member of some set S of category II (set of exterior positive measure) of horizontal lines in $\leq \aleph_0$ points; moreover, every member of some non-enumerable set of vertical lines intersects $R_2 \setminus A$ in a linear set of category I (measure 0). ℔* (resp. ℔*) means ℔ (resp. ℔) restricted to the case that S is the set of all horizontal lines. $\mathfrak{R} \wedge \mathfrak{B} \Leftrightarrow \text{H}$ (Th. III. 5) $\mathfrak{R}^* \wedge \mathfrak{B}^* \Leftrightarrow \text{H}$ (Th. III. 5*). $\mathfrak{M} \wedge \mathfrak{B} \Leftrightarrow \text{H}$ (Th. III. 6). One has also III. 6*. The conjunction of ℔ and ℔ implies the existence of a permutation of R_1 the extension of which permutes the set of all linear sets of measure 0 as well as the set of all linear sets of category I (Th. XII. 2). For other statements we refer to the paper itself.

G. Kurepa.

Bagemihl, F.: Some opaque subsets of a square. Michigan math. J. 6, 99—103 (1959).

A subset S of the unit square Q is said opaque provided every straight line containing a point of Q contains a point of S . Various examples of opaque sets in Q were considered thus far [S. Mazurkiewicz, *Prace mat. fiz.* **26**, 11—16 (1916); Denjoy, *Articles et mémoires* (this Zbl. **65**, 284), Vol. I, p. 671 etc.]. The present author simplifies some of these examples and establishes some general theorems on opaque sets S with respect to the set Δ_S of mutual distances of points of S . Obviously, Δ_S contains $\{0, 1, 2^{1/2}\}$ and is contained in $J = [0, \sqrt{2}]$. Let $J^* = J \setminus \{0, 1, \sqrt{2}\}$. For every set $X \subset J$ of cardinality $< c$, there exists an opaque set S such that $\Delta_S \subset J \setminus X$ (Th. 1). The continuum hypothesis implies that for every subset X of J^* of measure zero [category 1], there exists an opaque set S such that $\Delta_S \subset J \setminus X$ (Th. 2) (resp. Th. 3). The proofs of the theorems 1—3 are carried out by transfinite induction.

G. Kurepa.

Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:

Bertolini, Fernando: Le funzioni additive nella teoria algebrica della misura. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. **12**, 155—162 (1958).

Ist \mathfrak{B} ein distributiver, relativ komplementärer Verband mit Nullelement 0 (Bezeichnungen wie in *Hermes*, Verbandstheorie, dies. Zbl. **64**, 29), X das System aller Ultrafilter x in \mathfrak{B} , $A = \pi(V)$ für $V \in \mathfrak{B}$ die Menge aller $x \in X$ mit $V \in x$, so ist bekanntlich der Mengenring $\mathfrak{A} = \pi(\mathfrak{B})$ isomorph zu \mathfrak{B} , wobei die Operationen $\cap, \sqcup, -$ sowie \leq und 0 von \mathfrak{B} übergehen in $\cap, \cup, -, \subset$ und \emptyset (\cap, \sqcup nur für endlich viele Elemente). Es wird gezeigt, daß für jede Folge A_1, A_2, \dots von Mengen $\in \mathfrak{A}$, die alle nicht leer und paarweise fremd sind, stets $\bigcup_{v=1}^{\infty} A_v \notin \mathfrak{A}$ gilt (auch falls

$\bigcup_{v=1}^{\infty} \pi^{-1}(A_v) \in \mathfrak{B}$ sein sollte). Daraus folgt sofort: Jede additive Mengenfunktion $\mu \geq 0$ auf \mathfrak{A} (oder \mathfrak{B}) ist trivialerweise σ -additiv auf \mathfrak{A} , kann also zu einem σ -additiven Maß $\bar{\mu}$ auf dem von \mathfrak{A} erzeugten σ -Ring \mathfrak{B} erweitert werden. μ ist genau dann auf \mathfrak{B} σ -additiv (bezüglich \sqcup), falls für jede derartige Erweiterung $\bar{\mu}$ und alle Folgen paarweise fremder $V_v \in \mathfrak{B}$ mit $\bigcup_{v=1}^{\infty} V_v \in \mathfrak{B}$ gilt $\mu\left(\pi\left(\bigcup_{v=1}^{\infty} V_v\right) - \bigcup_{v=1}^{\infty} \pi(V_v)\right) = 0$.

[Im allgemeinen ist ein additives $\mu \geq 0$ auf \mathfrak{B} nur σ -superadditiv wegen $\bigcup_{v=1}^{\infty} \pi(V_v) \subset$

$\pi\left(\bigcup_{v=1}^{\infty} V_v\right)$.] Es wird angekündigt, daß sich damit Sätze der Maßtheorie (z. B. der Satz von Radon-Nikodym) auf endlich-additive Mengen-(bzw. Somen-)funktionen übertragen lassen.

H. Ginzler.

Zaanan, A. C.: A note on measure theory. Nieuw Arch. Wiskunde, III. Ser. **6**, 58—65 (1958).

Elementary remarks on the pathology of "abstract" measures, and in particular the fact that μE may fail to be equal to $\sup \mu F$ when F runs through the measurable subsets of the measurable set E , and F has finite measure; of course this never happens for Radon measures. The examples and methods of proof are of standard type in that theory.

J. Dieudonné.

Bauer, Heinz: Konservative Abbildungen lokal-kompakter Räume. Math. Ann. **138**, 398—427 (1959).

Im folgenden werde die Terminologie von N. Bourbaki, *Éléments de mathématiques*, angewandt. — Es seien X und Y zwei lokal-kompakte Räume und φ eine stetige Abbildung von X in Y . Unter einem Maß wird durchwegs ein positives Radonsches Maß verstanden. Die Abbildung φ heiße konservativ, wenn jedes auf $\varphi(X)$ konzentrierte Maß ν auf Y φ -darstellbar ist, d. h. wenn zu ν ein Maß μ auf X sich finden läßt mit der Eigenschaft, daß für jede stetige numerische Funktion f

auf Y mit kompaktem Träger die Gleichung $\int f dv = \int f \cdot q d\mu$ besteht; in diesem Fall schreibt man $v = \varphi(\mu)$. Ein Maß v auf Y ist dann und nur dann φ -darstellbar, wenn v auf $\varphi(X)$ konzentriert ist und außerdem jeder Punkt $y \in \varphi(X)$ eine offene Umgebung $V \subset Y$ besitzt, für welche das durch v in V induzierte Maß φ'_V -darstellbar ist, wo φ'_V diejenige Abbildung von $\varphi^{-1}(V)$ in V bezeichnet, welche auf V mit φ übereinstimmt. Jede lokal-eigentliche stetige Abbildung ist konservativ; dabei heißt φ lokal-eigentlich, wenn jeder Punkt $y \in \varphi(X)$ eine kompakte Umgebung $V \subset Y$ mit kompaktem Urbild $\varphi^{-1}(V)$ besitzt; ferner heißt φ eigentlich, wenn das Urbild $\varphi^{-1}(K)$ jeder kompakten Menge $K \subset Y$ kompakt ist. Ist φ eine beliebige stetige Abbildung von X in Y , so existiert ein Raum \tilde{X} mit folgenden Eigenschaften: a) \tilde{X} ist lokal-kompakt, b) X ist ein dichter Unterraum von \tilde{X} , c) φ ist zu einer Abbildung $\tilde{\varphi}$ von \tilde{X} in Y fortsetzbar, d) $\tilde{\varphi}$ ist eigentlich, e) für $x, x' \in \tilde{X} - X$, $x \neq x'$, gilt $\tilde{\varphi}(x) \neq \tilde{\varphi}(x')$. Der Raum \tilde{X} ist durch die Eigenschaften a) bis e) bis auf die Punkte von X festlassende Homöomorphismen eindeutig bestimmt. Das Bildmaß $\varphi(\mu)$ existiert für genau diejenigen Maße μ , welche durch ein Maß $\tilde{\mu}$ auf \tilde{X} induziert werden können. Ist das Urbild $\varphi^{-1}(M)$ einer Menge $M \subset \varphi(X)$ durch abzählbar viele kompakte Mengen überdeckbar, so ist jedes von M getragene Maß auf Y φ -darstellbar. Besitzt jeder Punkt $y \in \varphi(X)$ eine offene Umgebung $V \subset Y$, deren Urbild $\varphi^{-1}(V)$ im Unendlichen abzählbar ist, so ist φ konservativ; dasselbe gilt, wenn jeder Punkt $y \in \varphi(X)$ eine solche Umgebung $V \subset Y$ besitzt, auf welcher eine stetige Abbildung σ_V von V in X sich definieren läßt, so daß $\varphi \circ \sigma_V$ die identische Abbildung von V auf sich selbst darstellt. Gilt $\varphi(X) = Y$ und ist ψ eine stetige Abbildung von Y in einen lokal-kompakten Raum Z , so ist $\psi \circ \varphi$ konservativ, sobald φ und ψ konservativ sind; umgekehrt ist ψ konservativ, wenn $\psi \circ \varphi$ konservativ ist. Schließlich wird der Begriff einer konservativen Basis eingeführt und untersucht, ferner eine Anwendung in der Theorie des Flächenmaßes geschildert. *Á. Császár.*

Taylor, S. J.: On strengthening the Lebesgue density theorem. *Fundamenta Math.* 46, 305—315 (1959).

Für die Lebesgue-meßbaren Mengen E auf der Geraden G gilt bekanntlich der Dichtesatz: Es seien CE das Komplement von E (auf G) und I ein abgeschlossenes Intervall auf G , ferner $|E|$ bzw. $|I|$ usw. das Lebesguesche Maß von E bzw. I usw.; dann gilt $\lim_{x \in I; |I| \rightarrow 0} |I \cap CE|/|I| = 0$ für alle $x \in E - E'$, wobei $|E'| = 0$. —

Verf. zeigt: (1a) Sind E und E' wie oben erklärt, so gibt es zu E eine „Maßfunktion“ 1. Klasse φ , für welche $\varphi - m^*(E') = 0$. Dabei heißt φ von 1. Klasse, wenn $\varphi(x)$ für $x > 0$ erklärt, reell und stetig sowie, ebenso wie $x/\varphi(x)$, wachsend ist derart, daß $\varphi(x) \rightarrow 0$ und $\varphi(x)/x \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow 0+$; ferner wird mit $\varphi - m^*(M)$ für eine Menge $M \subset G$ das äußere Hausdorffmaß von M bezüglich φ bezeichnet. (1b) Hingegen gibt es kein φ , welches die in (1a) angegebene Eigenschaft universell, d. h. für jedes E , besitzt. (2a) Zu jedem Lebesgue-meßbaren $E \subset G$ existiert eine für $x > 0$ erklärte, reelle, stetige, wachsende Funktion ψ mit $\psi(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0+$ derart, daß $\limsup_{x \in I; |I| \rightarrow 0} |I \cap CE|/|I| \psi(|I|) = 0$ für alle $x \in E - E''$, wobei

$|E''| = 0$. (2b) Hingegen gibt es kein universelles ψ von der in (2a) angegebenen Eigenschaft. Genauer: Vorgegeben sei eine für $0 < x \leq 1$ erklärte, reelle wachsende Funktion ψ mit $\psi(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0+$, sowie ein reelles α mit $0 < \alpha < 1$. Dann gibt es eine perfekte Teilmenge E von $[0, 1]$ mit $|E| = \alpha$ und mit $\limsup_{x \in I; |I| \rightarrow 0} |I \cap CE|/|I| \psi(|I|) = +\infty$ für jedes $x \in E$. Der Beweis für (1a)

stützt sich auf die Bemerkung, daß es kein M mit $|M| = 0$ gibt, so daß $\varphi - m^*(M) > 0$ für jedes φ der Klasse 1; diese Bemerkung ist auch an sich von Interesse im Hinblick darauf, daß $|M| = 0$ aus $\varphi - m^*(M) < +\infty$ folgt. Die Sätze (1b), (2b) erweisen den Lebesgueschen Dichtesatz als ein in gewissem Sinne bestmög-

ches Resultat. — Verf. beweist schließlich entsprechende Sätze im n -dimensionalen euklidischen Raum. Otto Haupt.

Godefroid, Michel: Calcul d'une intégrale double par deux intégrations simples successives. (Intégrale de Riemann.) Enseignement math., II. Sér. 5, 58—60 (1959).

L'A. donne une démonstration élégante et rapide du théorème suivant: Soit, (x, y) une fonction bornée intégrable au sens de Riemann dans le carré C de centre O le côtés parallèles aux axes et de longueur $2a$. Pour toute fonction $F(x)$ satisfaisant sur $[-a, a]$ aux conditions

$$(1) \quad \int_{-a}^a f(x, y) dy \leq F(x) \leq \int_{-a}^a f(x, y) dy$$

où \int et \int sont les intégrales inférieure et supérieure au sens de Darboux, l'intégrale riemannienne de $F(x)$ par rapport à x sur $[-a, a]$ existe et on a

$$(2) \quad \int_{-a}^a F(x) dx = \iint_C f(x, y) dx dy.$$

Remarques du rapporteur: La démonstration repose sur certaines inégalités établies par Jordan (Cours d'Analyse, vol. I, Paris 1893, p. 41). Un théorème plus général que celui de l'A. se trouve dans Miron Nicolescu; Analiza matematică, vol. II, București 1953, p. 291—292. La condition (1) n'est pas nécessaire pour qu'on ait (2). La remarque finale de l'article est contenue dans: W. Sierpinski, Fundamenta Math. 1, 142—147 (1920). S. Marcus.

Nevanlinna, F. und R. Nevanlinna: Über die Integration eines Tensorfeldes. Acta math. 98, 151—170 (1957).

Verff. geben eine exakte Definition eines (affinen) Integrals einer Funktion $A(x)$, die in einem n -dimensionalen Simplex S^p definiert ist, deren Werte in einem n -dimensionalen euklidischen Raum R^n liegen, und die eine alternierende Funktion ist. Anders gesagt: A ist eine äußere Form n -ten Grades, die in S^p definiert ist. Es wird ein strenger Beweis durchgeführt, daß, falls $A(x)$ im abgeschlossenen S^p stetig ist, das Integral $\int_{S^p} A dx_1 \cdots dx_p$ existiert. Es wird nachher unter möglichst

schwachen Regularitätsannahmen über A der Satz von Stokes formuliert und sein Beweis angegeben (wo der Integrationsbereich wiederum ein Simplex ist). Weiter betrachten Verff. den Operator $\text{rot } A(x)$ und untersuchen für $\text{rot } A(x_0)$ die sogenannte Grenzformel. Ferner befassen sich Verff. mit der Lösung der Gleichung $\text{rot } Y(x) = A(x)$, wo A gegeben und Y gesucht ist. Im Zusatz werden eine Verschärfung des Poincaréschen Lemmas und ein Mittelwertsatz angegeben. Zwar bringt diese Arbeit sachlich nicht viel neues, ihr Wert liegt aber darin, daß die klassischen Begriffe (die schon von Grassmann und Cartan stammen) klar präzisiert und die entsprechenden Sätze unter geringen Regularitätsvoraussetzungen streng bewiesen werden. Es sei auch hervorgehoben, daß vom Standpunkte der rechnerischen Technik die Verff. sich konsequent ihrer eigenen (schon in einigen früheren Arbeiten verwendeten) Methode einer koordinatenfreien Symbolik bedienen. S. Golab.

Bognár, Mátyás: Bemerkungen zu einer Rede, die Friedrich Riesz bei Übernahme des Rektorats in Szeged gehalten hatte. Mat. Lapok 9, 232—258, russ. und deutsche Zusammenfassg. 258—259 (1959) [Ungarisch].

In der im Titel erwähnten Rede folgerte F. Riesz aus der Tatsache, daß die Begrenzung der Vereinigung endlich vieler, aus einem gewissen System genommenen Kreisscheiben von gleichem Radius ρ immer eine Länge $\leq z$ besitzt, auf die Ungleichung $L \leq z$, wo L die Länge der Begrenzung der Vereinigung aller Kreisscheiben des Systems bedeutet. Zu diesem Zweck benutzte er folgendes Prinzip: Ist eine Kurve C Häufungskurve anderer Kurven von der Länge $\leq z$, so besitzt C selbst eine

Länge $\leq z$. Verf. zeigt an einem Beispiel, daß dieses Prinzip im allgemeinen nicht zutrifft. Der Gedankengang von F. Riesz läßt sich aber retten, wenn man folgenden Satz anwendet: Es sei $\{N_\alpha\}$ ein System von Teilmengen der Ebene, jede Komponente einer jeden Menge N_α habe einen Durchmesser $\geq w > 0$, und für endlich viele Mengen $N_{\alpha_1}, \dots, N_{\alpha_r}$ gelte immer die Ungleichung $L^*\left(N\left(\bigcup_1^r B_{\alpha_i}\right)\right) \leq z$, wo $B(X)$ die Begrenzung von X , $L^*(Y)$ das äußere Carathéodorysche lineare Maß von Y bedeutet. Dann gilt auch $L^*\left(B\left(\bigcup_\alpha N_\alpha\right)\right) \leq z$. Der Beweis dieses Satzes ist allerdings ziemlich lang und kompliziert. A. Császár.

Demers, Maurice R. und Herbert Federer: On Lebesgue area. II. Trans. Amer. math. Soc. **90**, 499—522 (1959).

The present paper is concerned with continuous maps $f: X \rightarrow E_n$ from a k -dimensional finitely triangulable space X into an Euclidean space E_n , $k \leq n$. The hypothesis, used in a previous paper (H. Federer, this Zbl. **65**, 40) that X is imbedded in a manifold is removed. For $k = n$ a new multiplicity function $M(f, X, y)$, $y \in E_k$ is introduced, and the identity $(*)$ $L_k(f, X) = (E_k) \int M(f, X, y) d\Omega_k y$ is proved where $d\Omega_k y$ denotes L -integration in E_k . The multiplicity function M is \geq the "stable multiplicity function" S used in (I), and an example is given which shows that $(*)$ may not hold for M replaced by S and X not imbeddable in a manifold. The authors define first the "norm" $|\lambda|$ of any k -dimensional integral Čech relative cohomology class $\lambda \in H^k(X, A)$ of a compact Hausdorff pair (X, A) . Then, for $f: X \rightarrow E_k$, $y \in E_k$, X as above, U open set of E_k with compact closure, $y \in U$, Y compact, $f(X) \cup U \subset Y \subset E_k$, the map $f: f^{-1}(Y - U) \rightarrow Y - U$ induces a homomorphism $f^*: H^k(Y, Y - U) \rightarrow H^k(X, f^{-1}(Y - U))$, and $M(f, y)$ is defined as the supremum for all U of $|f^*(\eta)|$ where η is a generator of $H^k(Y, Y - U)$. — For $n > k$ let $\xi = (i_1, \dots, i_k)$ denote any set of k integers $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, let E_k^ξ the subspace $z = (y_{i_1}, \dots, y_{i_k})$ where E_n is the space $y = (y_1, \dots, y_n)$, and let P_k^ξ the projection of E_n onto E_k^ξ . Then the inequality $L_k(f, X) \leq \sum_\xi L_k(P_k^\xi \circ f, X)$ is proved in two situations (1) $k = 2$, $n > 2$; (2) $2 < k < n$, $\mathfrak{S}_n^{k+1}(f(X)) = 0$, where \mathfrak{S} denotes Hausdorff measure, as in (I). L. Cesari.

Fast, G.: Der Flächeninhalt des Parallelkörpers als Funktion seines Radius. I, II Fundamenta Math. **46**, 137—146, 147—163 (1959) [Russisch].

Let M be a set in Euclidean plane, $d(p, q)$ the distance of p and q , $M_r = \{p | d(p, M) \leq r, r > 0\}$, the circle around M , F_M the boundary of M , $s F_M$ the linear measure of F_M (the length of F_M), $m S$ the two-dimensional measure of S (the area of S). H. Minkowski has proved that a function $\varphi_M(r) = m M_r - r^2 \pi$ is linear in the case of a convex set M . In the first part the author proves that $\varphi_M(r)$ is concave for every continuum M . In the second paper properties of $\varphi_M(r)$ to be linear and strictly concave are discussed. A number $P(M) \geq 0$ is defined and it is proved that for a simply connected continuum M for which $0 < P(M) \leq \infty$ the function $\varphi_M(r)$ is linear in $(0, P(M))$ and strictly concave in $(P(M), \infty)$. If $\varphi_M(r)$ is linear in $(0, \infty)$ for a continuum M , then M is a convex set. For every continuum M $\varphi_M(r)$ asymptotically behaves as a linear function $\varphi_{\tilde{M}}(r)$, where \tilde{M} is a convex hull of M . S. Kurepa.

Boboc, Nicu et Solomon Marcus: Sur la détermination d'une fonction par les valeurs prises sur un certain ensemble. Ann. sci. École. norm. sup., III. Sér. **76**, 151—155 (1959).

Soit \mathfrak{C} une classe de fonctions réelles définies sur $I = (0, 1)$. Les A.A. appellent un ensemble $E \subset I$ déterminant pour la classe \mathfrak{C} , si $f, g \in \mathfrak{C}$, $f|E = g|E$ impliquent $f = g$; ils l'appellent stationnaire pour \mathfrak{C} si $f \in \mathfrak{C}$, $f|E = c$ entraînent $f = c$ (quelle que soit la constante c). Ils démontrent que si \mathfrak{C} est la classe des fonc-

ions dérivées bornées, les ensembles déterminants, de même que ceux stationnaires, coïncident avec les ensembles $E \subset I$ de mesure extérieure 1; si \mathfrak{C} désigne la classe des fonctions à propriété de Darboux, le seul ensemble déterminant est I , tandis que les ensembles stationnaires sont les ensembles $E \subset I$ tels que $I - E$ est de puissance inférieure à celle du continu (donc dénombrable, en admettant l'hypothèse du continu).
A. Császár.

Allgemeine Reihenlehre:

Orlicz, W.: Funktionalanalysis und allgemeine Theorie der linearen Transformationen. Centre Belge Rech. math., Colloque sur la Théorie des Suites, Bruxelles du 18 au 20 déc. 1957, 121—147 (1958).

A report on some applications of functional-analytic ideas to the theory of summability. The author presents (without proofs) some properties of the B_0 -spaces and the Saks spaces which enable him to sketch the proof of the bounded consistency theorem and the general consistency theorem for matrix methods of summability. There is given a simple proof due to Mazur of Kuttner's theorem stating that the (C, α) absolute summability ($0 < \alpha < 1$) is not equivalent to any matrix method of summability. Some theorems on structure of fields of methods of summability are given. The paper ends with exposition of an interesting classification of methods of summability, due to Mazur.
A. Alexiewicz.

Tolba, S. E.: On the efficiency of T -matrices for bounded sequences and the Cooke-Barnett condition. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 62, 265—274 (1959).

By the „Cooke-Barnett condition” the author means the condition contained in the following result. Let $\{z_n\}$ be a bounded sequence with a finite number N of distinct limit points; a sufficient condition that $\{z_n\}$ should be summable by a regular T -matrix A is that A should be efficient for M particular sequences of 0's and 1's suitably constructed from the sequence $\{z_n\}$, where $M = N$ if $\{z_n\}$ is real, and $M = 2N$ if $\{z_n\}$ is complex [see the reviewer's Infinite matrices and sequence spaces (this Zbl. 40, 25), pp. 201—202]. The following notation is employed. \mathfrak{S}_N denotes the set of all bounded sequences (real or complex), each of which has N , and only N , distinct limit points. \mathfrak{S}_N^* denotes the aggregate of the sets $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots, \mathfrak{S}_N$. \mathfrak{S} denotes the set of all bounded divergent sequences (real or complex) with any finite number of distinct limit points. $\mathfrak{S} - \mathfrak{S}_N$ denotes the set of all sequences of \mathfrak{S} after removing all those of \mathfrak{S}_N . $\mathfrak{S}_N(A)$, $\mathfrak{S}_N^*(A)$, $\mathfrak{S}(A)$ denote the subsets of \mathfrak{S}_N , \mathfrak{S}_N^* , \mathfrak{S} respectively, which are in the convergence field of the matrix A . The following results are proved. [2, I]. Given a fixed number σ and a sequence $\{z_k\}$ of \mathfrak{S}_N , where N is a given integer > 2 , there exists a T -matrix which sums $\{z_k\}$ to σ , but which is inefficient for all sequences of \mathfrak{S}_{N-1}^* . [2, II] (Extension of the „Cooke-Barnett” theorem). Let $\{z_k\}$ be a sequence of \mathfrak{S}_N ; a sufficient condition that $\{z_k\}$ should be summable by a T -matrix A is that A should be efficient for $N - 1$ particular sequences of 0's and 1's suitably constructed from $\{z_k\}$. If $N = 2$, the condition is necessary; if $N > 2$, the condition is not necessary. Corollary. Let $\{z_k\}$ be a sequence of \mathfrak{S}_3 having its distinct limit points represented in the complex plane by non-collinear points. A necessary and sufficient condition that $\{z_k\}$ should be summable by a real T -matrix A is that A should be efficient for two particular sequences of 0's and 1's suitably constructed from $\{z_k\}$. [3, I]. Given an integer $N > 2$ and a complex constant σ , there exists a T -matrix A which is inefficient for all sequences of \mathfrak{S}_{N-1}^* , and which has the property that if M is any integer $\geq N$, then at least one sequence of \mathfrak{S}_M is summable- A to σ . [3, II]. Given an integer $N > 3$, there exists a T -matrix which is inefficient for all sequences of \mathfrak{S}_{N-1}^* and for all sequences of \mathfrak{S}_{N+2} , \mathfrak{S}_{N+3} , \dots , \mathfrak{S}_{2N-2} , but in the convergence field of which there is at least one sequence of each of \mathfrak{S}_N , \mathfrak{S}_{N+1} , and \mathfrak{S}_{2N-1} . [3, III]. If a T -matrix is efficient for one sequence of \mathfrak{S}_N , where N is a given

integer ≥ 2 , then A is also efficient for an infinite number of sequences of \mathfrak{S}_N . Corollary. If a sequence of \mathfrak{S}_N is summable- A and y is a given number, then there is an infinite number of sequences of \mathfrak{S}_N which are summable- A to y . In connexion with this paper, it may be mentioned that R. Henstock (this Zbl. 35, 160) has extended the "Cooke-Barnett" result to the cases where $\{z_k\}$ has an enumerable infinity, or a continuum infinity, of limit points [see also the reviewer's book mentioned above, pp. 201—204].

R. G. Cooke.

Meyer-König, W. und K. Zeller: Funktionalanalytische Behandlung des Taylor-schen Summierungsverfahrens. Centre Belge Rech. math., Colloque sur la Théorie des Suites, Bruxelles du 18 au 20 déc. 1957, 32—53 (1958).

The authors investigate Taylor's methods of summability T_α by means of functional analysis. The method T_α transforms a series $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ into the series

$\sum_{m=0}^{\infty} v_m$ where v_m is given by the formula $v_m = (1-\alpha)^m \sum_{k=m}^{\infty} \binom{k}{m} \alpha^{k-m} u_k$ ($m=0, 1, 2, \dots$). The authors are concerned with the case $0 < \alpha < 1$ when these methods are permanent and non-trivial. A series $\sum u_k$ summable by the method T_α is

said to be regularly summable by this method if in addition the power series $\sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k$

is regular for $z = \alpha$. The field of a method T_α (the set of series summable by this method) is a linear metric space of the type B_0 (Mazur-Orlicz space). There is no matrix method with finite rows equivalent to a method T_α for any α (within the interval $0 < \alpha < 1$). The proof given by means of functional analysis is very elegant. Any regularly summable series belongs to the perfect part of the field of the method. If a series $\sum u_k$ is regularly summable by the method T_α for $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ and $u_k = 0$ for $k \neq k_l$, where k_l is a sequence of integers satisfying the condition $k_{l+1} - k_l > \theta \sqrt{k_l}$ ($\theta > 0$), then the series $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ is convergent. At

the end the authors are concerned with the problem of the left- and right-translating of the methods T_α .

L. Włodarski.

Vučković, Vladeta: Eine neue Klasse von Polynomen und ihre Anwendung in der Theorie der Limitierungsverfahren. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 12, 125—136 (1958).

The author gives the definition of a two-parameter matrix methods family $K_{\alpha, \beta}$ ($\alpha > -1$, $\beta > 0$). The methods in question transform a sequence $x = \{\xi_n\}$ as follows

$$K_{\alpha, \beta}(n, x) = \frac{1}{(\beta + \alpha)(\beta + \alpha + 1) \cdots (\beta + \alpha + n - 1)} \sum_{\nu=0}^n \sigma_\nu^n(\alpha) \beta^\nu \xi_\nu \quad (n \rightarrow \infty)$$

where $\sigma_\nu^n(\alpha)$ are defined by the identity

$$(\beta + \alpha)(\beta + \alpha + 1) \cdots (\beta + \alpha + n - 1) \equiv \sigma_0^n(\alpha) + \sigma_1^n(\alpha) \beta + \cdots + \sigma_n^n(\alpha) \beta^n.$$

The author is concerned with an one-parameter family $K_{\alpha, 1}$ with $\alpha > -1$. These methods are regular (permanent). The fields of these methods increase when the parameter α increases, i. e. a method $K_{\alpha, 1}$ is more general than a method $K_{\gamma, 1}$ and consistent with it if $\alpha > \gamma$. The method $K_{\alpha, 1}$, similarly as the classical method of Borel, limitates a geometrical sequence $\{a^n\}$ in the semi-plane $\operatorname{Re} a > 1$. If a sequence $x = \{\xi_n\}$ is limitable by a method $K_{\alpha, 1}$, then $\xi_n = O[n! n^\alpha / (\log 2)^n]$. The author also announces the following theorem for the one-parameter family $K_{0, \beta}$. If $0 < \beta < \gamma$, then the method $K_{0, \beta}$ is more general than the method $K_{0, \gamma}$. The method $K_{0, 1}$ is known as method of Lotocki which has been investigated by Lotocki and Agnew (see this Zbl. 82, 277).

L. Włodarski.

Rajagopal, C. T.: On the Riemann-Cesàro summability of series and integrals. *Tohoku math. J., II. Ser.* 9, 247—263 (1957).

Let us denote

$$\sigma_{\alpha}(u) = \frac{1}{u^{\alpha}} \int_0^u (u-x)^{\alpha} a(x) dx \quad (\alpha > -1).$$

As we know, $(C, \alpha)\text{-}\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u a(x) dx = l$ means that $\lim_{u \rightarrow \infty} \sigma_{\alpha}(u) = l$. On the other

hand the (R, p, α) -summability is defined as follows: $(R, p, \alpha)\text{-}\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u a(x) dx = l$ means that $\lim_{t \rightarrow 0+} \varrho(p, \alpha, t) = l$, where

$$\varrho(p, \alpha, t) = t^{\alpha+1} \left(\int_0^{\infty} u^{\alpha-p} \sin^p u du \right)^{-1} \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin tu}{tu} \right)^p u^{\alpha} \sigma_{\alpha}(u) du.$$

The following theorem is the main result of the paper: If (i) $\alpha + 1 \geq 0$,

(ii) $(C, \alpha + 2)\text{-}\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^{\mu} a(x) dx = l$, (iii a) $\int_0^{\mu} |\sigma_{\alpha}(x)| dx = O(u)$ or (iii b) $\sigma_{\alpha}(u) > -H$

($H > 0$), then for any integer $p > \alpha + 1$ we have $(R, p, \alpha)\text{-}\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^{\mu} a(x) dx = l$.

The theorem is also true in the case $\alpha = 0, p = 1$ if assumptions (ii) and (iii) are satisfied for $\alpha = -1$ ($\sigma_{-1}(u) \stackrel{\text{def}}{=} u a(u)$).

L. Włodarski.

Polniakowski, Z.: Polynomial Hausdorff transformations. II: Regularity theorems and asymptotic properties of solutions of linear difference and differential equations. *Ann. Polon. math.* 6, 111—133 (1959).

This paper may be regarded as a continuation of the author's paper "Polynomial Hausdorff transformations, I" (this Zbl. 82, 274). In Part I he obtained Euler's linear difference or differential equations of finite order. In the present paper, he gives the generalizations of those theorems in the case of difference equations for sequences and functions, and in the case of differential equations. From the point of view of the theory of difference and differential equations, the regularity and Mercerian theorems in the case of linear transformations of sequences and functions express the asymptotic properties of some linear equations. As an application, three Tauberian theorems (Theorems 4 A, 3 B, and 3 C) are given. It is not possible, in a short review, to give a list of the theorems proved, since there are several, and all of their enunciations are lengthy and complicated, using notations of Part I mentioned above; but the paper contains much interesting matter for those working in similar fields.

R. G. Cooke.

Šalát, T.: Über einige Probleme aus der Theorie der unendlichen Reihen. *Acta Fac. Rer. Natur. Univ. Comenian., Mathematica* 3, 29—37, russische und deutsche Zusammenfassg. 37—39 (1958) [Slowakisch].

Es sei $\{a_i\}$ ($\{M_i\}$) eine Folge von komplexen Zahlen (eine Folge von nicht-leeren endlichen Mengen komplexer Zahlen). Bezeichnen wir mit X die Menge aller Reihen x der Gestalt $x = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i a_i$, $\varepsilon_i \in M_i$. Wenn weiter $y \in X$, $y = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon'_i a_i$, $y \neq x$, so setzen wir $\varrho(x, x) = 0$, $\varrho(x, y) = 1/l$ (l ist der kleinste Index mit $\varepsilon_i \neq \varepsilon'_i$). Dann ist $R = (X, \varrho)$ ein metrischer Raum. In der Arbeit werden einige Eigenschaften von R untersucht; es wird z. B. bewiesen: R ist kompakt, $\dim R = 0$. Es sei

$S_n(x)$ die n -te Teilsumme der Reihe x . Ist $a_i > 0$, $\lim a_n = 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = +\infty$, $M_i = \{-1, 1\}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), $-\infty \leq \kappa \leq \mu \leq +\infty$, so bezeichnen wir mit M die Menge aller $x \in R$, für welche die Gleichungen $\liminf S_n(x) = \kappa$, $\limsup S_n(x) = \mu$

gelten. M hat die Mächtigkeit des Kontinuums. Weiter wird in der Arbeit ein kurzer Beweis eines Satzes von H. M. Sengupta (dies. Zbl. 38, 211) über die Umordnung der Glieder einer Reihe gegeben.

J. Jakubik.

Gonçalves, J. Vicente: *Quelque remarques sur la série alternée décroissante.* Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 6, 331—335 (1957—1958).

Einige elementare Betrachtungen über die Abschätzung des Fehlers bei alternierenden Reihen.

J. Heinhold.

Şaichin, A.: *Zum Beweis des Konvergenzkriteriums von Raabe-Duhamel.* Gaz. Mat. Fiz., Bucureşti, Ser. A 9 (62), 69—70 (1957) [Rumänisch].

Nagell, Trygve: *On linear recurrences with constant coefficients.* Ark. Math. 3, 395—401 (1958).

The author developpes in a self contained paper the properties of solutions of linear recurrences $f(E)u_n = 0$ of order N with constant coefficients. He derives the wellknown connections between the generating function $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ and the rational function with denominator $z^N f(1/z)$ it represents. The case where $f(z) = 0$ has equal roots is examined thoroughly. Several applications illustrate the results.

H. J. A. Duparc.

Schönhofer, A. und K. Zuser: *Eine Verallgemeinerung der Fibonaccischen Zahlenfolge.* Elemente Math. 14, 38—39 (1959).

Gezeigt wird: Aus (1) $x^0 + \dots + x^{k-1} = x^k$ ($k > 1$) folgt, daß das einzige $x > 0$ in $1 < x < 2$ liegt und alle übrigen x_v absolut kleiner als jenes x ($= x_1$) und ebenfalls einfach sind. Aus $a_n = \sum_{v=1}^k A_v x_v^n$ ($n = 0, \dots, k-1$; alle $a_n \geq 0$; $a_0 + \dots + a_{k-1} > 0$) folgt $A_1 \neq 0$ und hieraus, daß die Folge a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) die

Eigenschaft $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+v}}{a_n} = x_1^v$ ($v = 0, 1, 2, \dots$) hat. Es wird nochmals direkt (2) $a_n + \dots + a_{n+k-1} = a_{n+k}$ bewiesen. — Bem.: In einer Arbeit über Jacobi-Ketten beweist O. Perron bei der Behandlung des gleichen Problems $A_1 \dots A_k \neq 0$ (wenn ein $A_v = 0$, dann alle). Er verwendet o. B. d. A. $0 = a_0 = \dots = a_{k-2} = a_{k-1} - 1$ und beim Irreduzibilitätsbeweis und der stärkeren Behauptung nur $x_1 > 0$, alle übrigen $|x_v| < 1 < x_1 < 2$ sogar eine allgemeinere Gleichung als die charakteristische Gleichung (1) der Differenzengleichung (2): S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 37, 401—481 (1907), insbes. S. 456—458 und 467—469.

I. Paasche.

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Garkavi, A. L.: *Über die Dimension von Polyedern optimaler Approximation für differenzierbare Funktionen.* Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 23, 93—114 (1959) [Russisch].

Let C be a Banach space of continuous functions on the segment $[a, b]$, C_s ($s \geq 1$) the set of s -times continuously differentiable functions from C , S_n a set of n linearly independent elements of C_s and $L(S_n)$ a linear manifold determined by S_n . The elements of $L(S_n)$ are called polynomials. The dimension of a convex set $V \subset L(S_n)$ is the greatest number k such that there are $k+1$ polynomials $P_1, P_2, \dots, P_k, P_{k+1}$ in V with the property that $P_1 - P_{k+1}, P_2 - P_{k+1}, \dots, P_k - P_{k+1}$ are linearly independent. The rank $R(S_n, W)$ of a linear manifold $W \subset C$ with respect to S_n is defined by the relation $R(S_n, W) = \max_{V \in W} \dim V$ (ψ) is a convex set consisting of all $\varphi_0 \in S_n$ for which $\inf_{\varphi \in S_n} \|\psi - \varphi\| = \|\psi - \varphi_0\|$. The main result of the paper is: Theorem 1. A necessary and sufficient condition for $R(S_n, C_s) \leq r < n$ ($S_n \subset C_s$) is that between common zeros of any k ($k = r+1, r+2,$

$\dots, n)$ linearly independent polynomials $P_1, \dots, P_k \in L(S_n)$ there are not more than $n - k$ points such that they all (except may be the point which are the ends a, b) are zeros of P_{r+1} and P'_{r+1} . This implies

$$R(S_n, C_s) = R(S_n, C_1) \geq 2 R(S_n, C) - n - 1.$$

A similar problem is considered for the number $R(M, C_1)$ where M is a hyperplane in $L(S_n)$ and $R(M, C_1)$ is defined in a similar way as $R(S_n, C_s)$. *S. Kurepa.*

Džrbašjan, M. M.: Über das inverse Problem der besten Approximation im Raum der Funktionen $L_2(-\infty, +\infty)$. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, Ser. fiz.-mat. Nauk 11, Nr. 2, 79—82 (1958) [Russisch].

Es sei $\psi(\sigma) > 0$ ($\sigma \in [0, \infty)$) eine absolut stetige, nicht wachsende Funktion, die für $\sigma \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert. Verf. konstruiert eine Funktion $f_0(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ derart, daß

$$(*) \quad \min_{F \in W_\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} |f_0(x) - F(x)|^2 dx = \psi(\sigma), \quad 0 \leq \sigma < \infty,$$

wo mit W_σ die Gesamtheit der ganzen transzendenten Funktionen vom exponentiellen Typ, die einen Exponenten $\leq \sigma$ besitzen und zu $L_2(-\infty, \infty)$ gehören, bezeichnet ist; es ist fast überall

$$f_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \left\{ -\frac{1}{2} \psi'(u) \right\}^{1/2} \frac{\sin xu}{u} du$$

und das Minimum in (*) wird durch die Funktion

$$F_{0,\sigma}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\sigma \left\{ -\frac{1}{2} \psi'(u) \right\}^{1/2} \cos xu du$$

realisiert.

L. Kosmák.

Talaljan, A. A. und I. O. Chačatryan: Zum inversen Problem der Theorie der besten Approximation. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, Ser. fiz.-mat. Nauk 11, Nr. 2, 83—87 (1958) [Russisch].

Es wird folgendes Theorem bewiesen (ein Analogon eines bekannten Satzes von S. N. Bernstein; vgl. auch das vorangehende Referat): ist $\psi(\sigma)$ ($0 \leq \sigma < \infty$) eine nicht wachsende Funktion, die für $\sigma \rightarrow \infty$ gegen Null strebt, so existiert eine gleichmäßig stetige, auf der ganzen Achse beschränkte Funktion $f(x)$, welche die Gleichung

$$\sup_{F \in B_\sigma} |f(x) - F(x)| = \psi(\sigma), \quad 0 \leq \sigma < \infty,$$

erfüllt, wo B_σ die Gesamtheit derjenigen ganzen transzendenten Funktionen vom exponentiellen Typ, deren Exponent $\leq \sigma$ ist und die der Ungleichung

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |f(x)| < \infty$$

genügen, bedeutet. Der Beweis ist dem Bernsteinschen ähnlich. *L. Kosmák.*

Ramanujan, M. S.: Generalized moment problems in function spaces. Math. Student 26, 105—116 (1959).

Expository lecture concerned mainly with the $A(\Phi, p)$ and $M(\Phi, p)$ spaces of G. G. Lorentz (this Zbl. 35, 356; 43, 113), following very closely pp. 65—81 of Lorentz's book (Bernstein polynomials, 1953; this Zbl. 51, 50). The paper concludes with a very brief survey of the Hausdorff methods of summation [loc. cit. pp. 81—86 and Chap. XI of Hardy, Divergent series (1949; this Zbl. 32, 58)]. *J. Horváth.*

Szász, Paul: On a mean-value theorem of Schwarz-Stieltjes. Acta Sci. math. 19, 46—50 (1958).

Es sei k der Koeffizient von x^n im Interpolationspolynom H vom Grad $\leq n$, so daß für $i = 0, \dots, k$, $H(a_i) = f(a_i)$, $H'(a_i) = f'(a_i)$, \dots , $H^{(m_i-1)}(a_i) = f^{(m_i-1)}(a_i)$, wobei $a_0 < a_1 < \dots < a_k$ im Definitionsintervall der n -mal differenzierbaren

Funktion f einer reellen Veränderlichen liegen und $m_0 + \dots + m_k = n + 1$ ist. Es gilt $k = f^{(n)}(\xi)/n!$ mit $a_0 < \xi < a_k$. Für spezielle Fälle hat R. Rothe [Math. Z. 9, 300—325 (1921)] das Verhalten von ξ beim Zusammenrücken von a_0 und a_k untersucht. In Verallgemeinerung dessen wird bewiesen: Streben a_1 und a_k gegen α , wobei $|(a_0 - \alpha)/(a_k - a_0)|$ und $|(a_k - \alpha)/(a_k - a_0)|$ beschränkt bleiben, so gilt

$$\frac{1}{a_k - a_0} \left(\xi - \frac{m_0 a_0 + \dots + m_k a_k}{m_0 + \dots + m_k} \right) \rightarrow 0,$$

vorausgesetzt, daß $f^{(n+1)}(\alpha)$ vorhanden und $\neq 0$ ist. Über diese Konvergenz läßt sich eine quantitative Aussage machen, wenn $f^{(n)}$ monoton ist und beschränkte Differenzenquotienten besitzt. G. Aumann.

Weiss, Mary: On the law of the iterated logarithm for uniformly bounded orthonormal systems. Trans. Amer. math. Soc. 92, 531—553 (1959).

Verf. beweist: Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein orthogonales System von reellwertigen Funktionen auf $0 \leq x \leq 1$, und es sei gleichmäßig $|\varphi_n(x)| \leq B$. Dann gibt es eine Teilfolge $\{\varphi_{n_k}(x)\}$ und eine Funktion $f(x)$ mit $0 \leq f(x) \leq B$, $\int_0^1 f^2(x) dx = 1$ und mit folgender Eigenschaft: für jede Folge von reellen Zahlen $\{a_k\}$ mit

$$A_N = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_N^2)^{1/2} \rightarrow \infty \quad \text{für } N \rightarrow \infty,$$

$$\max_{k \leq n} |a_k| = o(A_N (\log \log A_N)^{-1/2})$$

gilt:

$$\limsup (2 A_N^2 \log \log A_N)^{-1/2} \sum_{k=1}^N a_k \varphi_{n_k}(x) = f(x).$$

H. D. Kloosterman.

Ciesielski, Z.: On Haar functions and on the Schauder basis of the space $C_{(0,1)}$. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. 7, 227—232 (1959).

Soient $C = C_{(0,1)}$ l'espace des fonctions réelles continues sur $I = [0, 1]$, $x \in C$, $\|x\| = \max \{|x(t)| : 0 \leq t \leq 1\}$, $\omega_1(\delta) = \sup \{|x(t) - x(s)| : s, t \in I, |s - t| \leq \delta\}$ et $\omega_2(\delta) = \sup \{|x(t) + x(s) - 2x[\frac{1}{2}(t+s)]| : s, t \in I, |s - t| \leq \delta\}$ les modules de continuité du premier et du second ordre de $x \in C$, $\{\chi_n\}$ le système orthonormal de Haar dans I , $\varphi_n(t) = \int_0^t \chi_n(u) du$, $a_n = \int_0^1 x(t) \chi_n(t) dt$, $b_n = \int_0^1 \varphi_n(t) dx(t)$, $S_n(t) = \sum_1^n a_k \chi_k(t)$, $T_n(t) = x(0) + \sum_1^n b_k \varphi_k(t)$. L'A. démontre les

propositions suivantes: Si l'on a (*) $\int_0^\delta \frac{\omega_1(t)}{t} dt \leq K \omega_1(\delta)$ pour $0 \leq \delta \leq 1$, il s'ensuit $\|x - S_n\| \leq (2K/\log 2) \omega_1(1/n)$ pour $n \geq 2$. Réciproquement, si $\omega(t)$ désigne une fonction croissante dans I telle que $\omega(2t) \leq M \omega(t)$ pour $2t \in I$, et si $\|x - S_n\| \leq \omega(1/n)$ pour $n = 1, 2, \dots$, on a $\omega_1(\delta) \leq 4M \omega(\delta)$ pour $0 \leq \delta \leq 1$. La suite $\{\varphi_n\}$ est une base de Schauder dans C [v. S. Kaczmarz-H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen (ce Zbl. 13, 9), p. 50], et $x \in C$ entraîne $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(t)$ pour $t \in I$. Si $\omega_2(\delta)$ vérifie (*) au lieu de $\omega_1(\delta)$, on a

$$\|x - T_n\| \leq \frac{8K}{\log 2} \omega_2\left(\frac{1}{n}\right); \text{ si la série } \sum_1^\infty \frac{1}{n} \omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \text{ converge, la série } \sum_1^\infty |b_n \varphi_n(t)|$$

converge uniformément dans I ; de même $\sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{n}} \omega_2\left(\frac{1}{n}\right) < +\infty$ entraîne

$$\sum_1^\infty \frac{|b_n|}{n} < +\infty.$$

A. Császár.

Zeller, Karl: Saturation bei äquivalenten Summierungsverfahren. Math. Z. **71**, 109—112 (1959).

In einer Arbeit von P. L. Butzer [Math. Z. **70**, 93—112 (1958)] wurde die Frage von W. W. Rogosinski, ob äquivalente Summierungsverfahren sich bezüglich Saturation ganz verschieden verhalten können, mit folgendem Beispiel beantwortet: Die Verfahren von Cesàro und Rogosinski (für Fourier-Reihen) sind äquivalent, besitzen aber verschiedene Saturationsklassen, nämlich die Menge derjenigen Funktionen $f \in C[-\pi, \pi]$ für die $f \in \text{Lip } 1$ mit der Ordnung $O(n^{-1})$ bzw. $f' \in \text{Lip } 1$ mit der Ordnung $O(n^{-2})$ ist. Verf. untersucht diese Erscheinung von einem allgemeinen Standpunkt aus und zeigt, daß die Saturationsgeschwindigkeit bei Matrixverfahren von der Konvergenzgeschwindigkeit der Spalten abhängt (Satz 1); letztere ist aber unabhängig von der Größe des Wirkungsfeldes (Satz 2).

P. L. Butzer.

Sunouchi, Gen-ichiro and Chinami Watari: On determination of the class of saturation in the theory of approximation of functions. Proc. Japan Acad. **34**, 477—481 (1958).

Die vorliegende Arbeit schließt an das Problem der Saturation in der Approximationstheorie an, das in den letzten Jahren von J. Favard (siehe auch dies. Zbl. **30**, 47) aufgeworfen wurde und von M. Zamansky (dies. Zbl. **34**, 187), G. Alexits (dies. Zbl. **47**, 68, 69), P. L. Butzer (dies. Zbl. **72**, 132; **81**, 58, 334) und vielen anderen weiter entwickelt wurde. Das Problem (für Summierungsverfahren einer Fourier-Reihe) ist folgendes: Sei (*) $f \sim \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x)$, $A_k(x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx$, die Fourier-Entwicklung und $P_{\omega}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(\omega) A_k(x)$ Summierungsverfahren von (*), durch $g_k(\omega)$ ($k = 1, 2, \dots$) definiert, und $D_{\omega}(f; P) = \|f(x) - P_{\omega}(x)\|$ für $f \in C[-\pi, \pi]$ oder $f \in L_p(-\pi, \pi)$, $p \geq 1$. Existiert eine positive monoton fallende Funktion $\varphi(\omega)$ für $\omega \uparrow \infty$ und eine Klasse von Funktionen f so daß: (I) aus $D_{\omega}(f; P) = o(\varphi(\omega))$ stets $f = \text{konst.}$ folgt; (II) aus $D_{\omega}(f; P) = O(\varphi(\omega))$ stets $f \in K$ folgt; (III) für jedes $f \in K$ $D_{\omega}(f; P) = O(\varphi(\omega))$ gilt, so sagt man, daß das Summierungsverfahren saturiert ist mit Ordnung $O(\varphi(\omega))$ und K heißt Saturationsklasse. Das Hauptergebnis ist folgender allgemeiner Satz: Es seien c , r und ϱ positive Konstante für die (**) $\lim_{\omega \uparrow \infty} \omega^r [1 - g_k(\omega)] = c k^{\varrho}$ ($k = 1, 2, \dots$) ist. (i) Gilt $D_{\omega}(f; P) = o(\omega^{-r})$, so ist $f = \text{konst.}$ (ii) gilt $D_{\omega}(f; P) = O(\omega^{-r})$, so ist entweder $\sum_{k=0}^{\infty} k^{\varrho} A_k(x)$ die Fourier-Reihe einer beschränkten Funktion (falls $f \in C$), oder die Fourier-Reihe einer Funktion in L_p (falls $f \in L_p$, $p > 1$), oder die Fourier-Stieltjesreihe einer Funktion von beschränkter Variation (falls $f \in L_1$). Dieser Satz, dessen Beweis kurz skizziert ist, erlaubt den Verff., die Saturationsklassen verschiedener Summierungsverfahren (ohne Beweis) anzugeben. Leider fehlt ein entsprechender Satz, welcher Problem (III) völlig allgemein löst (d. h. eine Umkehrung zu (ii)). So muß Problem (III) für jedes Verfahren einzeln gelöst werden. Insbesondere ist das Abelsche Verfahren einer Fourier-Reihe saturiert mit Ordnung $O(1 - r)$ ($r \uparrow 1$ entspricht $\omega \uparrow \infty$ in (**)) und die Saturationsklasse ist die Menge derjenigen Funktionen f für die entweder $\tilde{f} \in \text{Lip } 1$ (falls $f \in C$), $f' \in L_p$ (falls $f \in L_p$, $1 < p < \infty$), oder \tilde{f} von beschränkter Variation (falls $f \in L_1$) gilt. Dieses Ergebnis wurde zuerst von Butzer (dies. Zbl. **81**, 334) im Falle L_p ($p > 1$) als Anwendung eines allgemeinen Satzes in der Halbgruppentheorie bewiesen. Einige andere Vermutungen von Butzer [siehe auch Math. Z. **70**, 93—112 (1958)] über die Saturationsklassen der Verfahren von Bernstein-Rogosinski, de la Vallée Poussin sowie von weiteren Verfahren werden hier bewiesen. Jedoch ist die Methode der Verff. nur anwendbar auf Sum-

mierungsverfahren einer Fourier-Reihe und nicht eines Fourier-Integrals [siehe hierzu Butzer, C. r. Acad. Sci., Paris **249**, 2467—2469 (1959)]. *P. L. Butzer.*

Buchwalter, Henri: Saturation de certains procédés de sommation. C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 909—912 (1959).

Die vorliegende Arbeit behandelt wiederum Saturation. Die hier benutzte Schreibweise ist — falls nicht näher erklärt — die gleiche wie im vorhergehenden Referat. Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(x)$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \overline{A_k(x)}$ die Fourier- bzw. die konjugierte Reihe

von $f \in C[-\pi, \pi]$ oder $\in L_p(-\pi, \pi)$, $p \geq 1$. Es sei (*) $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(\omega) A_k(x)$ ein

Summierungsverfahren mit den Eigenschaften (i) $\sum_{k=0}^{\infty} |g_k(\omega)| < +\infty$ für jedes endliche ω ; (ii) $1 - g_k(\omega) \sim \lambda_k \varphi(\omega)$, $\omega \uparrow \infty$ (k fest), wo $\lambda = \{\lambda_k\}$ eine Folge ist, für die $0 \leq \lambda_0 < \lambda_k < \lambda_{k+1} \uparrow \infty$, $\lambda_{k+1} = O(\lambda_k)$ und

$$\sum_{k=1}^{n-1} k |\lambda_{k-1} - 2\lambda_k + \lambda_{k+1}| + n(\lambda_n - \lambda_{n-1}) = O(\lambda_n);$$

(iii) die Folgen $\{g_k(\omega)\}_{k \geq 0}$, $\{(g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega))/(\lambda_{k+1} - \lambda_k)\}_{k \geq 0}$ sind monoton fallend gegen Null für jedes ω groß genug. Unter diesen Voraussetzungen sagt der allgemeine Satz (ohne Beweis) des Verf. aus, daß (*) saturiert ist mit der Ordnung $O(\varphi(\omega))$ und daß die Saturationsklasse die Menge der Funktionen f ist, für die entweder

$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k/k) \overline{A_k(x)}$ die Fourier-Reihe einer Funktion in Lip 1 ist (falls $f \in C$), oder

$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \overline{A_k(x)}$ die Fourier-Reihe einer Funktion in L_p ist (falls $f \in L_p$, $p > 1$), oder

$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k/k) \overline{A_k(x)}$ die Fourier-Reihe einer Funktion von beschränkter Variation ist (falls $f \in L_1$). Mit diesem Satz sowie einem Hilfssatz über die Iteration von Summierungsverfahren erhält Verf. die Saturationsklassen der Verfahren von Riesz, Cesàro, Abel (siehe obiges Referat), von Hölder (vorher von S. Aljančić, dies. Zbl. **83**, 47, erstes Referat, erhalten) und von Lambert in den Räumen C und L_p , $p \geq 1$. *P. L. Butzer.*

Uljanov, P. L.: Über die Divergenz Fourierscher Reihen. Magyar Tud. Akad. mat. fiz. Tud. Oszt. Közleményei **8**, 259—324 (1958) [Ungarisch].

Vgl. die Beschreibung des russischen Originals in diesem Zbl. **79**, 292.

Hsiang, Fu Cheng: The Fourier series of functions of bounded p -th power variation. Michigan math. J. **6**, 55—58 (1959).

Eine Funktion $f(x)$ gehört genau dann zur Klasse $W_p(a, b)$, wenn die obere Schranke $V_p(f; a, b)$ des Ausdrucks $(\sum_r |f(x_r) - f(x_{r-1})|^p)^{1/p}$ bezüglich aller Unterteilungen $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$ endlich ist. Eine Funktion der Wienerschen Klasse $W_p(a, b)$ heißt auch "function of bounded p -th power variation". Es sei $f(t)$ eine L -integrierbare Funktion mit der Periode 2π ,

$$f(t) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \sum A_n(t)$$

und $\varphi(t) = \frac{1}{2} [f(x+t) + f(x-t)] - s$. Ferner sei $p > 0$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha p < 1$. Wenn $A_n = o(n^{-\alpha})$ und (1) $V_p(\varphi; t, 2t) = O(1)$ für $t \rightarrow +0$ gilt und wenn der Grenzwert $s = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$ existiert, so ist $A_n(x)$ $(C, -\alpha)$ -summierbar zum Wert s . Die Bedingung (1) entspricht dabei für $p=1$ der Bedingung

$\int_0^t |d\{u\varphi(u)\}| = O(t)$ von Boscquet und Offord (dies. Zbl. **13**, 10). *V. Garten.*

Lauwerier, H. A.: On certain trigonometrical expansions. J. Math. Mech. **8**, 419—432 (1959).

Les développements asymptotiques en série de Fourier des solutions sont connus du problème aux limites. On cherche une solution $F(x, y)$ de l'équation $x^2 F'_{xx} + x^2 F'_{yy} - y^2 F = 0$ régulière dans la demi-bande $0 \leq x \leq \pi$, $y > 0$, adhérente à l'arc $0 \leq x \leq \pi$, $y = 0$ et satisfaisant aux conditions de la fonction $f = 0$ pour $x = 0$ et $x = \pi$.

$$\cos \mu x \partial F / \partial y - \sin \mu x \partial F / \partial x + f(x) = 0 \text{ pour } y = 0,$$

μ est une constante réelle donnée, $0 \leq \mu \leq 1$, $f(x)$ fonction bornée, régulière. La solution que se présente à une solution unique continue et bornée sur la demi-bande fermée. Cette solution est

$$F(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{\sin kx}{k} e^{-y(k^2 + \mu^2)^{1/2}}$$

les coefficients b_k étant déterminés par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left[\left(1 + \frac{\mu^2}{k^2} \right)^{1/2} \cos \mu x \sin kx + \sin \mu x \cos kx \right]$$

Pour arriver à ce résultat, l'A. est amené à faire une étude détaillée des développements de la forme (1). Il montre l'existence et l'unicité de développements de ce type. Il calcule les coefficients b_k et en donne plusieurs propriétés. P. Brousse.

Dérvaïjan, M. M. und A. B. Nersejan: Kriterien für die Möglichkeit, Funktionen in Dirichletsche Reihen zu entwickeln. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, Ser. fiz.-mat. Nauk 11, Nr. 5, 65—76 (1958) [Russisch].

Verf. untersuchen die Entwickelbarkeit von Funktionen durch Dirichletsche Reihen mit gegebener Exponentenfolge, indem sie Kriterien für die Entwicklung in Potenzreihen verallgemeinern. Typisch ist das folgende Ergebnis: Es sei $\mu_k = 0$, $0 < \mu_{k+1} - \mu_k < 1$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = \infty$, $F(\sigma)$ sei in $[\sigma_0, \infty)$ definiert, und für

$$\text{beliebiges } \alpha > 0 \text{ sei } \frac{d^{\alpha} F(\sigma)}{d\sigma^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} (e^{-\sigma} - e^{-\sigma+\alpha u}) u^{\alpha-1} F(u) du, \quad L^{\alpha} F(\sigma) = F(\sigma),$$

$L^{\alpha} F(\sigma) = \frac{1}{d\sigma^{\alpha}} \frac{d^{\alpha} F(\sigma)}{d\sigma^{\alpha}}$, $\sigma \geq \sigma_0$, $F(\sigma) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} (e^{-\sigma} - e^{-\sigma+\alpha u}) u^{\alpha-1} F(u) du$, mit $\alpha_k = 1 - (\mu_k - \mu_{k-1})$, $k \geq 1$, seien in $[\sigma_0, \infty)$ vorhanden und dort $e^{\sigma} dL^{\alpha_k} F(\sigma) d\sigma$ absolut integrierbar ($L^{\alpha_k} F = \infty$), $\lim_{k \rightarrow \infty} L^{\alpha_k} F(\sigma) = 0$. Ferner sei für $k = 0, 1, \dots$ $\sup_{\sigma \geq \sigma_0} L^{\alpha_k} F(\sigma) \leq M e^{-\alpha_k \sigma} \Gamma(1 - \mu_k)$.

Dann gilt in $[\sigma_0, \infty)$ die Darstellung $F(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^{\alpha_k} F(+\infty)}{\Gamma(1 - \mu_k)} e^{-\mu_k \sigma}$.

H.-E. Richter.

Dérvaïjan, M. M. und A. B. Nersejan: Einige Integro-Differentialoperatoren und die mit ihnen zusammenhängenden quasi-analytischen Funktionenklassen. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, Ser. fiz.-mat. Nauk 11, Nr. 5, 107—120 (1958) [Russisch].

Es seien $\{\alpha_k\}$ eine Zahlenfolge mit $0 \leq \alpha_k < 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

$$\mu_n = \sum_{k=0}^n (1 - \alpha_k), \quad n \geq 1, \quad \frac{d^{-\alpha_k}}{dx^{-\alpha_k}} j(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_0^x (x-t)^{\alpha_k-1} j(t) dt,$$

$$D^{\alpha_k} j(x) = - \frac{d^{-\alpha_k}}{dx^{-\alpha_k}} j(x), \quad D^k j(x) = \frac{d^{-\alpha_k}}{dx^{-\alpha_k}} D^{k-1} j(x), \quad k = 1, 2, \dots;$$

$C\{\alpha_k\}$ sei die Klasse aller Funktionen $j(x)$, für die $D^k j(x)$ in $[0, \infty)$ stetig, $dD^k j(x)/dx$ dort stetig und über $[0, \delta]$, $\delta > 0$ absolut integrierbar sind. Ist $\{m_n\}$ eine Folge positiver Zahlen, so bezeichne $C_{m_n}\{\alpha_k\}$ die Klasse der Funktionen $f(x) \in C\{\alpha_k\}$, für die mit Konstanten A, B, C $D^n j(x) \leq A B^{m_n} e^{Cx}$ und $e^{-Cx} dD^n j(x)/dx \in L_1[0, \infty)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Die Klasse $C_{m_n}\{\alpha_k\}$ heißt quasi-analytisch, wenn für irgend zwei Funktionen $j_1(x)$, $j_2(x)$ aus $D^{m_n} j_1(0) = D^{m_n} j_2(0)$.

$n = 0, 1, 2, \dots$, $f_1(x) \equiv f_2(x)$ in $[0, \infty)$ folgt. Verff. zeigen, daß aus

$$\int_1^{\infty} \frac{\log T_{\alpha}(r)}{r^2} dr = +\infty, \quad T_{\alpha}(r) = \sup_{n \geq 1} \frac{r^{\mu_n}}{m_n},$$

folgt, daß $C_{m_n}\{\lambda_k\}$ quasi-analytisch ist. Die Voraussetzung ist (im Falle $\alpha = 0$) auch notwendig. H.-E. Richert.

Spezielle Funktionen:

Carlitz, L.: Note on the integral of the product of several Bernoulli polynomials. J. London math. Soc. **34**, 361—363 (1959).

Angeregt durch eine Note von Mordell (dies. Zbl. **81**, 274) wird das Integral $\int_0^1 B_{m_1}(t) \cdots B_{m_n}(t) dt$ ausgewertet. G. Hoheisel.

Carlitz, Leonard: Some biorthogonal q -polynomials in two variables. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **13**, 555—557, ital. Zusammenfassg. 555 (1958).

The author introduced in one of his papers [Math. Nachr. **17**, 224—238 (1959)] q -polynomials in two variables. In this note he proves that these polynomials are biorthogonal, using as weight function a kind of theta functions, build with an indefinite binary quadratic form. (Compare: L. Carlitz, this Zbl. **81**, 66, second review). F. van der Blij.

Eweida, M. T.: Über Legendresche Polynome. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., Anzeiger **1959**, 142—145 (1959).

Die durch $1 - x^2$ geteilte Turánsche Determinante der Legendreschen Polynome,

$$\Phi_n(x) = [P_n(x)^2 - P_{n-1}(x) P_{n+1}(x)] / (1 - x^2), \quad n = 1, 2, \dots,$$

eine gerade Funktion von x , besitzt, wie Verf. auf eine frühere Arbeit (dies. Zbl. **65**, 299) zurückgreifend zeigt, folgende beiden Eigenschaften: 1. Es ist $\int_{-1}^0 \Phi_n(x) dx =$

$\int_0^1 \Phi_n(x) dx = \frac{1}{n+1}$. — 2. Im Bereiche $-1 \leq x \leq 1$ beständig positiv, hat dort $\Phi_n(x)$ genau ein Minimum — für $x = 0$ —, und es ist $\Phi_n(\pm 1) = \frac{1}{2}$.

L. Koschmieder.

Campbell, Robert: Sur une extension des polynomes de Charlier et de Tschebyscheff. C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 2937—2939 (1959).

Die Frage, wann sich die Cesàroschen Mittel der Entwicklungen von Funktionen nach Orthonormalpolynomen geschlossen berechnen lassen, führt auf Polynome $P_n(x) = k_n x^n + k'_n x^{n-1} + \dots$, die durch

$$(x + u_{n+1}) P_n(x) = P_{n+1}(x) / A_{n+1} + P_{n-1}(x) / A_n, \quad A_n = k_n / k_{n-1} = \sqrt{h n + k}, \\ u_n = k'_{n+1} / k_{n+1} - k'_n / k_n = \lambda n + \mu$$

definiert sind. Man erhält für $h = 0$, $k \neq 0$ die Polynome von Tschebyscheff, für $h \neq 0$, $k = 0$ die Polynome von Charlier, insbesondere für $h = 1$, $\lambda = \mu = k = 0$ die Polynome von Hermite. H. Tietz.

Arutjunjan (Arutiunian), V. M., R. M. Muradjan (Muradian), and A. A. Sokolov: An asymptotic expression for a degenerated hypergeometrical function. Doklady Akad. Nauk SSSR **122**, 751—754 (1958) [Russisch].

Für die Lösungen der Differentialgleichung $u'' + f(x)u = 0$ wird der Ansatz $u = \psi(x) F(z(x))$ gemacht. Es ergibt sich $u = \sqrt{z/z'} \{AZ_s^{(1)}(z) + BZ_s^{(2)}(z)\}$, wobei in den geschweiften Klammern die allgemeine Lösung der Besselschen Differentialgleichung steht und z aus der Gleichung $z'^2(1 + \varepsilon) = f^*$ zu bestimmen ist mit

$z = z'''/2z'^3 - 3z''^2/4z'^4 + (1 - s^2)/z^2 - (f - f^*)/z^2$. Lassen sich der Parameter s und die willkürliche Funktion f^* so wählen, daß $\varepsilon \ll 1$ ist für alle interessierenden x , so kann man näherungsweise $\varepsilon = 0$, d. h. $z = \int \sqrt{f^*} dx$ setzen. Damit wird eine Methode verbessert, die beispielsweise schon in § 42 des Buches „Klassische Feldtheorie“ von D. Iwanenko und A. Sokolow (dies. Zbl. 52, 224) zu finden ist. Angewandt wird die Methode zur Herleitung von Näherungsformeln für die Whittaker-Funktion $W_{\lambda, \mu}(x)$ in den drei Intervallen $0 \leq x \leq x^* < 4\lambda$, $x^* \leq x \leq 4\lambda$, $4\lambda \leq x < \infty$ [x^* in $(0, 4\lambda)$ beliebig], von denen hier nur die vereinfachte Formel $W_{\lambda, \mu}(x) \approx \frac{1}{2} \sqrt{2\pi x} e^{-\lambda + \lambda \log \lambda} \{ \sin(\lambda - \mu) \pi J_{2\mu}(2\sqrt{\lambda x}) - \cos(\lambda - \mu) \pi N_{2\mu}(2\sqrt{\lambda x}) \}$ für $0 \leq x \leq x^* \ll 4\lambda$ angeführt sei. Durch Spezialisierung der Parameter gelangt man von dieser Beziehung leicht zu bekannten asymptotischen Darstellungen für die Laguerreschen bzw. Hermite'schen Polynome. L. Berg.

Arscott, F. M.: A new treatment of the ellipsoidal wave equation. Proc. London Math. Soc., III. Ser. 9, 21—50 (1959).

Mit reellem q und $0 < k^2 < 1$ wird die Differentialgleichung

$$(1) \quad w''(z) - (a + b k^2 \operatorname{sn}^2 z + q k^4 \operatorname{sn}^4 z) w(z) = 0$$

der Ellipsoid-(Wellen-) Funktionen betrachtet. Von diesen wird verlangt, daß sie eindeutig und doppelt-periodisch mit den Perioden $2K$ oder $4K$ und $2iK'$ oder $4iK'$ sind. Das ergibt für (1) gewisse Eigenwertpaare $a(q)$, $b(q)$. Verf. entwickelt eine neue Methode zur Gewinnung dieser $w(z)$, $a(q)$, $b(q)$. Ihr Grundgedanke ist die Entwicklung von Lösungen der — sicher durch $w(\alpha)w(\beta)$ erfüllten — Differentialgleichung

$$(2) \quad W_{\alpha\alpha} - W_{\beta\beta} = \{b k^2 (\operatorname{sn}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \beta) + q k^4 (\operatorname{sn}^4 \alpha - \operatorname{sn}^4 \beta)\} W$$

nach Produkten $E_p(\alpha, \beta) = E(\alpha)E(\beta)$ Laméscher Polynome. Die für diese kürzlich vom Verf. angegebenen Rekursionsformeln (vgl. dies. Zbl. 72, 288) liefern für die Entwicklungskoeffizienten Bedingungen, die sich in der Form dreigliedriger linearer Rekursionen für Matrizen schreiben lassen. Zur Lösung wird ein den Kettenbrüchen analoger Prozeß für Matrizen verwandt. Mit Hilfe bekannter Integralrelationen erhält Verf. schließlich 24 Reihenentwicklungen der $w(z)$ nach Besselfunktionen. Die zwar umfangreiche, aber doch übersichtliche Durchführung gibt eine Reihe wichtiger Nebenresultate. F. W. Schäfke.

Yu, Yi-Yuan: On the generalized Ber, Bei, Ker, and Kei-functions with application to plate problems. Quart. J. Mech. appl. Math. 10, 254—256 (1957).

Es wird darauf aufmerksam gemacht, daß man die allgemeinste reelle Lösung der Differentialgleichung

$$DDy - s Dy + t y = 0; \quad D = d^2/dx^2 + x^{-1} d/dx; \quad (s, t \text{ reelle Konstante})$$

unter der Voraussetzung $s^2 - 4t \leq 0$ in folgender Form schreiben kann

$$y = C_1 I_0(\alpha x)_r + C_2 I_0(\alpha x)_i + C_3 K_0(\alpha x)_r + C_4 K_0(\alpha x)_i$$

mit $2\alpha^2 = s + i\sqrt{4t - s^2}$. Die Indizes r und i bedeuten Realteil und Imaginärteil der modifizierten Besselfunktionen $I_0(\alpha x)$ und $K_0(\alpha x)$. Für $s = 0$ gehen diese Ausdrücke in die ber-, bei-, ker- und kei-Funktionen über. Die genannte Differentialgleichung tritt auf bei der Untersuchung axialsymmetrischer Biegung oder Beulung einer Platte auf elastischer Unterlage, die durch Normalkräfte auf der Plattenoberfläche und radial wirkende Randkräfte beansprucht wird. Neigungswinkel, radiales Biegemoment und Schubspannung der Platte werden formelmäßig angegeben. J. Dörr.

Kublanovskaja, V. N. and T. N. Smirnova: Die Nullstellen der Hankelschen Funktionen und einiger anderer, mit ihnen zusammenhängender Funktionen. Trudy mat. Inst. Steklov. 53, 186—191 (1959) [Russisch].

Es handelt sich um die Hankelschen Funktionen mit imaginärem Argument und halbganzzahligem Index, für die bekanntlich die Darstellung

$$H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi i}} i^{-n-1} e^{-z} z^{-n-\frac{1}{2}} P_n(z)$$

gilt, wobei P_n ein Polynom mit reellen Koeffizienten ist. Verff. haben die Nullstellen der 30 ersten Funktionen berechnet. Die Tabelle enthält die Real- und Imaginärteile für $n \leq 26$ auf vier Dezimalen, für $n = 27$ auf drei Dezimalen, für $n = 28$ bis $n = 30$ auf zwei Dezimalen. W. Hahn.

Leitner, Alfred und Josef Meixner: Simultane Separierbarkeit von verallgemeinerten Schwingungsgleichungen. Arch. der Math. 10, 387—391 (1959).

Es wird untersucht, für welche Funktionen Φ die verallgemeinerte Schwingungsgleichung $\Delta \Psi + \Phi \Psi = 0$ in Kugelkoordinaten, Sphäroidkoordinaten und Zylinderkoordinaten mit gemeinsamer Symmetrieachse simultan separierbar ist, und angegeben, welche Funktionen bei der Separation auftreten. F. W. Schäfke

Funktionentheorie:

Tanaka, Chuji: On Julia-lines of Dirichlet series. Kōdai math. Sem. Reports 10, 161—171 (1958).

Die Dirichletsche Reihe $F(s) = \sum a_n \exp(-\lambda_n s)$, $s = \sigma + it$, $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \rightarrow \infty$, sei in der ganzen Ebene konvergent. $t = t_0$ heißt eine Julia-Gerade, wenn $F(s)$ in jedem Streifen $|t - t_0| < \varepsilon$ jeden Wert mit höchstens zwei Ausnahmen (einschl. ∞) unendlich oft annimmt. $t = t_0$ heißt eine Argument-Gerade, wenn in jedem Streifen $|t - t_0| < \varepsilon$ gleichmäßig $|F(s)| \rightarrow \infty$ und $\arg F(s)$ jeden Wert modulo 2π unendlich oft annimmt. Verf. verallgemeinert Resultate von Mandelbrojt, indem er zeigt: Es sei $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = \delta$ und $F(s)$ habe die

Ordnung $\varrho \left(= \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\sigma} \log^+ \log^+ M(\sigma), M(\sigma) = \sup_t |F(\sigma + it)| \right)$. Ist $\varrho > 0$ so hat $F(s)$ bei beliebigem festen t_0 in jedem Streifen $|t - t_0| \leq \pi \delta$ (unabhängig von ϱ) mindestens eine Julia-Gerade. Ist $\varrho = 0$, so existiert in jedem solchen Streifen mindestens eine Julia- oder eine Argument-Gerade.

H.-E. Richert.

Gallie jr., T. M.: Mandelbrojt's inequality and Dirichlet series with complex exponents. Trans. Amer. math. Soc. 90, 57—72 (1959).

Verf. leitet eine modifizierte Mandelbrojtsche Ungleichung für die Koeffizienten einer Dirichletschen Reihe her und beweist mit ihrer Hilfe Sätze über Konvergenz und die Lage der Singularitäten von Dirichletschen Reihen mit komplexen Exponenten. Aus einer einfacheren Form einer solchen Ungleichung werden ferner der Satz von Jentzsch über die Nullstellen der Partialsummen und der Überkonvergenzsatz von Ostrowski, der bekanntlich den Hadamardschen Lückensatz impliziert, auf Dirichletsche Reihen mit komplexen Exponenten verallgemeinert.

H.-E. Richert.

Kahane, J. P. et S. Mandelbrojt: Sur l'équation fonctionnelle de Riemann et la formule sommatoire de Poisson. Ann. sci. Écol. norm. sup., III. Sér. 75, 57—80 (1958).

Pursuing a line of investigation initiated by Hamburger [Math. Z. 10, 240—250 (1921); 11, 224—245 (1922); 13, 283—311 (1922); Math. Ann. 85, 129—140 (1922)] and continued, in a more general setting, by Bochner (this Zbl. 42, 321), Bochner and Chandrasekharan (this Zbl. 71, 66), and Chandrasekharan and Mandelbrojt (this Zbl. 71, 66; 82, 59), the authors study functional equations modelled on, but more general than, the functional equation of Riemann's Zeta-function

Let $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$ ($n \geq 1$) be two sequences of positive numbers increasing to infinity and let $\delta > 0$. Let s be a complex variable, $s = \sigma + i\tau$. Let the triplet $(\delta, \lambda_n, \mu_n)$ be called a "label". One speaks of a solution of the functional equation

$$(1) \quad \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) \varphi(s) = \pi^{-\frac{1}{2}(\delta-s)} \Gamma\left\{\frac{1}{2}(\delta-s)\right\} \psi(\delta-s)$$

with the label $(\delta, \lambda_n, \mu_n)$, if there exist two Dirichlet series $\varphi(s) = \sum a_n \lambda_n^{-s}$, $\psi(s) = \sum b_n \mu_n^{-s}$, and a function $\chi(s)$ which is holomorphic and uniform in a domain $|\sigma| > R$, such that $\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} \chi(\sigma + i\tau) = 0$ uniformly in every segment $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, and such that for some pair of real numbers α, β we have $\chi(s) = \pi^{-\frac{1}{2}s} \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) \varphi(s)$ for $\sigma > \alpha$, and $\chi(s) = \pi^{-\frac{1}{2}(\delta-s)} \Gamma\left\{\frac{1}{2}(\delta-s)\right\} \psi(\delta-s)$ for $\sigma < \beta$. The authors study the relationship between such a functional equation and a summation formula of the type

$$(2) \quad \sum_{-\infty}^{\infty} a_n f(-\lambda_n) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n F(\mu_n),$$

where $f \in L_1(-\infty, \infty)$, and F is the Fourier transform of f . They refine a theorem of Hamburger (Math. Ann. loc. cit.) by proving that with suitable restrictions on the label, and on the class of functions f , one can pass from (1) to (2) or from (2) to (1). An interesting by-product is the result that under very light restrictions on the gap $(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$, equation (1) has no solution if δ is an odd number greater than 3. The method of proof, which is both novel and elegant, combines the technique of almost-periodic (Schwartz) distributions with a formula first established by Bochner and Chandrasekharan (loc. cit. Th. 2. 1), and since simplified by the reviewer, which exhibits the $\{\mu_n\}$ as the exponents of a Dirichlet series, and the $\{\lambda_n\}$ as the singularities of its sum-function on the axis of convergence. The authors also refine some of the results previously obtained by Bochner and Chandrasekharan, and by Chandrasekharan and Mandelbrojt, on the maximum number of linearly independent solutions of (1), by replacing the notion of upper or lower density of the sequence $\{\lambda_n\}$ by the notion of upper or lower density of repartition (J. P. Kahane, this Zbl. 83, 344). Finally they obtain a generalization of a theorem proved earlier by Chandrasekharan and Mandelbrojt (loc. cit. Th. 3), — with the aid of an interesting result of S. Agmon [Bull. Res. Council Israel, Sect. F. 3, 385—389 (1954)], — by showing that if the upper and lower densities of repartition of the sequences (λ_n) , (μ_n) exist, and equation (1) is satisfied with δ odd, then each of the sequences admits a finite base. They also obtain several properties of the sequences $(\lambda_n \pm \lambda_m)$ and $(\mu_n \pm \mu_m)$.

K. Chandrasekharan.

Wright, E. M.: A recursion formula for the coefficients in an asymptotic expansion. Proc. Glasgow math. Assoc. 4, 38—41 (1958).

Let

$$g(t) = \prod_{r=1}^p \Gamma(t + \beta_r) / \prod_{r=0}^q \Gamma(t + \gamma_r), \quad q \geq p,$$

$$\kappa = q + 1 - p, \quad \vartheta = \sum_{r=1}^p \beta_r - \sum_{r=0}^q \gamma_r + \frac{1}{2}(\kappa + 1).$$

It is known that $g(t)$ has the asymptotic expansion

$$g(t) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(1-\kappa)} \kappa^{\kappa t - \frac{1}{2} - \vartheta} \left[\sum_{m=0}^M \frac{\kappa c_m}{\Gamma(\kappa t - \vartheta + m + 1)} + O\left(\frac{1}{\Gamma(\kappa t - \vartheta + M + 2)}\right) \right]$$

(cf. Riney, this Zbl. 72, 68). Set

$$T(t) = \prod_{r=0}^q (t - \kappa + \kappa \gamma_r + \vartheta), \quad U(t) = \prod_{r=1}^p (t + \kappa \beta_r + \vartheta),$$

$$T_s(-m) = \sum_{r=0}^s (-1)^{s-r} \frac{T(r-m)}{r!(s-r)!}$$

and similarly for $U_s(-m)$. Then we have the recursion formula

$$\kappa m c_m = \sum_{s=1}^q T_{q-s}(s-m) c_{m-s} - \sum_{s=1}^{p-1} U_{p-s-1}(s-m) c_{m-s}.$$

Similar recursion formulas have been found by Riney (loc. cit. and this Zbl. 81, 296) J. Horváth.

Wright, E. M.: Solution of the equation $ze^z = a$. Bull. Amer. math. Soc. 65, 89—93 (1959).

Verf. untersucht die Nullstellen $\dots, Z_{-1}, Z_0, Z_1, \dots$ der transzendenten Gleichung $ze^z = a$ ($a \neq 0$). Zunächst wird eine eindeutige Indizierung der Z_n definiert. Für alle n mit $|n| > n_0(a)$ werden gut konvergierende Reihen für die Z_n angegeben. Numerisch genügen i. a. wenige Reihenglieder; n_0 ist relativ klein. Zur Ermittlung der noch fehlenden Z_n mit $|n| \leq n_0(a)$ werden iterative und andere Approximationsverfahren diskutiert. G. Bertram.

Abe, Hitosi: On p -valent functions. J. Gakugei Tokushima Univ., natur. Sci. Math. 8, 33—40 (1957).

Im ersten Teil wird für die Koeffizienten einer in $|z| < 1$ schwach p -wertigen Funktion (s. Hayman, dies. Zbl. 45, 356, 1. Referat) $p(z) = z^p + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n+p-1} z^{n+p-1}$ die Größenordnung der Koeffizienten abgeschätzt zu $|a_{n+p-1}| = O(n^{2p-1})$. Der zweite Teil beschäftigt sich mit Funktionen $w = z^{-p}(1 + a_1 z + \dots)$, die in $0 < |z| < 1$ regulär und p -wertig sind. Es werden, z. T. mit zusätzlichen Einschränkungen der Klasse, Bedeckungssätze nach Art des Bieberbach-Montelschen Satzes für schlichte meromorphe Funktionen gewonnen, sowie Betragsabschätzungen nach unten und oben auf $|z| = r < 1$. Im dritten Teil werden Sätze, die Hayman in der oben zitierten Arbeit für Funktionen $f(z) = z^{-1}(1 + c_1 z + \dots)$ in $|z| < 1$ gewonnen hatte und die sich um die Abschätzung des transfiniten Durchmessers des nicht bedeckten Teiles der Bildebene gruppieren, auf Funktionen $f(z) = z^{-p}(1 + c_1 z + \dots)$ übertragen. H. Grunsky.

Kreyszig, Erwin and John Todd: The radius of univalence of the error function. Numerische Math. 1, 78—89 (1959).

Die Funktion $\operatorname{erf} z = \int_0^z e^{-t^2} dt$ hat um $z = 0$ den Schlichtheitsradius $\rho = 1,5748376$. Die Berechnung stützt sich auf die zweimal bewiesene Beziehung $\rho = \inf \{|z|, z \neq \bar{z}, \operatorname{erf} z \text{ reell}\}$. H. Tietz.

Hiong, King-lai: Deux théorèmes sur les fonctions holomorphes dans un cercle avec des valeurs exceptionnelles. Science Record, n. Ser. 2, 239—243 (1958).

Soit, dans $|z| < 1$, une fonction $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ holomorphe et ne s'annulant pas; si $N(r, 1/(f-1)) \leq \lambda \log 1/(1-r)$ et si $c_0 \neq 1$, il existe pour $|c_1|$ une borne supérieure ne dépendant que de $|c_0|$ et de λ ; si $N(r, 1/(f'-1)) \leq \lambda \log 1/(1-r)$ et si $c_1 \neq 1$, il existe pour $|c_1|$ et $|c_2|$ des bornes supérieures ne dépendant que de $|c_0|$ et de λ . J. Dufresnoy.

Hiong, King-lai: Sur le cycle de Montel-Miranda dans la théorie des familles normales. Sci. Sinica 7, 987—1000 (1958).

L'A. donne une démonstration nouvelle du critère de Montel-Miranda: les fonctions holomorphes dans le cercle unité, ne s'y annulant pas et dont la dérivée d'ordre k ne prend pas la valeur 1, constituent une famille normale. Il démontre pour ces fonctions des théorèmes analogues à ceux de Schottky et de Landau; il établit qu'il n'existe pas de fonction entière non constante qui ne s'annule pas et dont la dérivée d'ordre k ne prenne pas la valeur 1. Ces résultats, qui constituent le cycle de Montel-Miranda, sont ensuite étendus au cas où la dérivée d'ordre k prend q fois au plus la valeur 1. J. Dufresnoy.

Hiong, King-lai: Sur la normalité des familles de fonctions holomorphes en rapport avec la théorie des défauts. *Sci. Sinica* 8, 1—18 (1959).

Les fonctions $f(z)$ qui, dans $|z| < 1$, sont holomorphes, ne s'annulent pas et présentent 1 comme valeur déficiente avec un défaut supérieur à $\delta_0 > 0$ constituent une famille normale. Il en est de même des fonctions $f(z)$ qui, dans $|z| < 1$, sont holomorphes, ne s'annulent pas et dont les dérivées $f^{(k)}(z)$ d'un ordre k fixé présentent 1 comme valeur déficiente de défaut (absolu ou relatif) supérieur à $\delta_0 > 0$.

J. Dufresnoy.

Hiong, King-lai: Quelques théorèmes sur les fonctions méromorphes admettant un ensemble de valeurs déficientes. *Science Record*, n. Ser. 3, 61—64 (1959).

L'A. donne un certain nombre d'inégalités en termes finis pour les fonctions $f(z)$ méromorphes dans $|z| < 1$, présentant des valeurs déficientes et dont, éventuellement, la dérivée $f'(z)$ présente aussi des valeurs déficientes (relatives), la somme des défauts étant assez grande.

J. Dufresnoy.

Hiong, King-lai: Sur les fonctions méromorphes en rapport avec leurs dérivées. *Sci. Sinica* 7, 661—685 (1958).

L'A. démontre des inégalités qui étendent le second théorème fondamental de Nevanlinna et qui sont sensiblement différentes de celles de Milloux. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe pour $|z| < R \leq \infty$; soient, d'autre part, p valeurs a_μ distinctes, finies, non nulles et q valeurs b_ν distinctes, non nulles; finis si l'on pose

$$E(r) = \sum_1^p N\left(r, \frac{1}{f - a_\mu}\right) + \sum_1^q N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - b_\nu}\right) - \left[N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}\right) \right]$$

on a

$$\begin{aligned} (p + q - 2) T(r, f) &< (k + 2) \bar{N}(r, f) + E(r) + q [N(r, 1/f) - N(r, 1/f^{(k)})] + S(r, f), \\ (p + q) T(r, f) &< 2 \bar{N}(r, f) + E(r) + (q + 1) N(r, 1/f) - (q - 1) N(r, 1/f^{(k)}) + S(r, f), \\ (p + q - 1) T(r, f) &< N(r, f') + N(r, 1/f) + E(r) + S(r, f); \end{aligned}$$

où $S(r, f)$ est un terme complémentaire dont le comportement est analogue à celui du terme complémentaire introduit par Nevanlinna. A partir des résultats précédents l'A. obtient des théorèmes d'unicité et des propriétés des défauts. *J. Dufresnoy.*

Ostrovskij (Ostrovsky), I. V.: On meromorphic functions taking certain values at points lying near a finite system of rays. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 120, 970—972 (1958) [Russisch].

Nimmt die in $|z| < \infty$ meromorphe Funktion $f(z)$ bestimmte Werte in einer bestimmten „Nähe“ eines endlichen Systems von Strahlen (1) $\arg z = \theta_n$, $n = 1, \dots, m$, $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_m < 2\pi$, an und ist einer dieser Werte Ausnahmewert, so ist $T(r, f)$ nur nach der Anordnung der Strahlen (1) abschätzbar. Verf. verallgemeinert die in dieser Hinsicht von R. Nevanlinna (dies. Zbl. 36, 191), M. G. Krein (dies. Zbl. 33, 365), A. Edrei (dies. Zbl. 65, 66) und von ihm selbst (dies. Zbl. 79, 101) festgestellten Ergebnisse. Mit Hilfe einer von R. Nevanlinna in der oben zitierten Arbeit eingeführten Funktion erklärt Verf. die dem Strahlensystem (1) „nahe“ liegende a -Stelle. Er nennt die Zahl a *-Ausnahmewert von $f(z)$, wenn es eine Menge $\mathfrak{B} \subset [0, \infty)$ gibt, so daß $\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-1} \text{mes} \{\mathfrak{B} \cap [0, R]\} < 1$ und

$$\lim_{R \rightarrow \infty, R \in C\mathfrak{B}} m(R, a, f) (T(R, f))^{-1} > 0$$

sind. Nachdem er eine interessante Abschätzung nach oben für $m(R, a, f^{(l)})$, $l \geq 0$, $a \neq 0, \infty$, und für $m(R, f^{(l)}/f^{(l+1)})$ bewiesen hat, stellt Verf. den folgenden Satz auf: Es sei eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt: A) 1. Die Nullstellen und Pole von $f(z)$ liegen „nahe“ bei den Strahlen (1). 2. Wenigstens eine der Funktionen

$f^{(l)}(z)$, $l \geq 0$, hat einen von 0 und ∞ verschiedenen *-Ausnahmewert. B) 1. Die Pole von $f(z)$ und die a -Stellen von $f^{(l)}(z)$, für ein bestimmtes $a \neq 0, \infty$ und eine gewisse ganze Zahl $l \geq 0$, liegen „nahe“ bei den Strahlen (1). 2. Der Nullwert ist ein *-Ausnahmewert von $f(z)$. C) 1. Die Nullstellen und die Pole von $f(z)$ und die a -Stellen von $f^{(l)}(z)$ für ein bestimmtes $a \neq 0, \infty$ und eine gewisse ganze Zahl $l \geq 0$, liegen „nahe“ bei den Strahlen (1). 2. ∞ ist ein *-Ausnahmewert von $f(z)$. — Dann ist die Ordnung von $f(z)$ endlich und überschreitet nicht eine Größe χ die von $\gamma = \min_{1 \leq n \leq m} (\theta_{n+1} - \theta_n)$, $\theta_{m+1} = 2\pi + \theta_1$, und von der „Nähe“ der ent-

sprechenden Punkte in bezug auf das Strahlensystem (1) abhängt. — Verf. betrachtet auch Fälle, in denen $T(R, f)$ höchstens dem mittleren bzw. niedrigsten Typus der Ordnung χ angehört. Indem er in A), B) bzw. C) die Voraussetzung der „Nähe“ durch die Zugehörigkeit und den *-Defekt durch den Nevanlinnaschen Defekt ersetzt, zeigt er mit Bezug auf die in $|z| < 1$ meromorphen Funktionen, die eine der so veränderten Bedingungen A), B) oder C) erfüllen, daß $\lim_{r \rightarrow 1} \frac{\log T(r, f)}{\log(1/(1-r))} \leq 4$ ist, und führt auch die Möglichkeit der Verallgemeinerung dieses Satzes auf den Begriff der „Nähe“ und den *-Defekt an.

C. Andreian Cazacu.

Lohwater, A. J.: The cluster sets of meromorphic functions. 13. Skand. Mat.-Kongr., Helsinki 1957, 171—177 (1958).

This is a survey of the theory of cluster sets. The author treats mainly the case of meromorphic functions in the unit circle. Collingwood's result on prime ends (this Zbl. 72, 76), Bagemihl's result on ambiguous points of arbitrary functions (this Zbl. 65, 66) and the reviewer's results on a new boundary cluster set (this Zbl. 64, 318) are cited. A new theorem of the author is announced and some problems are raised.

K. Noshiro.

Lehto, Olli: The spherical derivative of meromorphic functions in the neighbourhood of an isolated singularity. Commentarii math. Helvet. 33, 196—205 (1959).

Es sei $f(z)$ in einer Umgebung der wesentlichen Singularität $z = 0$ meromorph. In bezug auf die sphärische Ableitung $\varrho(f(z)) = |f'(z)|/(1 + |f|^2)$ zeigt Verf.: je größere Werte ϱ annimmt, wenn $z \rightarrow 0$, in desto kleineren Teilen der Umgebungen von $z = 0$ gilt schon die Aussage von Picard. In der Tat ist erstens (vgl. Verf. dies. Zbl. 78, 63; 79, 297) $\limsup |z| \varrho \geq \frac{1}{2}$ für $z \rightarrow 0$, mit Gleichheit für $f = \Pi(z - a_n)/(z + a_n)$, sobald $|a_{n+1}| = o(|a_n|)$. Für die verwandte Funktion $f = \Pi(1 - a_n/z)$ mit ∞ als Picardschem Ausnahmewert gilt dagegen $\limsup |z|^p \varrho = \infty$ für jedes p , und zwar schon für $|a_{n+1}| \leq \theta |a_n|$, $\theta < 1$. Hierbei gilt die Picardsche Aussage schon in jeder unendlichen Teilmenge der Kreismenge $|z - a_n| < \varepsilon |a_n|^p$ mit beliebigem $\varepsilon > 0$. Das ergibt sich aus dem allgemeineren Satz: Ist $h(r) = O(r)$ beliebig positiv, so ergibt die Gültigkeit von $\lim h(|z_n|) \varrho(f(z_n)) = \infty$ auf einer geeigneten Folge $z_n \rightarrow 0$, daß auf der Vereinigungsmenge jeder unendlichen Teilfolge der Kreismenge $|z - z_n| < \varepsilon h(|z_n|)$ die Funktion $f(z)$ alle Werte außer höchstens zwei annimmt. Die Umkehrung gilt auch. Die Arbeit enthält schließlich ein Kriterium für die Existenz Juliascher Radien für im Einheitskreis meromorphe Funktionen.

G. af Hällström.

Pogorzelski, W.: Problèmes aux limites discontinus dans la théorie des fonctions analytiques. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. 7, 311—317 (1959).

In Anknüpfung an frühere Arbeiten untersucht Verf. den Fall, daß die Randlimites analytischer Funktionen auf einem System L von orientierten Kurvenbögen Unstetigkeitspunkte zulassen. Es werden zunächst gewisse Klassen von Funktionen $\varphi(\tau)$ untersucht, die in den Umgebungen der Unstetigkeitspunkte (c_1, \dots, c_p) gewissen Abschätzungen genügen, und Aussagen über das Verhalten

der damit verknüpften Ausdrücke der Form

$$\int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} \quad \text{und} \quad \prod_{v=1}^p |t - c_v|^{\nu_v} \int_L \left[\prod_{v=1}^p (t - c_v)^{\nu_v} (\tau - t) \right]^{-1} \varphi(\tau) d\tau$$

gewonnen (die Integrale werden hierbei im Cauchyschen Sinne verstanden, die ν_v sind gewisse komplexe Konstanten. — Ohne Beweise!). Unter Heranziehung einer Methode, die analog ist zu der von Muschelišvili benutzten, gewinnt Verf. dann die „allgemeine“ Lösung des (linearen) Hilbertschen Problems für holomorphe Funktionen $\Phi(z)$ bei Randlimites mit Unstetigkeitspunkten c_1, \dots, c_p : Die in der „Sprungbedingung“ $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t)$ auftretende Funktion $G(t)$, die im Innern eines jeden Bogens von L definiert ist und dort einer H-Bedingung genügt, kann bei Annäherung von t auf verschiedenen Bögen gegen denselben (gemeinsamen) Endpunkt c_v verschiedene Limites besitzen. Eine Verallgemeinerung auf den Fall eines nichtlinearen „unstetigen“ Hilbertschen Problems für Systeme holomorpher Funktionen schließt sich an. Es wird auf ein nichtlineares (stark-singuläres) Integralgleichungssystem zurückgeführt und mittels von Verf. schon früher benutzter Methoden behandelt. Abschließend untersucht Verf. das entsprechende („unstetige“) Riemannsche Problem und führt es durch eine von dem Muschelišvilischen Vorgehen etwas abweichende Methode auf das Hilbertsche Problem zurück.

H. Pachale.

Shibata, Kēichi: On approximation of quasi-conformal mapping. Proc. Japan Acad. 35, 22—24 (1959).

Verf. beweist folgenden Approximationssatz der allgemeinen (nicht notwendig differenzierbaren) quasikonformen Abbildungen durch glatte Abbildungen, unter der Voraussetzung, daß die Bilder einer endlichen Zahl von Randpunkten gegeben sind: Es sei $w = f(z)$ eine quasikonforme Abbildung im Sinne von Pfluger und Ahlfors, die $\text{Im } z > 0$ auf $\text{Im } w > 0$ topologisch abbildet. Sind $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ Punkte auf $\text{Im } z = 0$ und $f(x_v) = u_v$ ($v = 1, \dots, k$), so gibt es eine Folge $\{f_n(z)\}$ von quasikonformen Abbildungen der Klasse C^1 von $\text{Im } z > 0$ auf $\text{Im } w > 0$ mit der Eigenschaft: die $f_n(z)$ streben gleichmäßig in $\text{Im } z > 0$ gegen $f(z)$, falls $n \rightarrow \infty$; $f_n(x_v) = u_v$ ($v = 1, \dots, k$); und $|\partial f_n / \partial z|$ hat eine positive nur von n abhängige untere Grenze. Dieser Satz wird durch Induktion in bezug auf k mit Hilfe des Existenzsatzes von Ahlfors (dies. Zbl. 67, 307) und einigen Ergebnissen des Verf. über die Konvergenz der Folgen von quasikonformen Abbildungen (dies. Zbl. 73, 69) bewiesen.

C. Andreian Cazacu.

Pólya, Georges et Menahem Schiffer: Sur la représentation conforme de l'extérieur d'une courbe fermée convexe. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 2837—2839 (1959).

Sia C una curva convessa chiusa, L il suo perimetro, r il suo raggio conforme esterno. Questo \bar{r} è così definito [v. G. Pólya e G. Szegő, Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics (questo Zbl. 44, 383), p. 2]: Si rappresenti conformemente il dominio esterno a C sul dominio esterno ad un circolo, in modo che si corrispondano i punti all'infinito, e il rapporto lineare di trasformazione all'infinito sia 1; il raggio del cerchio così ottenuto è \bar{r} . Gli AA. dimostrano, in questa Nota, che si ha la disuguaglianza $L \leq 8\bar{r}$. La dimostrazione è fatta per i poligoni convessi; quindi poi la disuguaglianza vale per una curva convessa qualunque. Questa disuguaglianza era stata enunciata finora come una congettura, ma non dimostrata. È dimostrato anche che se si fissa, come è lecito, che sia $\bar{r} = 1$, il perimetro L raggiunge il suo massimo valore 8 per il triangolo che degenera in un segmento di lunghezza 4. Gli AA. considerano anche la disuguaglianza, già nota, $2\pi \bar{r} \leq L$, e dimostrano che, fissato \bar{r} , L raggiunge il suo minimo per il triangolo equilatero.

F. Cecioni.

Collingwood, E. F. and G. Piranian: The structure and distribution of prime ends. Arch. der Math. 10, 379—386 (1959).

Verf. kommen zu einer Einteilung der Hauptpunkte eines Primendes durch die Bemerkung, daß ein Punkt von einer Seite her Hauptpunkt und von der anderen her Nebenpunkt sein kann. Es werden sogen. Seitenketten von Querschnitten betrachtet, die gegen ein Primende P und einen Punkt p des Primendes P konvergieren, aber von jeder das Primende P definierenden Kette einen positiven Abstand (im Sinne der natürlichen Metrik) haben. Diese Ketten lassen sich nach Rechts- und Linksseitigkeit und nach Äquivalenz klassifizieren und anordnen. Es gibt einfach zusammenhängende Gebiete mit ausschließlich Primenden zweiter und dritter Art, bei denen alle Punkte der Primenden dritter Art von der angegebenen Art sind. Die funktionentheoretische Bedeutung dieser Unterscheidung wird erörtert. Auch wird ein Beispiel zum Franklschen Satz (dies. Zbl. 6, 65) angegeben, bei dem jedes Primende einen Durchmesser ≥ 1 hat und alle Primenden disjunkt sind. *Hans Freudenthal.*

Bader, Roger et Werner Sörensen: Sur le problème de Cousin pour une surface de Riemann non compacte. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 250/1, 8 p. (1958).

In dieser Arbeit wird das Problem von Cousin gelöst, welches die Aufgabe stellt, auf einer Riemannschen Fläche S ein harmonisches Differential zu konstruieren, das in bestimmten Punkten gegebene Singularitäten hat. Ist S ein Gebiet mit regulärem Rand auf einer Riemannschen Fläche, so werden zusätzliche Bedingungen angegeben, damit das Problem nur eine einzige Lösung hat. *C. Constantinescu.*

Teleman, C.: Une classe de fonctions analytiques d'une surface de Riemann, généralisant les intégrales abéliennes. Acad. Republ. popul. Romine, Studii Cerc. mat. 8, 163—182, russ. und französ. Zusammenfassg. 179—182 (1957) [Rumänisch].

Es handelt sich um Funktionen h auf geschlossenen Riemannschen Flächen R vom Geschlecht > 0 , deren Zweige durch gebrochene lineare Transformationen verbunden sind, die keine anderen Singularitäten als Pole besitzen und überall lokal schlicht sind. — Es wird bewiesen, daß die Bestimmung der Funktionen h auf R auf die Bestimmung der regulären quadratischen Differentiale herauskommt. Es werden zunächst diese quadratischen Differentiale für ein durch eine gegebene algebraische Kurve bestimmtes R untersucht. Schließlich wird gezeigt, daß die Funktionen h Integrale einer algebraischen Differentialgleichung sind, die bestimmt wird. Es folgen noch geometrische Betrachtungen und Anwendung auf die Klein-Clifford-schen Raumformen. *S. Stoilow.*

Teleman, C.: Sur les structures homographiques d'une surface de Riemann. Commentarii math. Helvet. 33, 206—211 (1959).

R sei eine Riemannsche Fläche, R_∞ die universelle Überlagerungsfläche. Ein System von $p + 1$ auf R_∞ meromorphen Funktionen, deren Wronski-Determinante nirgends verschwindet, definiert eine „homographische Struktur p -ter Ordnung auf R “, wenn sich die Funktionen des Systems bei den Decktransformationen bis auf einen Faktor linear transformieren; äquivalente Systeme bestimmen dieselbe homographische Struktur. Die homographischen Strukturen auf R entsprechen eindeutig den Systemen (w_2, \dots, w_{p+1}) , wobei w_i eine holomorphe Differentialform p -ter Ordnung auf R ist. *H. Tietz.*

Modulfunktionen. Automorphe Funktionen. Fastperiodische Funktionen:

Eichler, M.: Quadratische Formen und Modulfunktionen. Acta arithmetica 4, 217—239 (1958).

Verf. gibt einen Überblick über die neuesten Beiträge zur Theorie der Modulfunktionen und ihre Anwendungen auf Probleme der Zahlentheorie quadratischer Formen. Viele Ergebnisse aus früher veröffentlichten Arbeiten des Verf. findet man hier zusammengestellt. Im ersten § dieser Abhandlung gibt Verf. einen Beweis für die Existenz normaler Integranden dritter Gattung; man vergleiche für die Kon-

onstruktion Integranden erster und zweiter Gattung (M. Eichler, dies. Zbl. 80, 60). Die Konstruktion gelingt mittels expliziter Angabe von Reihen von Abelschen Integralen. Im zweiten § werden die Hecke-Korrespondenzen T_m als lineare Operatoren im Raum der Modulformen erster Gattung interpretiert und auch daneben als Operatoren im Raum der Abelschen Integrale. Das erste Problem ist jetzt, die Spuren dieser Darstellungen zu berechnen. Verf. benutzt die Bestimmung der Anzahl der Elemente mit vorgegebener Norm und Spur in einer Quaternionen-Algebra [M. Eichler, J. reine angew. Math. 195, 127—151 (1955)]. Im dritten § werden die Anzahlmatrizen eingeführt. [Auf Seite 231 gibt es leider einige Druckfehler bei der Definition des Symbols $P_0(m)$.] Mit Hilfe dieser Anzahlmatrizen konstruiert man einfach die Thetafunktionen. Benutzt man eine Verallgemeinerung dieser Anzahlmatrizen, so findet man Thetareihen mit Kugelfunktionen. Die Spuren dieser Anzahlmatrizen berechnet man auf gleiche Weise, wie oben schon angegeben worden ist. Im letzten § gibt Verf. sieben in diesem Augenblicke noch ungelöste Probleme an, die man vielleicht jetzt zu lösen versuchen kann. Ich nenne nur die Vermutung über Koeffizienten der Modulformen erster Gattung (z. B. auch die Ramanujansche Vermutung $|\tau(p)| < 2 p^{11/2}$). Es kommt auf die Abschätzung der Eigenwerte der Darstellungsmatrizen von T_n an. Weiter gibt es Probleme bezüglich der Darstellung von Modulformen durch Thetareihen [Für den Hauptcharakter $\chi = 1$ s. M. Eichler, J. reine angew. Math. 195, 156—171 (1955)]. F. van der Blij.

Kaufhold, Günter: Dirichletsche Reihe mit Funktionalgleichung in der Theorie der Modulfunktion 2. Grades. Math. Ann. 137, 454—476 (1959).

Verf. betrachtet die von C. L. Siegel eingeführte Reihe

$$\varphi(s) = |Y|^{s/2} \sum_{A, B} \text{abs.}(AZ + B)^s$$

als Funktion der komplexen Variablen s . Dabei ist $Z = X + iY$ eine n -reihige komplexe symmetrische variable Matrix, deren Imaginärteil Y die Determinante $|Y|$ hat und positiv-definit ist. In $\varphi(s)$ wird die Summation über alle ganz-rationalen teilerfremden positiven symmetrischen Matrizenpaare A, B erstreckt, und abs. bedeutet den absoluten Betrag der Determinante. Die Konvergenzabszisse von $\varphi(s)$ ist bekanntlich $s = n + 1$. Im Fall $n = 2$ zeigt Verf., daß $\varphi(s)$ eine meromorphe Funktion von s definiert, die in $s = 3$ einen Pol erster Ordnung vom Residuum $90\pi^{-2}$ besitzt. Darüber hinaus beweist er für $n = 2$ die Funktionalgleichung $\omega(s) = \omega(3-s)$, wobei $\omega(s) = \varrho(s)\varrho(2s-2)\varphi(s)$ und $\varrho(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(\frac{1}{2}s) \zeta(s)$ mit der Riemannschen ζ -Funktion $\zeta(s)$ gesetzt ist. H. Braun.

Wohlfahrt, Klaus: Über Dedekindsche Summen und Untergruppen der Modulgruppe. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 23, H. Hasse zum 60. Geburtstag, 5—10 (1959).

In der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts haben Klein, Fricke u. a. Nichtkongruenzuntergruppen der Modulgruppe von endlichem Index angegeben. Sie wurden jeweils als Invarianzgruppen gewisser Ausdrücke in den Moduln elliptischer Integrale definiert. Verf. benutzt statt dessen die Dedekindschen Summen und erhält eine Reihe derartiger Gruppen in arithmetisch übersichtlicher Weise. Unter Benutzung des von Dedekind explizit angegebenen Multiplikatorsystems der reellen Dimension $-r$ zur Modulgruppe Γ wird ein Abelscher Charakter χ auf $\Gamma_0(n)$ bestimmt. Verf. zeigt: Ist n eine Primzahl und $r = 12q^{-1}$ mit einer Primzahl q , für die $n^2 \not\equiv 0, 1 \pmod{q}$ ist, so definiert $\chi(L) = 1$, $L \in \Gamma_0(n)$, eine Untergruppe von endlichem Index, die keine Kongruenzuntergruppe der Modulgruppe ist. Verf. gibt außerdem einen sehr einfachen Beweis für den schon von Fricke ausgesprochenen Satz, daß die genaue Stufe einer Kongruenzuntergruppe von Γ gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Spitzenbreiten ihres Fundamentalbereichs ist.

K.-B. Gundlach.

- Legendre, Robert: Fonctions fuchsienues symétriques de deuxième famille. C. r. Acad. Sci., Paris 247, 770—772 (1958).
- Legendre, Robert: Fonctions fuchsienues de la deuxième famille. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 3097—3098 (1959).

In der oberen Halbebene sei ein Polygon mit den Spitzen $\tau_0 = \infty$, $\tau_1 = 0$, ..., $\tau_{n-1} = 1$ gegeben. Γ bezeichne die zu diesem Polygon gehörige Grenzkreisgruppe 1. Art. Verf. untersucht die Eisensteinreihen der Dimension -4 zu Γ in den Spitzen τ_j und zeigt durch Zurückführung auf symmetrische Polynome, daß jede automorphe Funktion zu Γ sich rational durch diese Eisensteinreihen darstellen läßt.

M. Koecher.

- Bellman, Richard: Functional equations and theta-functions. I. Proc. nat. Acad. Sci. USA 45, 353—354 (1959).

Starting from the characterization of theta functions by their properties as quasi double periodic functions with prescribed period factors, the author remarks that many formulas, such as the functional equations and the theta square formulas, can be proved in this way. Since this definition is often used in the theory of abelian functions one can find some proofs of this in classical papers [e. g. H. Weber, Lehrbuch der Algebra, Band III: Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen. Braunschweig 1908]. The author announces applications to higher dimensional theta functions, such as those of Hecke and Siegel.

F. van der Blij.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

- Mitrinović, D. S.: Compléments au traité de Kamke. Publ. Fac. Électrotechn. Univ. Belgrade, Sér. Math. Phys. Nr. 27, 4 p. (1959).

Die Arbeit enthält Ergänzungen zu dem Abschnitt der durch Quadraturen lösbaren Differentialgleichungen des Buches E. Kamke, Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen Bd. 1, 6. Aufl., Leipzig 1959.

E. Kamke.

- Consiglio, A.: Trasformazioni semicanoniche e trasformazioni canoniche. Atti Accad. Gioenia Sci. natur. Catania, VI. Ser. 11, 173—182, französ., engl. und deutsche Zusammenfassg. 183 (1959).

Sei $\dot{p}_h = \varphi_{\delta_h}(p_1, p_2, \dots, p_{2n}; t)$, $h = 1, 2, \dots, 2n$, $\delta_h = h - (-1)^h$, ein Normalsystem von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit der unabhängigen Veränderlichen t . Sei weiter $p_j = \psi_{\delta_j}(q_1, q_2, \dots, q_{2n}; t)$, $j = 1, 2, \dots, 2n$, eine Punkttransformation des R_{2n} , die in einem bestimmten Bereich eine nicht identisch verschwindende Funktionaldeterminante $\Delta = |\partial\psi/\partial q|$ besitzt. Bezeichnet man mit Δ_h jene $2n$ -reihige Determinante, die aus Δ dadurch entsteht, daß die h -te Kolonne durch $\psi_j - \partial\psi_j/\partial t$, ($j = 1, 2, \dots, 2n$) ersetzt wird, so kann das vorgegebene Normalsystem vermöge dieser Transformation auf die Form $\dot{q}_h = \Delta_h/\Delta$ ($h = 1, 2, \dots, 2n$) gebracht werden. Die „charakteristische Bedingung“ dafür, daß dieses letzte System ein kanonisches ist, besteht in dem Erfülltsein der $\binom{2n}{2}$ Gleichungen $\partial(\Delta_{\delta_s}/\Delta)/\partial q_r = (-1)^{r+s} \partial(\Delta_{\delta_r}/\Delta)/\partial q_s$, wo $r \neq s$, $= 1, 2, \dots, 2n$. Solche „halbkanonischen Transformationen“ vermögen ein vorgelegtes Normalsystem auf die kanonische Form zu transformieren. Auf die Frage, ob die charakteristische Bedingung notwendig und hinreichend ist, wird nicht eingegangen. Spezialisierung auf lineare sowie binäre Transformationen.

E. Hardtwig.

- Ghosh, N. N.: Studies in contact transformation over a complex space. Bull. Calcutta math. Soc. 50, 94—98 (1958).

$2n$ canonical variables q^r, p^r are considered as coordinates of a point in a complex space, $x^r = q^r + ip^r$ ($r = 1, 2, \dots, n$). The theory of contact transformation is developed by considering it as a special transformation in a complex space which leaves the components of an elementary complex tensor invariant. The Poisson and

Lagrange conditions are established in the complex space and some properties of the metric tensor and metrical affinities under a contact transformation are demonstrated. It is shown that the canonical equations of motion of a holonomical dynamical system can be written in a complex space in a simple covariant vector form, invariant with respect to contact transformations. *R. Stojanovitch.*

Gröbner, Wolfgang: Die Darstellung der Lösungen eines Systems von Differentialgleichungen durch Liesche Reihen. Arch. der Math. 9, Festschrift Hellmuth Kneser, 1952—93 (1958).

Es sei $D = \sum_{i=1}^n \vartheta_i(z_i, \dots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_i}$ ein linearer Differentialoperator. Eine Liesche Reihe ist eine Reihe der Form $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} D^\nu F(z_j)$. Verf. untersucht zunächst die Konvergenz und gibt eine Majorante an. Für analytische F stellt sie also analytische Funktionen dar. Er gibt weiter eine Reihe interessanter Eigenschaften, z. B. die Vertauschbarkeit des Funktionszeichens mit dem Symbolzeichen $L \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} (tD)^\nu$. Die Funktionen $Z_i = L z_i$ genügen dem System $\partial Z_i / \partial t = \vartheta_i(Z_j)$ von linearen Differentialgleichungen mit den Anfangswerten $Z_i = z_i$ für $t = 0$. Die analytische Fortsetzung stellt sich besonders einfach dar. — Mit Hilfe dieser Lieschen Reihen lassen sich nun Systeme linearer Differentialgleichungen leicht formal auflösen. Verf. zeigt dies an Beispielen. Wichtig ist dabei der Ring der Charakteristiken, derjenigen Funktionen F , für die $DF = 0$ ist. In einer anderen Arbeit (s. dies. Zbl. 86, 142) gibt Verf. wichtige Anwendungen der Lieschen Reihen auf die algebraische Geometrie. *O.-H. Keller.*

Pipes, Louis A.: Difference equations and their applications. Math. Mag. 32, 231—246 (1959).

Eine kurze Einführung in die Technik der Auflösung linearer Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten. Verf. zählt außerdem einige Formeln des symbolischen Differenzenkalküls auf, ohne sie zu benutzen und ohne sie zu begründen. *W. Hahn.*

Roşu, Alexandru Al.: Operatorenrechnung und Integration von Systemen linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Gaz. Mat. Fiz., Bucureşti, Ser. A 11 (64), 130—134, französ. und russ. Zusammenfassg. 134 (1959) [Rumänisch]. Exposé systématique de résultats connus. Aus der französ. Zusammenfassg.

Saito, Tosiya: On Fuchs' relation for the linear differential equation with algebraic coefficients. Kodai math. Sem. Reports 10, 101—104 (1958).

Verf. verallgemeinert eine Formel, die aus der Theorie der Differentialgleichungen vom Fuchsschen Typus bekannt ist (siehe etwa Ince, Ordinary Differential Equations, London 1927, p. 371). Nach dieser Formel, die auch „Fuchssche Formel“ genannt wird, ist die Summe der Wurzeln der determinierenden Gleichungen für die Stellen der Bestimmtheit gleich $\frac{1}{2} n(n-1)(m-2)$. Hier gibt n die Ordnung der Differentialgleichung und m die Anzahl der Stellen der Bestimmtheit an. Im Gegensatz zur herkömmlichen Theorie, bei der die Koeffizienten der homogenen linearen Differentialgleichung rationale Funktionen sind, wird die Differentialgleichung $v^{(n)} + p_1 v^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} v' + p_n v = 0$ betrachtet, deren Koeffizienten eindeutige meromorphe Funktionen auf r -blättrigen Riemannschen Flächen vom Geschlecht p sind. Unter gewissen Voraussetzungen über die Lage der Verzweigungspunkte und der Stellen der Bestimmtheit wird dann gezeigt, daß die oben genannte Summe der Wurzeln gleich $n(n-1)(\frac{1}{2}m + p - 1)$ ist. *Hans Schubart.*

Guderley, Karl G.: Asymptotic representations for differential equations with a regular singular point. Arch. rat. Mech. Analysis 3, 206—218 (1959).

Betrachtet werden die Differentialgleichungen $y'' - \lambda^2(x-1)^{-2}g(x, \lambda^{-1})y = 0$ und $y'' - \lambda^2x(x-1)^{-2}g(x, \lambda^{-1})y = 0$, wobei $g(x, \lambda^{-1})$ eine eindeutige analytische Funktion von x und λ^{-1} ist, die in dem interessierenden Bereich der komplexen x -Ebene zumindest für große λ keine Singularitäten und Nullstellen besitzt. In der Umgebung von $x = 1$ gibt es bekanntlich zwei linear unabhängige Lösungen der Form $y_i = (x-1)^{c_i} P_i(x-1)$, $i = 1, 2$, wobei die $P_i(x-1)$ in $x = 1$ regulär sind, sofern $c_1 - c_2$ keine ganze Zahl ist. Für diese Lösungen werden für große λ asymptotische Darstellungen hergeleitet und deren Gültigkeitsbereiche an Hand von zahlreichen Abbildungen diskutiert. Die Arbeit ist allerdings nur ein Bericht, bei näheren Einzelheiten wird auf „Wright Air Development Center TR 58, 617“ verwiesen.

L. Berg.

Hartman, Philip: On the ratio $f(t + cf^{-\alpha}(t))/f(t)$. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 14, 57—61 (1959).

The condition (1) $f(t + cf^{-\alpha}(t))/f(t) \rightarrow 1$ for $t \rightarrow \infty$ and its integrated form (2) $\log \frac{f(u)}{f(v)} \left(1 + \int_u^v f^\alpha(s) ds \right) \rightarrow 0$ for $u, v \rightarrow \infty$ frequently occur in the asymptotic integration theory of $d^2x/dt^2 \pm f(t)x = 0$. There is proved a theorem concerning the equivalence of (1) and (2): Let $f(t)$ be a positive continuous function for $t \geq 0$. Let $m(t)$ be a positive continuous function for $t > 0$ such that, for some non-negative constants C and γ , $[m(v)/m(u)]^{\pm 1} \leq C(v/u)^\gamma$ for $0 < u < v < \infty$. Necessary and sufficient for

$$\text{l. u. b.}_{u < v < \infty} \left| \log \frac{f(u)}{f(v)} \right| \left(1 + \int_u^v m(f(s)) ds \right) \rightarrow 0$$

as $u \rightarrow \infty$ is that $\int_u^\infty m(f(s)) ds = \infty$ and that, uniformly on every bounded c -set, $f(t + c/m(f(t)))/f(t) \rightarrow 1$ as $\min(t, t + c/m(f(t))) \rightarrow \infty$.

M. Ráb.

Hartman, Philip: On oscillators with large frequencies. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 14, 62—65 (1959).

A simple proof is given for the theorem of G. Armellini (this Zbl. 11, 209), G. Sansone and L. Tonelli (this Zbl. 16, 112) that if $q(t)$ is continuous for $t \geq 0$, is monotone, $q(t) \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow \infty$ and $\log q(t)$ is of "regular growth", then all solutions of $d^2x/dt^2 + q(t)x = 0$ tend to 0 as $t \rightarrow \infty$.

M. Ráb.

Greguš, M.: Bemerkungen zu den oscillatorischen Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung dritter Ordnung. Acta Fac. Rer. Natur. Univ. Comenian., Mathematica 3, 23—27, russische und deutsche Zusammenfassg. 28 (1958) [Slowakisch].

Verf. studiert die Verteilung der Nullstellen von Lösungen der Differentialgleichung (1) $y''' + 2A(x)y' + [A'(x) + b(x)]y = 0$, $A'(x)$, $b(x)$ stetig in $I = (-\infty, \infty)$. Man beweist: Bezeichnen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei unabhängige Lösungen von (1), deren Nullstellen in I einander trennen, so genügt die Funktion $z(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ der Differentialgleichung $[y'/\omega]' + [2A/\omega + \omega''/\omega^2]y = 0$, wobei ω die Wronskische Determinante von $y_1(x)$ und $y_2(x)$ bedeutet. Im weiteren wird eine Abschätzung für die Entfernung zweier benachbarten Nullstellen einer Lösung von (1) mit Hilfe der Lösung mit einer zweifachen Nullstelle abgeleitet.

M. Ráb.

Reghiş, M.: Sur la „stabilité d'après la première approximation“. Lucrările şti. Inst. Ped. Timişoara, Mat.-Fiz. 1958, 135—143, französ. und russ. Zusammenfassg. 143—144 (1959) [Rumänisch].

L'A. prouve un théorème d'existence d'une fonction de Liapounoff pour un système linéaire d'équations différentielles dans le cas de la stabilité asymptotique non-uniforme: on suppose que la matrice fondamentale de solutions $X(t, t_0)$ admet

une évaluation de la forme $|X(t, t_0)| \leq A(\gamma) C(t_0) e^{-\gamma(t-t_0)}$, $t \geq t_0$. A l'aide de cette fonction on retrouve un théorème de Malkin sur la stabilité d'après la première approximation.

A. Halanay.

Koval', P. I.: Asymptotic behaviour of the solutions of almost triangular systems of differential and difference linear equations. Doklady Akad. Nauk SSSR 124, 1203—1206 (1959) [Russisch].

Ohne Beweis werden Bedingungen angegeben, unter denen eine Lösung des Systems von Differenzgleichungen $X_{s+1} = (R_s + C_s) X_s$ ($s = s_0, s_0 + 1, \dots$) für $s \rightarrow \infty$ asymptotisch gleich einer Lösung des Systems $Y_{s+1} = R_s Y_s$ ist, wobei R_s eine gegebene untere Dreiecksmatrix ist. Ganz entsprechende Bedingungen gelten auch für Systeme von Differentialgleichungen. Allgemeinere Systeme, bei denen die erwähnten Bedingungen nicht erfüllt sind, kann man unter gewissen Voraussetzungen durch eine lineare Substitution auf den vorhergehenden Fall zurückführen. Es werden auch drei Beispiele angegeben.

L. Berg.

Pliss, V. A.: Ajzerman's problem in the case of three simultaneous differential equations. Doklady Akad. Nauk SSSR 121, 422—425 (1958) [Russisch].

Das System ist von der Form $\dot{x}_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k$ ($i = 1, 2, 3$), wobei a_{11} als einziger Koeffizient nicht konstant ist. Die auf nichtlineare Terme verallgemeinerten Hurwitzschen Ungleichungen seien erfüllt. Verf. teilt ohne Beweis 13 Sätze mit, die teils hinreichende Bedingungen für die Stabilität der trivialen Lösung im ganzen geben, teils hinreichende Bedingungen dafür, daß nicht alle Lösungen gegen Null streben. Die verallgemeinerten Hurwitzbedingungen sind also nicht hinreichend für asymptotische Stabilität im Ganzen; die sogenannte „Ajzermansche Vermutung“ trifft mithin schon für Systeme des betrachteten Typs nicht zu. Vgl. auch die inzwischen erschienene und nachstehend besprochene Monographie des Verf.

W. Hahn.

● **Pliss, V. A.:** Einige Probleme aus der Theorie der Stabilität einer Bewegung im Ganzen. [Nekotorye problemy teorii ustojčivosti dviženija v celom.] Leningrad: Verlag der Universität 1958. 183 S. R. 8,40 [Russisch].

Verf. widmet seine Abhandlung einer ganz speziellen Frage aus der Stabilitätstheorie, nämlich dem Ajzermanschen Problem: „Gegeben sei das Differentialgleichungssystem $D(n; f(x_k))$

$$\dot{x}_1 = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq k)}}^n a_{1j} x_j + f(x_k); \quad \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (i = 2, \dots, n),$$

wobei die stetige Nichtlinearität $f(x_k)$ die verallgemeinerten Hurwitzbedingungen erfüllt, d. h. $\alpha x_k^2 < f(x_k) x_k < \beta x_k^2$, während das lineare System $D(n; F x_k)$ bei beliebiger Konstante $F \in (\alpha, \beta)$ lauter charakteristische Wurzeln mit negativen Realteilen besitzt. Ist dann die triviale Lösung des nichtlinearen Systems $D(n; f(x_k))$ asymptotisch stabil im Ganzen? Dabei beschränkt sich Verf. auf den Sonderfall $n = 3, k = 1$. In Kapitel 1 bringt er ein für die weiteren Überlegungen nützliches notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, daß die triviale Lösung $x_1 = \dots = x_n = 0$ des allgemeinen Differentialgleichungssystems $\dot{x}_s = X_s(x_1, \dots, x_n)$ asymptotisch stabil im Ganzen ist. In Kapitel 2 führt er das System $D(3; f(x_1))$ durch eine Lineartransformation in eine geeignete nur von 4 Koeffizienten abhängige Gestalt über und stellt die verallgemeinerten Hurwitzbedingungen explizit auf; dabei ergibt sich eine große Anzahl von Fallunterscheidungen. Kapitel 3 enthält Hilfsätze über das allgemeine Verhalten der Lösungskurven im Phasenraum, und Kapitel 4 befaßt sich mit dem Ajzermanschen Problem in den einzelnen Fällen, die in Kapitel 2 unterschieden werden. Zum Nachweis der asymptotischen Stabilität im Ganzen bei beliebiger Nichtlinearität, die den verallgemeinerten Hurwitzbedingungen genügt,

verwendet Verf. teilweise eine Ljapunovsche Funktion, die sich aus einer quadratischen Form der Koordinaten und einem Integral der Nichtlinearität additiv zusammensetzt, und teilweise das Kriterium aus Kapitel 1. In Kapitel 5 und 6 werden gewisse Fälle behandelt, in denen es nicht gelingt, bei beliebiger Nichtlinearität die Stabilität im Ganzen nachzuweisen; es werden Bedingungen für die Beschränktheit aller Lösungen angegeben, und unter diesen Bedingungen wird gezeigt, daß entweder die triviale Lösung stabil im Ganzen oder eine periodische Lösung vorhanden ist. In Kapitel 7 untersucht Verf. die übrigen Fälle, in denen Kapitel 4 keine Antwort auf die Ajzermansche Frage gibt, und stellt hinreichende Bedingungen für das Fehlen der Stabilität im Ganzen auf. Er zeigt, daß dann entweder periodische oder monoton ins Unendliche verlaufende Lösungen auftreten. Am Schluß der recht komplizierten Untersuchungen werden in einfacher Gestalt notwendige und hinreichende Bedingungen für die Koeffizienten in $D(3, f(x_1))$ angegeben, unter denen die triviale Lösung bei beliebiger zulässiger Nichtlinearität stabil im Ganzen ist.

R. Reißig.

Pliss, V. A.: The necessary and sufficient conditions for the stability in the whole of a homogeneous system of three differential equations. Doklady Akad. Nauk SSSR 120, 708—710 (1958) [Russisch].

Das System hat die Form $\dot{x} = y - ax - f(x)$, $\dot{y} = z - bf(x)$, $\dot{z} = -cf(x)$ mit $a, b > c$, $b > 0$, $c > 0$, $f(0) = 0$, $xf(x) > 0$ ($x \neq 0$). Die Bedingungen lauten

$$\limsup_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) + \int_0^x f(x) dx \right) = +\infty, \limsup_{x \rightarrow -\infty} \left(-f(x) + \int_0^x f(x) dx \right) = +\infty.$$

Verf. beweist die Notwendigkeit durch Untersuchung der Phasentrajektorien; die Hinlänglichkeit folgt aus früheren Ergebnissen.

W. Hahn.

Seifert, George: The asymptotic behavior of solutions of pendulum-type equations. Ann. of Math., II. Ser. 69, 75—87 (1959).

The author considers $\ddot{\theta} + \alpha f(\theta) \dot{\theta} = g(\theta) + p(t)$ where α is a positive constant, f, g are of class C^1 and periodic of period 2π , $f > 0$, p is continuous, $|p(t)| < k$, and $g_i = g - (-1)^i k_1$, $i = 1, 2$, has simple zeros for $k_1 \in [0, k]$. He shows first that if $p \equiv 0$ and if

$$\alpha > \min_{A > 0} \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| \left(\frac{2\tilde{g}(\theta)}{\sin(\theta/2)} - A^2 \cos(\theta/2) \right) / 2A f(\theta) \right|$$

then for each solution $\theta(t)$ there exist a constant θ_i such that $\theta \rightarrow \theta_i$, $\dot{\theta} \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$. This improves an earlier result where the same assertion is proved provided

$\int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta > 0$ (Lillo and the author, this Zbl. 67, 68). Part II concerns the case

$p \not\equiv 0$. Here it is shown, under supplementary assumptions about the zeros of g_i , that if p is periodic of period τ and α is sufficiently large there exist periodic solutions $\theta_r(t)$ of period τ , $r = 1, \dots, 2m$, of which those with even index are completely stable and those with odd index directly unstable; moreover, every other solution approaches one such periodic solution as $t \rightarrow \infty$.

H. A. Antosiewicz.

Leifschetz, Solomon: The ambiguous case in planar differential systems. Bol. Soc. mat. Mexicana, II. Ser. 2, 63—74 (1957).

The author discusses isolated critical points of systems of the form $\dot{x} = X(x, y)$, $\dot{y} = Y(x, y)$, where X and Y are holomorphic at the origin, by factoring X and Y and considering what happens in the different sectors limited by the branches represented by the vanishing of the factors. This analysis fails in the so called ambiguous case which can be reduced to the case of a sector bounded by two odd branches of $y = 0$ situated in the first quadrant. The paper gives a complete discussion of this case, too involved to be given here.

M. M. Peixoto.

Gregor, Jiří: Dynamische Systeme mit regulärer rechter Seite. II. Pokroky Mat. Fys. Astron. **3**, 266—270 (1958) [Tschechisch].

Fortsetzung einer gleichbenannten Abhandlung (dies. Zbl. **81**, 308). Man betrachtet die Differentialgleichung $(1) \dot{z} = f(z)$ in der Umgebung des Anfangspunktes, wenn $f(z)$ analytisch ist. Die Lösung der Differentialgleichung (1) ist folgendermaßen definiert: Es sei $f(z)$ ein Riemannsches Funktionselement im zweifach zusammenhängenden Gebiet $D: 0 < |z| < r$. Die Funktion $z(t, t_0, a)$ nennt man die Lösung von (1), wenn $z(t, t_0, a) \in D$ für alle $t \in (t_0 - \lambda, t_0 + \lambda)$ und $dz(t, t_0, a)/dt = f[z(t, t_0, a)]$ für ein gewisses analytisches Element $\{F, z(t_0)\} \in f$ gilt. [Alle Begriffe und Bezeichnungen, welche die analytischen Funktionen betreffen, werden aus dem Lehrbuch von Saks-Zygmund, *Analytic functions* (dies. Zbl. **48**, 308) übernommen.]

M. Ráb.

Stokes, Arnold: The application of a fixed-point theorem to a variety of nonlinear stability problems. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **45**, 231—235 (1959).

The author uses the Tychonoff fixed-point theorem to study the existence in the large, boundedness, and stability of solutions of an n -dimensional system of ordinary differential equations. The fixed point theorem is applied to the associated integral operator, and yields a large number of the known results very simply.

E. A. Coddington

Lojasiewicz, S.: Sur les équations du mouvement d'un système holonome. Ann. Polon. math. **5**, 247—256 (1958).

Es werden die zwei Systeme von Differentialgleichungen: $(1) \ddot{x}_i = f_i(t, x_j, \dot{x}_k) - \partial \varphi_\nu / \partial x_i(t, x_j)$ mit den Bedingungen $\varphi_\nu(t, x_i) = 0$ (holonomes System), $(2) \ddot{x}_i = f_i(t, x_j, \dot{x}_k) - M^2 F_i(t, x_j)$ (freies System) ($i, j, k = 1, \dots, n; \nu = 1, \dots, p$) unter folgenden Bedingungen behandelt: die $\varphi_\nu(t, x_j)$ sind in einem Gebiet (t, x_j) definierte Funktionen, und die Matrix $\{\partial \varphi_\nu / \partial x_j\}$ hat für jeden Punkt der mit den Gleichungen $\varphi_\nu(t, x_1, \dots, x_n) = 0$ ($\nu = 1, \dots, p$) dargestellten Hyperfläche $S(t)$ den Rang p ; die Funktionen $f_i(t, x_j, \dot{x}_k)$ sind in einem Gebiet (t, x_j, \dot{x}_k) , welches die Menge $(x_1, \dots, x_n) \in S(t)$, $\partial \varphi_\nu / \partial t + \partial \varphi_\nu / \partial x_i \cdot \dot{x}_i = 0$ enthält, definiert; die $F(t, x_j)$ sind in einem, die Menge $(x_1, \dots, x_n) \in S(t)$ enthaltenden (t, x_j) -Gebiet definierte Funktionen, für welche $F_i(t, x_j) = 0$, $\partial F_i / \partial x_j = \partial F_i / \partial x_i \cdot \xi_i \cdot \xi_j \geq 0$ und der Rang von $[\partial F_i / \partial x_j] = p$ ($i, j = 1, \dots, n$) und M ein Parameter ist. Es wird bewiesen, daß für die gewisse Bedingungen genügenden Anfangswerte beider Systeme (1) und (2) jeder Lösung des holonomen Systems (1) eine asymptotische Lösung des freien Systems (2) entspricht, wenn $M \rightarrow \infty$, d. h. das System (1) ist dem System (2) asymptotisch.

G. Bradistilov.

Miščenko (Mishchenko), E. F. and L. S. Pontrjagin: A proof of some asymptotic formulas for solutions of differential equations involving a small parameter. Doklady Akad. Nauk SSSR **120**, 967—969 (1958) [Russisch].

Verff. knüpfen an die Abhandlung von L. S. Pontrjagin (dies. Zbl. **78**, 80) an und deuten den Beweis der Behauptung an, daß die formale asymptotische Lösung des Systems $\varepsilon \dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$ in der Umgebung des Störungspunktes, welche in der oben zitierten Abhandlung abgeleitet wurde, die wirkliche Lösung mit der angeführten Genauigkeit approximiert.

M. Ráb.

Bukovics, Erich: Lineare Eigenwertaufgaben in der Mechanik. Acta phys. Austr. **12**, 262—303 (1959).

Stiefel und Ziegler (dies. Zbl. **35**, 344) hatten „natürliche Eigenwertaufgaben“ als Variationsaufgaben eingeführt, wobei die zulässigen Funktionen die wesentlichen Randbedingungen erfüllen mußten. Verf. leitet nun die genaue Gestalt der restlichen Randbedingungen aus dem Variationsprinzip her und gibt mit Hilfe von Matrizen die Bedingungen dafür an, daß eine in Differentialgleichungsform gegebene Eigenwertaufgabe eine natürliche Eigenwertaufgabe ist. Es werden Formeln für die Transformation von natürlichen Eigenwertaufgaben auf die „Normalform“ abgeleitet.

Ist ferner die Aufgabe semidefinit, so läßt sich die Realität der Eigenwerte zeigen, ebenso folgt leicht die Orthogonalität der Eigenfunktionen. Für die Durchführung der weiteren Theorie nach dem Muster von E. Kamke (dies. Zbl. 27, 62) treten die in dem Variationsprinzip auftretenden Bilinearformen an die Stelle der Dirichletschen Restteile; diese brauchen bei den betrachteten natürlichen Eigenwertaufgaben nicht selbststadjungierte Aufgaben erfaßt. Die Theorie wird nicht im einzelnen vorgeführt, sondern es wird gesagt: eine Analyse der Beweisführung von E. Kamke hat ergeben, daß die Theorie bei Benutzung von fünf Voraussetzungen durchführbar ist. Diese fünf Voraussetzungen werden angegeben und für K -definite natürliche Eigenwertaufgaben als erfüllt erkannt; dann sind alle von Kamke bewiesenen Sätze (über Existenz und Minimaleigenschaften der Eigenwerte, Besselsche und Parsevalsche Formel, Grundlagen des Ritzschen Verfahrens) auf diese Eigenwertaufgaben übertragbar.

L. Collatz.

Cordes, Heinz Otto: Über die Eigenwertdichte von Sturm-Liouville-Problemen am unteren Rand des Spektrums. Math. Nachr. 19, H. L. Schmid Gedächtnisband 64—72 (1958).

The author considers two differential operators L_1 and L_2 given by $L_1 u = -u'' + q_1(x)u$ on $a \leq x \leq b$, $u(a) = u(b) = 0$, and $L_2 u = u^{(4)} - (q_2(x)u')'$ on $a \leq x \leq b$, $u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) = 0$. Let $\varepsilon > 0$ and the positive integer N be given. Then it is shown that there are continuous functions q_1, q_2 on $a \leq x \leq b$ such that the first N eigenvalues (counting multiplicities) $\lambda_1^\sigma, \lambda_2^\sigma, \dots, \lambda_N^\sigma$ of the two problems $L_\sigma \varphi = \lambda^\sigma \varphi$ ($\sigma = 1, 2$) are in the interval $\lambda_1^\sigma \leq \lambda \leq \lambda_1^\sigma + \varepsilon$.

E. A. Coddington.

Marčenko (Marchenko), V. A. and F. S. Rofe-Beketov: Expansion in characteristic functions of non-self-adjoint singular differential operators. Doklady Akad. Nauk SSSR 120, 963—966 (1958) [Russisch].

Consider the problem $(*) -y'' + qy = \lambda^2 y$, $y'(0) - Ay(0) = 0$, on $0 \leq x < \infty$. Here q is a complex-valued function, summable on every finite subinterval of $0 \leq x < \infty$, and A is any complex number. In general this problem is non-self-adjoint. The purpose of the paper is to state some results which are extensions of known ones for the self-adjoint case. By Z is denoted the set of all even entire functions of finite order which are summable on the real axis. A sequence $F_n \in Z$ is said

to converge to zero if $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty |F_n(\lambda)| d\lambda = 0$, ($n \rightarrow \infty$), and the orders σ_n are bounded.

The continuous linear functionals on Z are denoted by $T(Z)$. If $T \in T(Z)$ the value of T at $F \in Z$ is denoted by (F, T) . The set of all $F \in Z$ of order $\leq \sigma$ which are in $L^2(-\infty, \infty)$ is denoted by W_σ^2 . Let $\omega (= \omega(\lambda, x))$ be the solution of the differential equation in $(*)$ satisfying $\omega(\lambda, 0) = 1$, $\omega'(\lambda, 0) = A$. Theorem 1

Each problem $(*)$ determines an $R \in T(Z)$ such that $(E_f E_g, R) = \int_0^\infty f(x) g(x) dx$

where f, g are any functions in $L^2(0, \infty)$ vanishing outside compact subsets of

$0 \leq x < \infty$, and $E_f(\lambda) = \int_0^\infty f(x) \omega(\lambda, x) dx$, $E_g(\lambda) = \int_0^\infty g(x) \omega(\lambda, x) dx$. If

$E_f \in L^1(0, \infty)$, then $f(x) = (E_f \omega_x, R)$, where $\omega_x(\lambda) = \omega(\lambda, x)$. The functional R is called the spectral function of $(*)$. Theorem 2. In order that an $R \in T(Z)$ be the spectral function of some problem $(*)$ with a q having n derivatives ($n \geq 0$), it is necessary and sufficient that (a) the function Φ defined by $\Phi(x) = ((1 - \cos \lambda x)/\lambda^2, R)$ have $n + 3$ derivatives for $x \geq 0$, and $\Phi'(0) = 1$, (b) if $F \in W_\sigma^2$ and $(F X, R) = 0$ for all $X \in W_\sigma^2$, then F is identically zero. The function q and A are uniquely determined by R . It is stated that the methods can be used to treat the case when $q(x)$

and A are bounded operators in some Banach space B , with q continuous in x , $x \geq 0$. In this case the solution \tilde{w} of $-v'' + vq = \lambda^2 v$, $v(0) = I$, $v'(0) = A$ is needed, as well as the transform $\tilde{E}_f(\lambda) = \int_0^\infty \tilde{w}(\lambda, x) f(x) dx$. If B is a separable Hilbert space the operator functions can be written in matrix form, $q(x) = (q_{ik}(x))$, etc. Theorem 3. Every operator problem (*) determines a spectral matrix $R = (R_{ik})$, $R_{ik} \in T(Z)$, such that $(E_f R \tilde{E}_g) = \int_0^\infty f(x) g(x) dx$. Here f, g are continuous operator-valued functions vanishing outside compact subsets, $(E_f R \tilde{E}_g) = (\langle E_f^{im} \tilde{E}_g^{nk}, R_{mn} \rangle)$ (summation on m, n). A result corresponding to Theorem 2 is also stated. For the self-adjoint operator case, the following result is asserted. If $q^*(x) = q(x)$, $A^* = A$, then the spectral matrix R is an operator measure, i. e.

$$\int_0^\infty f(x) g^*(x) dx = \int_0^\infty E_f(\sqrt{\lambda}) [d\varrho(\lambda)] E_g^*(\sqrt{\lambda}),$$

where ϱ is a non-decreasing operator-valued function.

E. A. Coddington.

Kabanova, V.: On the expansion in characteristic vector-functions of non-selfadjointed second order differential systems. Doklady Akad. Nauk SSSR **121**, 30—33 (1958) [Russisch].

The equation (*) $Y'' - YP(x) + \lambda^2 Y = 0$ for $m \times m$ matrix-valued functions Y on $0 \leq x < \infty$ is considered. Here P is a square matrix whose components are complex-valued functions. The author states results (without proofs) which are extensions of earlier work of B. Levin (this Zbl. **70**, 108) on the scalar equation of the same type. The fundamental solution of (*) is that solution Y satisfying

$|Y(x, \lambda) - e^{i\lambda x} I| \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$, where I is the identity matrix. If $\int_0^\infty x |P(x)| dx < \infty$ there exists a fundamental solution of (*) which has the representation

$$Y(x, \lambda) = e^{i\lambda x} I + \int_x^\infty K(x, t) e^{i\lambda t} dt \quad (\text{Im } \lambda \geq 0),$$

where K is continuous for $0 < x \leq t < \infty$ and

$$\int_0^\infty \int_x^\infty |K(x, t)|^2 dt dx < \infty, \quad \int_x^\infty |K(x, t)| dt < \infty \quad (x \geq 0).$$

The resolvent kernel R for the integral equation

$$f(x) + \int_0^x K(s, x) f(s) ds = g(x)$$

is continuous for $0 < s \leq x < \infty$ and $\int_0^\infty \int_0^x |R(s, x)|^2 ds dx < \infty$.

Let $L_m^2(0, \infty)$ be the space of m -vector functions whose components are in $L^2(0, \infty)$ and which are zero on the negative half-axis. Let $L_m^{2(+)}$ be the space of m -vector functions which are holomorphic and bounded in the upper half-plane, and which are in L^2 on the real line. The mapping

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{l. i. m.} \int_0^\infty Y(x, \lambda) f(x) dx,$$

where Y is a fundamental solution, takes $L_m^2(0, \infty)$ into $L_m^{2(+)}$, and

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{l. i. m.} \int_{-\infty}^\infty Z(x, \lambda) \varphi(\lambda) d\lambda$$

takes $L_m^{2(+)}$ into $L_m^2(0, \infty)$. Here

$$Z(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} I + \int_0^x R(s, x) e^{-i\lambda s} ds.$$

Moreover, $c_1 \|\varphi\| \leq \|f\| \leq c_2 \|\varphi\|$, where c_1, c_2 are positive constants. The matrix Z is not in general a solution of (*). However, it can be shown that Z satisfies

$$Z'' - P(x)Z + \lambda^2 Z = -i\lambda R(0, x) + \frac{\partial R}{\partial s}(0, x).$$

The expansion result in terms of the fundamental solution Y of (*) is given by

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{l.i.m.} \int_{-\infty}^{\infty} Y(x, \lambda) \psi(\lambda) d\lambda,$$

where

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{l.i.m.} \int_0^{\infty} Z(x, \lambda) f(x) dx.$$

Further results of a similar nature are given for the case when P satisfies

$$\int_0^{\infty} (1+x) |P(x)| dx < \infty.$$

E. A. Coddington.

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Walter, Wolfgang: Über die Differentialgleichung $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$.

II: Existenzsätze für das charakteristische Anfangswertproblem. *Math. Z.* **71**, 437—453 (1959).

(Parte I *ibid.* 308—324) In Parte II l'A. fornisce alcuni teoremi di esistenza di (1) $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$, trasformata „alla Carathéodory“ in equazioni integrali, con condizioni iniziali alla Cauchy. I teoremi dati, che coprono sia il caso limitato che il caso illimitato, sono molto generali e vengono raggiunti con metodi classici (in particolare quello delle approssimazioni di Tonelli). Un'osservazione interessante è fatta circa la mancanza delle soluzioni di (1) quando la f non dipende da u_x , pensata allora come equazione differenziale ordinaria che ammetta più soluzioni. Questo sembra il motivo per il quale i teoremi di esistenza dati presentano condizioni analoghe a quelle usate per asserire l'unicità della soluzione delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Un ultimo paragrafo si riferisce alla possibilità di ottenere la soluzione mediante le approssimazioni successive di Picard.

E. Baiada.

Kahane, Arno: Sur quelques transformations du type Bäcklund relatives à des équations de la forme $z_{uv} = f(z)$. *Acad. Republ. popul. Romine, Studii Cerc. mat.* **9**, 415—438, russ. und französ. Zusammenfassg. 435—438 (1958) [Rumänisch].

L'A. considère quelques équations particulières bien connues du type donné dans le titre de la note et on retrouve des solutions connues.

Gh. Th. Gheorghiu.

Duff, G. F. D.: Mixed problems for hyperbolic equations of general order. *Canadian J. Math.* **11**, 195—221 (1959).

The author considers a linear partial differential equation of order m , of the form

$$(1) \quad L \cdot u \equiv \sum_{h=0}^n \sum_{i_1, \dots, i_h}^{1 \dots N} a_{(h)i_1, \dots, i_h} \frac{\partial^h u}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_h}} = 0,$$

in N independent variables where the coefficients are real analytic in these variables. He considers two hypersurfaces S and T , defining a “quadrant” R . These surfaces are not characteristic. Through their $(N-2)$ -dimensional intersection C pass characteristics out of which $k_0 < m$ are chosen and called “select”. The paper is devoted to the proof of the existence of a solution of (1) in R relative to a mixed problem, namely one with Cauchy data on S and k_0 of the quantities $\partial^{m-i} u / \partial x^{m-i}$ ($i = 1, \dots, m$) on T . The variable x is defined as $x = \psi(x^1, \dots, x^N)$ where $\psi = 0$

is the equation of T . A variable t is defined similarly by $q = 0$, equation of S . This mixed problem is studied under the restrictive condition that there must be m distinct characteristics through C . The method of the author is a generalization of a method applied in the case of $N = 2$ by L. L. Campbell and A. Robinson (s. this. Zbl. 64, 97). It consists in introducing differential operators $D_i u$ such that if $a_h = a_{(m)N-1, \dots, N-1, N, \dots, N}$, $N-1$ being written h times:

$$\alpha_m \prod_{i=1}^m D_i u = \sum_{k=0}^m \alpha_k \frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial x^{m-k}} + \dots$$

the terms omitted containing derivatives of order less than m . By means of these operators, new variables are defined, namely

$$v_a, b, \dots, h, i_1, \dots, i_q = D_a D_b \dots D_h \partial^q u / \partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_q}.$$

The author reduces (1) to a system of first order equations in these new variables with boundary conditions on S and T . A difficulty which did not arise, to the same extent, in the case of two variables, is, in the case of $m > 2$, considerable: it is to prove that the derivatives of u can be expressed as linear combinations of the new variables and of their first derivatives. The technique developed by the author is extremely skilful but, being of great complication, it is not possible to explain it in a review. Once the reduction to a first order system is carried out, previous results of the author (dies. Zbl. 80, 77) lead to prove that there exists a piecewise analytic solution of (1) in R assuming the given boundary values on S and T , of class C^{m-1} on the k_0 select characteristics through C . Considering the non analytic case, the author makes the remark that it has not been possible until now to attain the generality of the existence theorem in the analytic case. A considerable gap remains to be filled. The operator L is now assumed to be hyperbolic in the sense of Leray (Hyperbolic differential equations. Princeton 1953). Its terms of the highest order — in symbol: $P(D) : u$ — suggest the construction of a divergence expression which defines an operator $G_j(D, \bar{D})$, $D_j = i^{-1} \partial / \partial x^j$. Then an integral

$$I_B(t) = \int_{T_t} G_x(D, \bar{D}) u \bar{u} dS_x$$

is obtained where T_t (resp. S_x) denotes the portion of T (resp. of S) within R between $t = 0$ and $t > 0$ (resp. between $x = 0$ and $x > 0$). The variables t and x are defined as above. The main result of the author is that if $I_B(t)$ satisfies a certain estimate there exists a solution of $L \cdot u = f$ in the case of a mixed problem in the non analytic case. Two cases are examined in detail: the first, that of $k_0 = m - 1$ and the other, a case of symmetry with regard to T . In the first case the existence of a solution is proved under the condition that there exists an operator $Q(D)$ whose characteristics separate those of $P(D)$. In the second, if L is regularly hyperbolic and of even order: $2l$, if further T is an hyperplane of symmetry for the characteristic cones at each point of T , there exists a solution of $L \cdot u = f$ with zero data on T for: either l derivatives of even order, or l derivatives of odd order, among $u, u_x, \dots, \partial^{2l-1} u / \partial x^{2l-1}$.

C. Racine.

Stetter, H. J.: Elementarlösungen bei Anfangswert-Randwert-Problemen hyperbolischer Differentialgleichungen. Arch. der Math. 9, 416—420 (1958).

Als Elementarlösung der linearen hyperbolischen Differentialgleichung 2. Ordnung $L[\varphi] \equiv \varphi_{xx} - \varphi_{yy} + S[\varphi]$, $S[\varphi]$ linear in den ersten Ableitungen von φ , wird eine Lösung \bar{Y} bezeichnet, die links von einer Charakteristik C_ξ verschwindet und für die längs einer nichtcharakteristischen Anfangskurve K : $R[\varphi] = \delta(x - \xi)$ ist, wobei $R[\varphi]$ wieder ein linearer Ausdruck in den ersten Ableitungen von φ ist. Die Charakteristik C_ξ geht dabei durch den Punkt $x = \xi$ von K . Diese Elementarlösungen werden konstruiert, wobei sich wiederum die formale Einfachheit der Distributionentheorie als nützlich erweist. Die links von der Charakteristik durch

$x = x_0$ von K verschwindende und der Anfangsbedingung $R[\varphi] = F(x)$ genügende Lösung ist dann in üblicher Weise $\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{Y}(x, y; \xi) F(\xi) \varepsilon(\xi - x_0) d\xi$ ($\varepsilon =$ Heaviside-Funktion).

C. Heinz.

Volkov, D. M.: Ein Analogon der zweiten Ljapunovschen Methode bei nicht-linearen Randwertaufgaben für hyperbolische Gleichungen. Leningradsk. gosudarst. Univ., Učenyje Zapiski Nr. 271, mat. Fak., Ser. mat. Nauk Nr. 33, 90—95 (1958) [Russisch].

Es sei $u = u(x_1, \dots, x_n, t)$ eine in einem Gebiet D des n -dimensionalen x -Raumes erklärte Lösung einer hyperbolischen Differentialgleichung. Man betrachte eine Familie $\{u\}$ von Lösungen, die z. B. dadurch gekennzeichnet ist, daß die Anfangsbedingungen zu einer gegebenen Funktionenmenge gehören. $\{u\}$ enthalte die Lösung $u = 0$. Ferner sei $J_k(u)$ ein Operator, der jeder Lösung u eine Funktion von t zuordnet. Es sei J_k „definit“, d. h. es sei

$$\int_D \sum_{j_1, \dots, j_k} \left| \frac{\partial^k u}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}} \right|^2 dx_1 \dots dx_n \leq J_k(u).$$

Die Lösung $u = 0$ heißt dann „stabil“ bzw. „asymptotisch stabil“ von der Ordnung k , wenn $dJ_k(u)/dt \leq 0$ bzw. $\lim J_k(u) = 0$ für $t \rightarrow \infty$ gilt. Verf. erläutert die Konstruktion eines passenden Operators $J_k(u)$ an einigen einfachen Beispielen.

W. Hahn.

Ždanovič, V. F.: Lösung der nicht selbstadjungierten gemischten Aufgaben für hyperbolische Systeme in der Ebene nach der Fourierschen Methode. I. Mat. Sbornik, n. Ser. 47 (89), 307—354 (1959) [Russisch].

The system $u_t = A(x) u_x + B(x) u$ ($0 \leq x \leq l < +\infty$, $0 \leq t \leq T < +\infty$) is considered together with the boundary condition

$$M u_t(0, t) + N u(0, t) + P u_t(l, t) + Q u(l, t) = 0,$$

and initial condition $u(x, 0) = f(x)$. Here u is an n -dimensional vector function, A, B are matrices of complex-valued functions of class C^2 and C^1 respectively on $0 \leq x \leq l$. It is assumed that $A(x)$ has real eigenvalues which are non-zero and distinct for $0 \leq x \leq l$. The matrices M, N, P, Q are constant matrices. The Fourier method of solving the problem by trying solutions of the form $u(x, t) = y(x) e^{\lambda t}$ is justified in a large number of cases. This method leads to non-self-adjoint eigenvalue problems for systems of ordinary differential equations with the parameter entering linearly into the boundary conditions. Among those problems treated are the ones with boundary conditions which are regular in the sense of G. D. Birkhoff. A number of these results were announced earlier by the author (this Zbl. 81, 92).

E. A. Coddington.

Slobodeckij, L. N.: Über die fundamentale Lösung und das Cauchysche Problem für ein parabolisches System. Mat. Sbornik, n. Ser. 46 (88), 229—258 (1958) [Russisch].

Étant donné un système parabolique

$$(1) \quad L u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{r=1}^{2p} \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n A^{(i_1 \dots i_r)}(t, x) \frac{\partial^r u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}} - A(t, x) u = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

l'A. construit une matrice fondamentale $U(t, x; \tau, y)$ des solutions de (1) et établit les évaluations des dérivées de ses éléments sous des hypothèses moins restrictives que celles du travail de S. Ejdel'man (ce Zbl. 70, 93). Dans la seconde partie du travail l'A. démontre que si $u(t, x)$ constitue une solution de (1) régulière pour $0 < t \leq T$ et satisfaisant aux conditions suivantes: 1. il existe un nombre $\mu \geq 0$ tel que

$$\int_{\tau}^T dt \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int |u(t, x)| \exp \{-\mu |x|^{2p/(2p-1)}\} dx < +\infty,$$

D étant un domaine borné quelconque, on a

$$\lim_{t \rightarrow \tau+0} \int \cdots \int_D |u(t, x)| dx = 0,$$

on a $u(t, x) \equiv 0$ pour $\tau < t \leq T$. On appelle L_q^μ l'espace des vecteurs-fonctions $\varphi(x)$, telles que la norme

$$\|\varphi\|_{L_q^\mu} = \left[\int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^q \exp \{-\mu q |x|^{2p/(2p-1)}\} dx \right]^{1/q}$$

soit finie. Soit $\varphi(x) \in L_q^\mu$ ($\mu \geq 0$). Si le nombre μ et la fonction $f(t, x)$ satisfont à certaines hypothèses (précisées par l'A dans le mémoire), la fonction

$$u(t, x; \tau) = \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} U(t, x; \tau, y) \varphi(y) dy + \int_{\tau}^t ds \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} U(t, x; s, y) f(s, y) dy$$

constitue, pour $\tau < t < T$, une solution régulière du système $Lu = f(t, x)$, telle que l'on a pour $\sigma > \mu$ ($\sigma = \mu$ pour $\mu = 0$)

$$\lim_{t \rightarrow \tau+0} \|u(t, x; \tau) - \varphi(x)\|_{L_q^\sigma} = 0,$$

et $\lim_{t \rightarrow \tau+0} u(t, x; \tau) = \varphi(x)$ aux points lebesguiens de $\varphi(x)$. Dans la partie finale l'A.

présente les applications des résultats exposés à la théorie des processus stochastiques.

M. Krzyżański.

Mangeron, D.: Connections between solutions of different boundary value problems of higher order. Bul. Inst. Politehn. Iași, n. Ser. 3 (7), Nr. 1/2, 39—41, russ. und engl. Zusammenfassg. 41—42 (1957) [Rumänisch].

On considère l'équation $\partial^m w(x, t) / \partial x^m = \partial w(x, t) / \partial t$ et n intégrales w_1, w_2, \dots, w_n resp. dans les bandes $a_k < x < b_k$, $t > 0$. En posant

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_0^\infty \prod_{k=1}^n w_k(x_k, t) dt,$$

on a $\sum_{k=1}^n \frac{\partial^m U}{\partial x_k^m} = 0$, pourvu que $\lim_{t \rightarrow 0} \prod_{k=1}^n w_k(x_k, t) = 0$. *M. Haimovici.*

Bogdan-Teodorescu, Gabriela: Sur une équation aux dérivées partielles du 4^e ordre. Acad. Republ. popul. Romîne, Studii Cerc. mat. 9, 181—190, russ. und französ. Zusammenfassg. 189—190 (1958) [Rumänisch].

L'équation $D_1 D_2 u = 0$, $D_i = \partial^2 / \partial x^2 - \alpha_i \partial / \partial t$ ($\alpha_i = \text{const}$) est intégrée dans la bande $-\infty < x < \infty$, $0 \leq t \leq T$, avec les conditions $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = f_1(x)$,

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial t} = f_2'(x)$. On emploie la transformation de Fourier par rapport à la variable x . La solution est valable si f_1, f_2' sont continues et $|f_1| < M e^{kx^2}$, $|f_2| < M e^{kx^2}$.

M. Haimovici.

Pogorzelski (Pogožel'skij), W. (V.): Untersuchung der Integrale einer parabolischen Gleichung und der Randwertprobleme im unbeschränkten Gebiet. Mat. Sbornik, n. Ser. 47 (89), 397—430 (1959) [Russisch].

L'A. détermine la solution fondamentale $\Gamma(A, t; B, \tau)$ de l'équation parabolique normale

$$(1) \quad \varphi(u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(A, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^n b_k(A, t) \frac{\partial u}{\partial x_k} + c(A, t) u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

définie dans une couche $A(x_1, \dots, x_n) \in E$, $B(y_1, \dots, y_n) \in E$, $0 \leq \tau < t \leq T$ (E étant l'espace euclidien à n dim.) sous l'hypothèse que les coefficients de (1) sont continus et bornés pour $A \in E$, $0 \leq t \leq T$, les coefficients a_{ij} étant hölderiens par rapport à tous les arguments et les coefficients b_k et c par rapport aux coordonnées du point A . La recherche de la solution fondamentale Γ se ramène à celle de la solution

d'une équation intégrale. L'A. fait ensuite l'étude des potentiels généralisés d'une simple couche et de volume et de l'intégrale de Poisson-Weierstrass (Fourier-Poisson). En particulier l'A. démontre des théorèmes analogues aux théorèmes classiques concernant les potentiels newtoniens et les potentiels de chaleur. L'A. applique ces théorèmes pour résoudre le troisième problème de Fourier pour l'équation (1) dans un domaine non borné et un problème analogue relatif à une équation quasi-linéaire $\varphi(u) = F(A, t, u)$ avec une condition aux limites de la forme $du/dT = G(P, t, u)$, où du/dT est la dérivée transversale généralisée. L'A. démontre l'existence d'une solution de ce dernier problème en appliquant le théorème de Schauder sur le point fixe d'une transformation dans l'espace fonctionnel.

M. Krzyżański.

Nitsche, Johannes C. C.: On the discontinuities in the solutions of certain parabolic equations. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 6, 171—174 (1957).

Bei gewissen quasi-linearen parabolischen Differentialgleichungen $\varphi_{xx} = F(x, y; \varphi; p, q)$ (wenn nämlich $F_q = 0$ längs einer Charakteristik $y = \text{const}$) können, analog den Verhältnissen bei hyperbolischen Gleichungen (vgl. Verf., die Zbl. 50, 94) die Lösungen längs dieser Charakteristik von einer gewissen Differenzierungsordnung an unstetig sein. Besteht die Unstetigkeit in einem Sprung $\vartheta(x)$ der zweiten Ableitung φ_{yy} längs der Charakteristik, so genügt ϑ einer im allgemeinen nicht linearen gewöhnlichen Differentialgleichung, so daß ϑ gegebenenfalls längs der Charakteristik unbegrenzt anwachsen kann. Ist die zweite Ableitung stetig und erst eine höhere Ableitung unstetig, so ist die entsprechende Differentialgleichung für ϑ linear.

C. Heinz.

Ciliberto, Carlo: Precisazione relativa alla memoria: Sulle equazioni non lineari di tipo parabolico in due variabili. Ricerche Mat. 7, 232—234 (1958).

In a paper — referred to as M — published in the same Journal (cf. this Zbl. 58, 80) the author established, for the solution of the parabolic equation

$$v_{xx} + a_1(x, y) v_y + a_2(x, y) v_x + a_3(x, y) v = f(x, y)$$

an estimate for the sum of the Hölder constants (formula 71 of M):

$$|v_x|_{\lambda + \frac{1}{2}}^{(x)} + |v_{xx}|_{\lambda}^{(x)} + |v_y|_{\lambda}^{(x)}.$$

This estimate was utilized to prove an existence and a uniqueness theorem in a more generalized case (theorem A of M). The author points out that the estimate of M does not suffice for his purpose and he establishes now a more precise one which validates the proof of theorem A of M.

C. Racine.

Rosculeț, Marcel N.: Relations intégrales caractérisant les solutions de certaines équations aux dérivées partielles d'ordre fini ou infini. Acad. Republ. popul. Romîne, Studii Cerc. mat. 8, 131—161, russ. und französ. Zusammenfassg. 157—161 (1957) [Rumänisch].

L'A. montre que si $E_n(f) = 0$ est une équation aux dérivées partielles, d'ordre n à coefficients constants, homogène, en x_1, \dots, x_p on peut toujours déterminer un polynôme $Q_s(\xi_1, \dots, \xi_p)$ tel que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int_{\Sigma_p} Q_s(\xi_1, \dots, \xi_p) \frac{\partial^{n-1} f(x_1 + r\xi_1, \dots, x_p + r\xi_p)}{\partial r^{n-1}} d\sigma_p = E_n(f)$$

où Σ_p est la sphère de centre (x_1, \dots, x_p) et de rayon r . Si $E_n(f) = 0$ est une équation aux dérivées partielles non homogène, à coefficients constants, on peut lui associer un polynôme de Fourier

$$S_n(\theta_1, \dots, \theta_s, r) = \sum_{\Sigma m_i = 0}^n \frac{m_1! \dots m_s!}{r^{m_1 + \dots + m_s}} \alpha_{m_1, \dots, m_s} \exp \omega$$

avec

$$\omega = -i(m_1 \theta_1 + \dots + m_s \theta_s), \quad i = \sqrt{-1},$$

tel que, pour toute solution holomorphe de $E_n(f) = 0$, on ait

$$\frac{1}{(2\pi)^s} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \cdots \int_0^{2\pi} S_n(\theta_1, \dots, \theta_s, r) f(x_1 + r e^{i\theta_1}, \dots, x_s + r e^{i\theta_s}) d\theta_s = 0.$$

Si S_n se transforme en une série de Fourier, l'équation $E_n = 0$ devient une équation aux dérivées partielles, d'ordre infini. L'A. considère enfin une courbe fermée plane γ , paramétriquement définie par deux séries de Fourier, $\varphi(\theta)$ et $\psi(\theta)$, uniformément convergentes et l'intégrale

$$I(x, y; \gamma) = \int_0^{2\pi} f[x + \varphi(\theta), y + \psi(\theta)] d\theta$$

avec $f(x, y)$ analytique dans un domaine D qui contient γ . A la courbe γ l'A. associe une équation aux dérivées partielles d'ordre infini $E_\infty(f) = 0$, ainsi que pour les solutions $f(x, y)$ de cette équation on a la formule de moyenne $I(x, y; \gamma) = f(x, y)$. Le résultat est étendu dans l'espace et l'on généralise ainsi la formule connue de Gauss pour les fonctions harmoniques.

M. Nedelcu.

Browder, Felix E.: On the Dirichlet problem for linear non-elliptic partial differential equations. II. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 7, 303—308 (1959).

(Teil I s. dies. Zbl. 82, 95.) Verf. gibt hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit des Dirichletschen Problems für lineare (nichtelliptische) Operatoren in Termen der Spektralzerlegung des selbstadjungierten Teiles des Operators. Dieses Ergebnis verallgemeinert diejenigen von Louhivaara, W. Littman und F. Browder (dies. Zbl. 78, 84; 81, 98; 82, 95).

K. Maurin.

Browder, Felix E.: Eigenfunction expansions for non-symmetric partial differential operators. II. Amer. J. Math. 81, 1—22 (1959).

This paper is a sequel to an earlier work (this Zbl. 84, 307), and represents a generalization and sharpening of the results. Let L and B be two partial differential operators defined on an open set $G \subset E^n$, L' the formal adjoint of L , $C_c^\infty(G)$ the set of all C^∞ functions with compact support in G , and (\cdot, \cdot) the inner product in $L^2(G)$. It is assumed that B is positive on $C_c^\infty(G)$, and that the Hilbert space H_B with inner product $[\cdot, \cdot]$ obtained by completing $C_c^\infty(G)$ in the norm $\|u\|_B = (Bu, u)^{1/2}$, has a continuous imbedding in the space of distributions on G . The minimal realization of the pair (L, B) in H_B is the operator A_0 in H_B with domain $C_c^\infty(G)$ defined by the condition $[A_0 u, v] = (L u, v)$, $u, v \in C_c^\infty(G)$. Let A_0' be the minimal realization of (L', B) in H_B . Then any operator A in H_B satisfying $A_0 \subset A \subset (A_0')^*$ is said to be a realization of (L, B) in H_B . An eigenfunction of order one of (L, B) with eigenvalue ρ is a distribution u on G satisfying $(L - \rho B)u = 0$. An eigenfunction u of order $k > 1$ for ρ satisfies $(L - \rho B)u = Bv$, where v is an eigenfunction of order $k - 1$ for ρ . The notion of an eigenfunction expansion is given in terms of the above definition of eigenfunction. The central result of the paper is that an eigenfunction expansion exists for each (L, B) having a realization A which belongs to the class of decomposable operators. This latter class consists of operators which have decompositions corresponding to an infinite-dimensional analogue of the triangular form for finite matrices. It contains a large class of the unbounded spectral operators in the sense of Dunford. The subnormal operators are also included in the theory, and here the eigenfunctions are distributions instead of linear functionals of a more general type. For hypoelliptic pairs (L, B) the eigenfunctions are smooth.

E. A. Coddington.

Schwartz, Laurent: Su alcuni problemi della teoria delle equazioni differenziali lineari di tipo ellittico. Rend. Sem. mat. fis. Milano 27, 211—249 (1958).

Der Inhalt der vom Verf. im Mathematischen Institut der Universität Genua im April 1957 gehaltenen Vorlesungen wird hier in der von einigen Hörern ange-

fertigten Fassung publiziert. Es wird zunächst an die Hauptzüge der Distributionstheorie (*Théorie des distributions* I, II; dies. Zbl. 37, 73: 42, 114) knapp erinnert und über die bezüglichen von Lions [*Acta math.* 94, 13—153 (1955)] betrachteten Anwendungen auf Randwertprobleme für elliptische Differentialgleichungen kurz berichtet. Nach diesen Ausführungen wird der größte Teil der Arbeit dem Beweis der Tatsache gewidmet, daß die Lösungen eines elliptischen Systems partieller Differentialgleichungen mit beliebig oft differenzierbaren Koeffizienten und bekanntem Glied nur beliebig oft differenzierbare Funktionen sein können. Diese Eigenschaft der elliptischen Systeme, die als Hypoelliptizität bezeichnet wird, haben auch gewisse nicht elliptische Systeme: im Falle der konstanten Koeffizienten wurden die hypoelliptischen Differentialoperatoren von Hörmander (dies. Zbl. 67, 322) charakterisiert. Die Schwartzsche Behandlung fußt auf einem allgemeinen Studium der mehrdimensionalen Fouriertransformation im Rahmen der Distributionstheorie und auf der Berücksichtigung einiger daraus entstehender linearer metrischer Funktionräume. Als wesentliche Hilfsmittel werden unter anderen der sogenannte Kornsche Kunstgriff und die Friedrichsschen regularisierenden Folgen herangezogen. Erwähnt werden auch die Arbeiten von Mizohata (dies. Zbl. 78, 88) und Malgrange (dies. Zbl. 82, 93) über die Hypoelliptizitätsfrage. *G. Cimmino.*

Magenes, Enrico: Sui problemi al contorno per i sistemi di equazioni differenziali lineari ellittici di ordine qualunque. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 17, 25—45 (1958).

Le travail est une conférence qui s'occupe des problèmes d'intégration des systèmes et des équations aux dérivées partielles linéaires du type elliptique. Les recherches de l'A., de l'école italienne de G. Fichera, G. Stampacchia, C. Miranda, etc., de l'école soviétique de S. L. Sobolev et Višik et les recherches de F. Lion sont mises en évidence. La conférence est complète et bien documenté.

Mariana Nedelcu.

Peetre, Jaak: Estimates for the number of nodal domains. 13. Skand. Mat. Kongr., Helsinki 1957, 198—201 (1958).

The author removes some restrictions on a result previously demonstrated (this. Zbl. 77, 301). Let L be a self-adjoint elliptic operator of the second order on a two dimensional Riemannian manifold M which is homeomorphic to a domain in the Euclidean plane. For a relatively compact domain $\Omega \subset M$ with boundary $\partial\Omega$ the eigenvalue problem $Lu = \lambda u$ in Ω , $u = 0$ on $\partial\Omega$, is considered. Let N be the number of nodal domains of the n -th eigenfunction. Then $N \leq n$ and equality holds only for a finite number of n 's. Indeed there is an $\alpha < 1$ such that $\limsup N/n \leq \alpha$.

E. A. Coddington.

Wolf, František: On the invariance of the essential spectrum under a change of boundary conditions of partial differential boundary operators. Nederl. Akad. Wet. Proc., Ser. A 62, 142—147 (1959).

The author considers the operator A generated by the differential expression $-\Delta + \sum_i a_i(x) \partial/\partial x_i + b(x)$ in $L^2(E^3)$, where a_i, b are bounded functions in $L^2(E^3)$.

Also considered is the operator B determined by the same differential expression but with domain those functions satisfying Dirichlet conditions on some bounded regular surface S . The precise domains of A and B are more complicated to describe. He shows that there is a λ_1 such that those λ satisfying $\operatorname{Re} \lambda < \lambda_1$ are in the resolvent sets of A and B , and for such λ , $(\lambda I - A)^{-1} - (\lambda I - B)^{-1}$ is a compact operator. A corollary is that the essential spectrum of A is the same as the essential spectrum of B . Two other results are given, the second of which states that if either (i) a_i are real and $\lim [\inf \operatorname{Re} b(x) - \sum_i \partial a_i / \partial x_i] = +\infty$ ($|x| \rightarrow \infty$), or (ii) a_i are purely imaginary and $\lim [\inf \operatorname{Im} b(x) + i \sum_i \partial a_i / \partial x_i] = +\infty$ ($|x| \rightarrow \infty$), then A has discrete spectrum.

E. A. Coddington.

Elianu, Jean: Sur les courants polyharmoniques. C. r. Acad. Sci., Paris 245. 486—488 (1957).

Let V be an n -dimensional space having a C^∞ structure and a C^∞ fundamental tensor, ε the vector space of C^∞ exterior differential forms φ with real coefficients in V . and Δ the harmonic operator corresponding to the fundamental tensor of V . A current $T[\varphi]$ in V is said to be polyharmonic of order m in a domain D of V , if $\Delta^m T = 0$ in D . It is proved that on V every polyharmonic current in a domain D is equal to a polyharmonic form in D , which is analytic (harmonic) in D if V is analytic (compact). Furthermore, on a compact space V the equation $\Delta^m S = T$, where S and T are currents, admits a solution S if and only if T is orthogonal to all harmonic forms. In this case, the equation admits a unique solution Σ , which is orthogonal to all harmonic forms and is the nonharmonic part common to all the solutions of the equation, so that every solution S is of the form $S = \Sigma + h$, where h is an arbitrary harmonic form.

C. C. Hsiung.

Palo, Raffaele di: Sul problema al contorno per le funzioni biarmoniche. Giorn. Mat. Battaglini 85 (V. Ser. 5), 296—304 (1957).

En partant de la solution du problème de Dirichlet pour l'équation $\Delta \Delta u = 0$ dans un domaine borné τ , limité par une surface σ , l'A. considère une surface σ' voisine de σ , donnée par l'équation (1) $Q' = Q + \varepsilon(Q) n$ où n est le vecteur normal unitaire dirigé vers l'intérieur. Il résout ensuite le problème de Dirichlet pour le domaine τ' limité par σ' . Etant données les valeurs $u, du/dn'$ sur σ' , il considère les solutions u_1, u_2 des problèmes de Dirichlet suivants sur σ : $u_1, du_1/dn$ ont sur σ les valeurs que $u, du/dn'$ ont dans les points de σ correspondants par (1); $u_2, du_2/dn$ ont sur σ les valeurs $du_1/dn, \mu \text{ grad } u_1 + \varepsilon d^2 u_1/dn^2$, où $\mu = [(n \times v) \cdot n - 1]v, v = \text{grad } (\varepsilon df/dn)/\text{mod grad } f$. La solution cherchée u est alors $u = u_1 - u_2$.

M. Haimovici.

Kreyszig, Erwin: On coefficient problems of solutions of partial differential equations of the fourth order. J. Math. Mech. 6, 811—822 (1957).

Verf. behandelt partielle Differentialgleichungen 4. Ordnung der Form

(1) $\Delta \Delta \varphi + \alpha \varphi_{xx} + 2\beta \varphi_{xy} + \gamma \varphi_{yy} + \delta \varphi_x + \lambda \varphi_y + \mu \varphi = 0$
($\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$ analytisch in den reellen Variablen x und y). Die reellen Veränderlichen x und y werden durch $x + iX = z_1$ bzw. $y + iY = z_2$ ersetzt und damit die Koeffizientenfunktionen auch als Funktionen zweier komplexer Variablen erklärt. Weiter führt die Transformation $z = z_1 + iz_2, z^* = z_1 - iz_2$ die Gleichung (1) in

(2) $u_{zzz^*z^*} + a u_{zz} + b u_{zz^*} + c u_{z^*z^*} + d u_z + e u_{z^*} + h u = 0$
über, wobei noch zusätzlich a, b, c, d, e und h als ganze analytische Funktionen in z und z^* vorausgesetzt werden. Mit

$$\varphi(z_1, z_2) = u(z, z^*) = \sum_{m,n=0}^{\infty} u_{mn} z^m z^{*n} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) z^{*n}$$

und entsprechenden Ansätzen für die Koeffizientenfunktionen lassen sich dann Aussagen über die Funktionen $u_n(z)$ gewinnen und die Lösungen von (2) mit den Lösungen der Differentialgleichung $v_{zz^*} + A v_z + B v_{z^*} + C v = 0$ (A, B, C ganz analytisch in z und z^*) vergleichen. Unter Verwendung von Ergebnissen, die in der Mehrzahl von S. Bergmann und J. Mitchell hergeleitet wurden (das Literaturverzeichnis nennt insgesamt neun Arbeiten), wird zunächst gezeigt: Hat $u_n(z)$ ($n > 1$) für $z = z_0$ ($\neq 0$) eine Singularität, so ist an der gleichen Stelle mindestens eine der Funktionen $u_0(z)$ und $u_1(z)$ singular. Dies folgt aus der gewöhnlichen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung

(3) $u_n'' + c_0 u_n = G_n(z, z, u_0, u_0', u_0'', u_1, u_1', u_1'', \dots, u_{n-1}, u_{n-1}', u_{n-1}'')$
(G_n ganze Funktion der angegebenen Veränderlichen), der $u_n(z)$ genügt und die sich

aus (2) vermöge Koeffizientenvergleichs ergibt. Eine passend gewählte Anzahl von Differentiationen der Gleichung (3) läßt dann für $n > 2$ die Elimination der Größen $u_2, u'_2, u''_2, \dots, u_{n-1}, u'_{n-1}, u''_{n-1}$ gelingen. Es ergeben sich Gleichungen der Form

$$(4) \quad \sum_{\lambda=0}^{n-2} (\varrho_{0\lambda} u_0^{(\lambda)} + \varrho_{1\lambda} u_1^{(\lambda)} + \varrho_{n\lambda} u_n^{(\lambda)}) = 0$$

($\varrho_{\nu\lambda}$ ($\nu = 0, 1, n$) ganze Funktionen in z), die ohne Schwierigkeiten Aussagen darüber gestatten, in welcher Weise sich die Regularitätsgebiete der Funktionen u_0, u_1 und u_n gegenseitig bedingen. Der mögliche Ausnahmefall $\varrho_{0\lambda} = \varrho_{1\lambda} = \varrho_{n\lambda} \equiv 0$ ($\lambda = 0, 1, \dots, n-2$) wird dabei außer Betracht gelassen, weswegen sich (4) unter Auszeichnung einer der drei Funktionen u_ν als lineare Differentialgleichung für diese Funktion interpretieren läßt. Diese Interpretation führt dann zu einigen Sätzen, von denen der folgende als Beispiel angegeben sei: Ist ϱ_{ns} ($s \leq n-2$) das $\varrho_{n\lambda}$ mit größtem Index λ , welches nicht identisch verschwindet, so ist u_n sicher überall dort regulär und analytisch, wo $\varrho_{ns} \neq 0$ und die Funktionen u_0 und u_1 regulär sind. Abschließend wird als Spezialfall von (1) die Gleichung (1') $\Delta\Delta\varphi + \varphi = 0$ behandelt, für welche naturgemäß das Analogon zu (4) sehr viel einfacher wird. Für die Koeffizienten $u_n(z)$ der Lösungen von (1') gilt: Singularitäten von u_{2n} bzw. u_{2n-1} ($n < 1$) können höchstens für solche z -Werte auftreten, an denen auch u_0 bzw. u_1 singularär ist.

H. Schubart.

Thunus, Étienne et J. Thunus: Fonctions de Green de l'opérateur métabarmonique pour les problèmes de Dirichlet et de Neumann posés dans un intervalle. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 28, 198—206; Errata. Ibid. 291—292 (1959).

Nach einer Arbeit von J. Etienne über die Greensche Funktion dieses Problems für das Äußere einer Kugel (dies. Zbl. 80, 309) wird hier die analoge Frage für das Innere eines Intervalls des E_n behandelt, wobei naturgemäß jetzt ∂ -Funktionen verwendet werden.

H. Hornich.

Berezanskij, Ju. M.: Über den Eindeigkeitsatz im inversen Problem der Spektralanalyse für die Schrödinger-Gleichung. Trudy Moskovsk. mat. Obsč. 7, 3—62 (1958) [Russisch].

Let G be a finite or infinite region in three-dimensional euclidean space R_3 whose boundary Γ consists of analytic surfaces, only a finite number of which occur in every bounded set. In G the equation $-\Delta u + c(p)u = \lambda u$ ($\text{Im } c(p) = 0$) is considered together with the boundary condition $\partial u / \partial n + \sigma(p)u = 0$, where σ is a continuous real-valued function defined on Γ . The paper gives a detailed proof of the fact that the spectral function $\theta(p, q; \lambda)$ of this problem uniquely determines the function c . More precisely, it is assumed that there is a plane piece $I \subset \Gamma$ where $\sigma(p) = 0$. Then $\theta(p, q; \lambda)$ ($p, q \in I; -\infty < \lambda < \infty$) uniquely determines c in the class of piecewise analytic functions, and also the boundary function σ on $\Gamma - I$. If $G = R_3$ then c is uniquely determined by the matrix

$$\begin{vmatrix} \theta(p, q, \lambda) & \partial\theta(p, q, \lambda)/\partial n_p \\ \partial\theta(p, q, \lambda)/\partial n_q & \partial^2\theta(p, q, \lambda)/\partial n_p \partial n_q \end{vmatrix} \quad (-\infty < \lambda < \infty)$$

where p, q vary over a piece of a C^2 surface adjacent to some region where c is already known. These results were announced earlier [Doklady Akad. Nauk SSSR 105, 197—200 (1955)]. Similar results are valid when R_3 is replaced by R_2 . Four other formulations of the inverse problem are considered, and their equivalence is demonstrated.

E. A. Coddington.

Doob, J. L.: Probability theory and the first boundary value problem. Illinois J. Math. 2, 19—36 (1958).

L'A. reprend les notations de son article precedent (ce Zbl. 74, 91) et étudie le cas où il existe une suite R_n de sousensembles de l'espace de Hausdorff

localement compact R . telle que: la fermeture de R_n est un sous-ensemble compact de R_{n+1} ; $\bigcup_1^\infty R_n = R$; l'hypothèse $M(R_n, R'_n)$ est satisfaite et R_n est fortement P. B. W. résoluble.

R. Féron.

Edwards, R. E.: Cartan's balayage theory for hyperbolic Riemann surfaces. Ann. Inst. Fourier 8, 263—272 (1959).

This paper is concerned with the possibility of extending Cartan's result on the completeness of the space of positive measures of finite energy to the case of Riemann surfaces. This problem has been considered by several writers and the present author gives an explicit proof for the first time. Let X be a hyperbolic Riemann surface with Green's function g . The potential U^μ of a positive Radon measure μ on X is defined by $U^\mu(x) = \int g(x, y) d\mu(y)$ and the mutual energy (μ, ν) is defined by $\int U^\mu d\nu$. Let \mathcal{E} denote the set of positive measures μ of finite energy (μ, μ) . Using a primitive form of balayage theory it is first proved that $(\mu, \nu)^2 \leq (\mu, \mu)(\nu, \nu)$ for any positive measures μ and ν , and then the completeness of \mathcal{E} with distance defined by

$$\|\mu - \nu\| = \sqrt{(\mu, \mu) + (\nu, \nu) - 2(\mu, \nu)}.$$

is proved.

M. Ohtsuka.

Szybiak, A.: On the density of the equilibrium distributions of plane sets. Ann. Polon. math. 6, 41—49 (1959).

Ces distributions d'équilibre signifient ici celles obtenues par balayage de la masse ponctuelle unité ε_{x_0} dans un domaine plan c'est à dire la mesure harmonique μ_{x_0} en x_0 . On montre essentiellement que sur un ouvert où la frontière est un arc rectifiable, la mesure harmonique μ_{x_0} admet une densité par rapport à la longueur de l'arc. On procède par comparaison des mesures harmoniques pour des domaines emboîtés et par approximation d'un domaine à frontière rectifiable au moyen d'un autre assez régulier.

M. Brelot.

Parreau, M.: Théorème de Fatou et problème de Dirichlet pour les lignes de Green de certaines surfaces de Riemann. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 250/25, 8 p. (1958).

Sur une surface de Riemann hyperbolique, l'A. considère la fonction de Green G_a de pôle a et les lignes de Green (tangentes à grad G_a). Si chaque zéro du grad G_a est affecté d'une masse égale au nombre d'arcs de Green issus de ce point, le potentiel de Green de ces masses en a est supposé fini (on peut se demander si cela est indépendant de a). Pour une telle surface l'A. généralise des résultats sur l'allure des fonctions harmoniques démontrés lorsque la connexion est finie (Brelot, cf. ce Zbl. 67, 330). D'abord toute fonction harmonique > 0 a une limite sur „presque toute“ ligne de Green issue de a (quand $G_a \rightarrow 0$); l'A. donne en outre l'extension à une fonction méromorphe de caractéristique bornée et une caractérisation des fonctions de type Bl de Heins. D'autre part il montre l'existence et l'unicité d'une fonction harmonique bornée de limite, pour presque toutes les lignes de Green l , égale à $f(l)$ donnée bornée, sommable pour la mesure de Green.

M. Brelot.

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Butzer, P. L.: Singular integral equations of Volterra type and the finite part of divergent integrals. Arch. rat. Mech. Analysis 3, 194—205 (1959).

Diese Untersuchung wurde in einer früheren Arbeit bereits angekündigt (dies. Zbl. 83, 101). Der Operator $\{p. f. 1/t^\alpha\}$, der für $\alpha \geq 1$ und wenn Hadamards partie finie (p. f.) existiert, durch

$$I^{[\alpha]} \left\{ p. f. \frac{1}{t^\alpha} \right\} = \left\{ p. f. \int_0^t \frac{(t-u)^{[\alpha]-1}}{\Gamma([\alpha])} \frac{du}{u^\alpha} \right\}$$

definiert ist ($[\alpha]$ bezeichnet die nächst kleinere ganze Zahl von α), ist ein Element des Mikusińskischen Operatorenkörpers K und kann berechnet werden als

$$\left\{ \text{p. f. } \frac{1}{t^k} \right\} = \frac{s^k}{\Gamma(k)} \{ \zeta_k + (-1)^{k-1} \log t \}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\text{mit } \zeta_k = \sum_{i=0}^{k-2} \frac{(-1)^{i+1}}{k-1+i} \binom{k-1}{i} \quad \text{und } \zeta_1 = 0,$$

$$\left\{ \text{p. f. } \frac{1}{t^{k+\beta}} \right\} = (-1)^k \frac{\Gamma(1-\beta) s^{k+\beta-1}}{\beta(\beta+1) \dots (\beta+k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad 0 < \beta < 1.$$

Es wird bewiesen, daß für $\alpha \geq 1$ und $f(t)$ mit absolut stetiger $([\alpha] - 1)$ -ter Ableitung und $f(0) = f'(0) = f^{([\alpha]-2)}(0) = 0$ gilt:

$$\left\{ \text{p. f. } \frac{1}{t^\alpha} \right\} \{ f(t) \} = \left\{ \text{p. f. } \int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^\alpha} du \right\},$$

wodurch es möglich ist, für die singulären Integralgleichungen erster und zweiter Art

$$\text{p. f. } \int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^\alpha} du = g(t), \quad \text{p. f. } \int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^\alpha} du + g(t) = f(t)$$

im Bereich $t > 0$ Lösungen in geschlossener Form anzugeben. Eine kurze Tabelle für ganz- und halbzahlige α ist angeführt. Ein spezielles Beispiel einer Integralgleichung zweiter Art, das der Prandtl'schen Tragflügeltheorie entstammt, ist durchgerechnet.

F. Selig.

Steinberg, Jacob: Application de la théorie des suites d'Appell à une classe d'équations intégrales. Bull. Res. Council Israel, Sect. F 7, 55—68 (1958).

In Anknüpfung an eine frühere Arbeit über die Eigenwerte der Integralgleichung

$$(*) \quad f(s) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K(bs - t) f(t) dt = 0 \quad (\text{Steinberg, dies. Zbl. 66, 348})$$

— wo b einen Parameter darstellt und die in einem die x -Achse enthaltenden und zu dieser parallelen Streifen holomorphe Funktion $K(z)$ die Bedingungen $|K(z)| < C e^{-q|z|}$

($C > 0$; $q > 0$) und $\int_{-\infty}^{+\infty} K(x) dx = 1$ erfüllt — untersucht Verf. den Fall $|b| \neq 1$.

Dazu werden zunächst einige Resultate von Sheffer (dies. Zbl. 18, 136) über die Entwicklung ganzer Funktionen vom Exponentialtypus in Reihen nach Appellschen Polynomen herangezogen (für welche Verf. direkte Beweise gibt, ohne die von Sheffer angewandte Perronsche Theorie der Differentialgleichungen unendlicher Ordnung zu benutzen). Anschließend untersucht Verf. die dabei auftretende erzeugende Funktion $A(u)$, welche mit den Appellschen Polynomen $p_n(t)$ durch

$A(u) e^{ut} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) u^n$ verknüpft ist, und gewinnt als wichtigstes Resultat den

folgenden Satz: Ist $|b| \neq 1$, ist ferner $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ut} K(t) dt \neq 0$ für $|u| < q$ und

bezeichnet $E(h < q)$ die Menge der ganzen Funktionen $f(t)$ von Exponentialtypus $h < q$, so sind die einzigen Eigenfunktionen von $(*)$, die zu $E(h < q)$ gehören, die Appellschen Polynome $p_n(t)$. Die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_n = b^{-n}$ sind isoliert und einfach. Bei Einschränkung auf den reellen Bereich bleiben die genannten Resultate gültig. Zwei Beispiele beschließen die Arbeit.

H. Pachale.

Steinberg, Jacob: Transformations intégrales qui laissent invariant tout polynôme. Bull. Res. Council Israel, Sect. F 7, 69—76 (1958).

Ausgehend von einer in früheren Arbeiten (s. dies. Zbl. 66, 348 und die zuvor besprochene Arbeit) betrachteten Integraltransformation untersucht Verf.

das Problem, Funktionen $I(x)$ so zu bestimmen, daß die damit definierten Integraltransformationen $(*) (\mathfrak{F}f)(s) =_{\text{Def}} \int_{-\infty}^{+\infty} I(s-t)f(t)dt$ jedes Polynom invariant lassen. Dazu zeigt Verf., daß man, ausgehend von den in obengenannten Arbeiten benutzten Integraltransformationen der Form $(\mathfrak{R}f)(s) =_{\text{Def}} \int_{-\infty}^{+\infty} K(b s - t)f(t)dt$,

zu einer Integraltransformation $(\tilde{\mathfrak{F}}f)(s) =_{\text{Def}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{I}(s, t)f(t)dt$ gelangt (wobei $\tilde{I}(s, t)$

die Form $\tilde{I}(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} i_n \tilde{K}^{(m)}(s, t)$ hat und $\tilde{K}^{(m)}(s, t)$ die m -te Iterierte von $\tilde{K}(s, t) = K(b s - t)$ darstellt), welche die oben geforderte Eigenschaft besitzt. Das ist dann auch für die mit $I(X) =_{\text{Def}} \tilde{I}(0, -X)$ gemäß $(*)$ gebildete Transformation \mathfrak{F} der Fall. Verf. schließt mit der Bemerkung, daß eine Erweiterung der Invarianzrelation $\mathfrak{F}f = f$ auf eine noch genauer charakterisierte Menge ganzer (transzendenter) Funktionen möglich sei.
H. Pachale.

Rooney, P. G.: On the representation of functions as Fourier transforms. Canadian J. Math. 11, 168—174 (1959).

Three theorems are proved in this paper giving necessary and sufficient conditions that a function belonging to one Lebesgue class should be the Fourier transform of a function of another Lebesgue class. The conditions are formulated in terms of the inversion operator

$$\mathfrak{S}_{k,t}[F] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{ik}{t} \right)^{k+1} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx \left(x - \frac{ik}{t} \right)^{k+1}.$$

Theorem 1 states that a necessary and sufficient condition that a function $F \in L_q(-\infty, \infty)$, $q \geq 2$, be the Fourier transform of a function in $L_p(-\infty, \infty)$,

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, is that there exists a constant M such that $\int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{S}_{k,t}[F]|^p dt \leq M$ for $k = 1, 2, \dots$. In theorem 3 it is proved that the same condition is necessary and sufficient for a function F where $x^{1-2/p}F \in L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p \leq 2$, to be the Fourier transform of a function of $L_p(-\infty, \infty)$. In theorem 2, it is shown that the

condition $\int_{-\infty}^{\infty} |t|^{q-2} |\mathfrak{S}_{k,t}[F]|^q dt \leq M$, $k > q - 2$, is necessary and sufficient for a function F belonging to $L_q(-\infty, \infty)$, $q \geq 2$, to be the Fourier transform of a function f with $x^{1-2/q}f \in L_q(-\infty, \infty)$.
V. Ganapathy Iyer.

Džrbašjan, M. M.: Untersuchungen zur Theorie der verallgemeinerten Integraltransformationen und zur Theorie der ganzen Funktionen. Trudy tret'ego vsesojuzn. mat. S'ezda, Moskva, Ijuń—Ijul' 1956, 3, 182—189 (1958) [Russisch].

Bekannte Sätze aus der Theorie der Fourier-Transformation (von Plancherel 1910 und Paley-Wiener 1933) werden verallgemeinert, indem die Exponentialfunktion e^z durch die für $\mu = 1$ von Mittag-Leffler eingeführte Funktion

$E_p(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k/p)}$ ersetzt wird, deren asymptotisches Verhalten für

$|z| \rightarrow \infty$ zunächst angegeben wird. Es ergeben sich neue Umkehrformeln für die gewöhnliche Fourier-Transformation sowie neue Eindeutigkeitsätze für ganze Funktionen. Weiterhin wird die Frage der besten Approximation der Funktionen $g(y)$

mit $\int_0^{\infty} |g(y)|^2 y^{2\mu p - p - 1} dy < \infty$ bei entsprechender Metrik durch ganze Funktionen der Ordnung p mit einem Typ $\leq \sigma$ im Falle $\frac{1}{2} \leq p$, $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + p^{-1}$ gelöst.

Dabei braucht der Integrationsweg nicht unbedingt aus der reellen Achse zu bestehen, sondern kann durch ein gewisses System von endlich vielen Strahlen in der komplexen Ebene ersetzt werden. Zum Schluß wird noch auf eine Übertragung auf Funktionen mehrerer Veränderlicher hingewiesen.

L. Berg.

Bruijn, N. G. de: Pairs of slowly oscillating functions occurring in asymptotic problems concerning the Laplace transform. *Nieuw Arch. Wiskunde*, III. Ser. 7, 20—26 (1959).

Eine für $x > 0$ definierte meßbare Funktion $L(x)$ heißt langsam oszillierend (Karamata), wenn $L(x) > 0$ und $L(px)/L(x) \rightarrow 1$ ($x \rightarrow \infty$) für jedes $p > 0$ ist. Zu $L(x)$ existiert eine ebenfalls langsam oszillierende Funktion $L^*(x)$, genannt die Konjugierte zu L , mit den Eigenschaften $L^*(xL(x))/L(x) \rightarrow 1$, $L(xL^*(x))/L^*(x) \rightarrow 1$ für $x \rightarrow \infty$. L^* ist bis auf Faktoren mit dem Grenzwert 1 eindeutig bestimmt. Die Beziehung zwischen L und L^* ist involutorisch in dem Sinn, daß L und $(L^*)^*$ asymptotisch äquivalent sind. — Ein von E. E. Kohlbecker [*Trans. Amer. math. Soc.* 88, 346—365 (1958)] bewiesener Abelscher Satz über Laplace-Integrale und sein Taubersches Gegenstück werden vermittels eines Paares von konjugierten langsam oszillierenden Funktionen ausgedrückt und verallgemeinert. Analoges wird für einen von A. Békéssy [*Publ. math. Inst. Hungar. Acad. Sci.* 2, 105—125 (1958)] angege-

benen Satz über Integrale der Form $F(x) = \int_0^x \exp(-xf(t)) dt$ durchgeführt.

G. Doetsch.

Berg, Lothar: Asymptotische Darstellungen für Integrale und Reihen mit Anwendungen. *Math. Nachr.* 17, 101—135 (1958).

Verf. betrachtet das asymptotische Verhalten von Integralen $\int \exp(-g(s, t)) dt$ über ein gewisses Intervall $a \leq t \leq b$ mit einem Parameter s , falls sich dieser Parameter einem gewissen Grenzwert S nähert (der auch ∞ sein kann). Zur Abkürzung sei

$$g_1(s, t) = \partial g(s, t) / \partial t, \quad g_2(s, t) = \partial^2 g(s, t) / \partial t^2$$

gesetzt, und es sei $x = x(s)$ eine Lösung der Gleichung $g_1(s, x) = 0$. Zunächst werde über ein Intervall $x(s) - \omega(s) \leq t \leq x(s) + \omega(s)$ integriert. Setzt man über die positive Funktion $\omega(s)$ voraus, daß: 1. $x(s) - \omega(s) \geq t_1$; 2. $\omega^2(s) g_2(s, x(s)) \rightarrow \infty$ und 3. $g_2(s, \xi(s)) \sim g_2(s, x(s))$ für jede Funktion $\xi(s)$ mit $|\xi(s) - x(s)| \leq \omega(s)$, so folgt aus der Taylorsche Formel leicht, daß

$$\int_{x(s) - \omega(s)}^{x(s) + \omega(s)} \exp(-g(s, t)) dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{g_2(s, x(s))}} \exp(-g(s, x(s))) \quad (s \rightarrow S).$$

Fügt man noch einige naheliegende Voraussetzungen über die Intervalle $a \leq t \leq x(s) - \omega(s)$ und $x(s) + \omega(s) \leq t \leq b$ hinzu, so folgt dasselbe asymptotische Verhalten auch für $\int_a^b \exp(-g(s, t)) dt$. Verf. zeigt, daß dieser einfache Satz zahlreiche praktische Anwendungen gestattet, wie z. B. auf die Mellin-Transformation und die Laplace-Transformation. Er gibt auch die entsprechenden Sätze für Reihen statt Integrale und betrachtet überdies komplexwertige Integranden und das asymptotische Verhalten in einem Winkelraum.

H. D. Kloosterman.

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Fischer, H. R.: Limesräume. *Math. Ann.* 137, 269—303 (1959).

In verschiedenen Gebieten sind Konvergenzstrukturen aufgetreten, die sich nicht durch Topologien erklären lassen, so etwa die „pseudo-topologies“ in der Distributionstheorie. Verf. hält es daher für sinnvoll, den Begriff des topologischen Raumes in einer hinreichend umfassenden Weise zu verallgemeinern zum Begriff

des „Limesraumes“. Sei E eine Menge, $P(E)$ der Verband ihrer Teilmengen. Ein nichtleeres \cap -Ideal in $P(E)$ heißt ein Filter. Eine Limitierung von E wird nun dadurch gegeben, daß jedem $x \in E$ eine Teilmenge τx der Menge $F(E)$ aller dieser Filter zugeordnet ist, so daß gilt: (L_1) Mit \mathfrak{F} gehört auch jeder feinere Filter zu τx ; mit \mathfrak{F} und $\tilde{\mathfrak{F}}$ gehört auch der von der Vereinigung erzeugte Filter zu τx (d. h.: τx ist \mathcal{A} -Ideal in $F(E)$). (L_2) Der von x erzeugte Ultrafilter x gehört zu τx . — Ein zu τx gehöriger Filter \mathfrak{F} heißt konvergent gegen x bezüglich der Limitierung τ ; das Paar (E, τ) heißt Limesraum. Ist speziell τx ein \mathcal{A} -Hauptideal in $F(E)$ (für jedes $x \in E$), so liegt eine Hauptideal-Limitierung vor (identisch mit einer prätopologie im Sinne von Choquet); der erzeugende Filter $\mathfrak{B}(x)$ kann etwa UmgebungsfILTER von x bezüglich τ genannt werden. Gilt zusätzlich: Zu $V \in \mathfrak{B}(x)$ existiert $W \in \mathfrak{B}(x)$, so daß aus $y \in W$ folgt $V \in \mathfrak{B}(y)$, so ist τ eine Topologie auf E . — Nennt man eine Untermenge A eines Limesraumes E τ -offen, wenn $x \in A$ impliziert $A \in \mathfrak{F}$ für jedes $\mathfrak{F} \in \tau x$, so definiert das System aller τ -offenen Mengen eine Topologie auf E , so daß also jeder Limitierung eindeutig eine Topologie zugeordnet ist. Diese erweist sich als die feinste Topologie auf E , welche schwächer ist als τ . — Eine ganze Reihe von Sätzen über Topologien läßt sich auf Limitierungen übertragen. Insbesondere werden Trennungsgaxiom, Adhärenz und Kompaktheit (jeder Ultrafilter konvergiert) diskutiert. Stetige Abbildungen von Limesräumen, Summenlimitierungen und Produktlimitierungen werden ausführlich untersucht. Es folgen Beiträge zur „limitierten Algebra“ (in Verallgemeinerung der topologischen Algebra). Eine limitierte Gruppe ist eine Gruppe, die zugleich Limesraum ist, so daß die Gruppenoperationen stetig sind (zulässige Limitierung). Nach Erklärung der Cauchyfilter wird u. a. gezeigt, daß jede kompakte limitierte Gruppe komplett ist. Auf die Frage nach der Komplettierung limitierter Gruppen wird jedoch nicht eingegangen. Es werden dann zulässige Limitierungen für reelle und komplexe Vektorräume untersucht, die mit geeigneten Topologien verglichen werden. Der Dualraum wird untersucht. Es folgen Überlegungen zur Darstellung von Limitierungen als induktive Limes von lokalkonvexen Topologien. Hier ergibt sich schließlich der Zusammenhang mit den Distributionen, die den Dualraum eines Limesraumes bilden, welcher induktiver Limes von lokalkonvexen Funktionenräumen ist. *D. Laugwitz.*

Musielak, J. and W. Orlicz: On modular spaces. *Studia math.* 18, 49—65 (1959).

Eine auf einem linearen Raum X erklärte Funktion $\varrho(x)$ mit $-\infty < \varrho(x) \leq \infty$ heißt ein Modular, wenn gilt: 1. $\varrho(x) = 0$ dann und nur dann, wenn $x = 0$; 2. $\varrho(-x) = \varrho(x)$; 3. $\varrho(\alpha x + \beta y) \leq \varrho(x) + \varrho(y)$ für $\alpha, \beta \geq 0$ mit $\alpha + \beta = 1$. Dies ist eine Verallgemeinerung des von H. Nakano und seiner Schule eingeführten und untersuchten Begriffs des Modulares. Zusätzliche Forderungen an $\varrho(x)$ sind: (B1) Aus $x_n \rightarrow 0$ folgt $\varrho(x_n x) \rightarrow 0$; (B2) Aus $\varrho(x_n) \rightarrow 0$ folgt stets $\varrho(\alpha x_n) \rightarrow 0$ für reelles α . Es sei X_ϱ die Menge aller $x \in X$ mit $\varrho(x) < \infty$, X_ϱ^* die Menge aller $x \in X$ mit $\varrho(kx) < \infty$ für geeignetes $k > 0$; X_ϱ^* ist stets ein linearer Raum. Es bezeichne \bar{X}_ϱ die Menge aller $x \in X_\varrho$, die (B1) erfüllen. Eine Folge $x_n \in X$ ϱ -konvergiert gegen x , wenn es ein $k > 0$ gibt mit $\varrho(k(x_n - x)) \rightarrow 0$. Die Folge $x_n \in X$ ist eine ϱ -Cauchyfolge, wenn $\varrho(x_n - x_m) \rightarrow 0$ gilt. $M \subset X$ heißt ϱ -vollständig, wenn jede ϱ -Cauchyfolge aus M einen ϱ -Limes in M besitzt; M heißt stark ϱ -vollständig, wenn für ein festes $k > 0$ aus $\varrho(x_n - x_m) \rightarrow 0$ stets $\varrho(k(x_n - x)) \rightarrow 0$ folgt für den ϱ -Limes x . Es bezeichne \bar{X}_ϱ^* den linearen Raum aller x mit $kx \in \bar{X}_\varrho$ für geeignetes $k > 0$. Man erklärt auf \bar{X}_ϱ^* durch $\|x\| = \inf \left\{ \varepsilon > 0, \varrho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leq \varepsilon \right\}$ eine F -Norm. Aus der F -Normkonvergenz folgt stets die ϱ -Konvergenz; beide sind äquivalent, wenn (B2) für alle Folgen aus \bar{X}_ϱ^* zutrifft. Aus der starken ϱ -Vollständigkeit von \bar{X}_ϱ^* folgt stets die F -Normvollständigkeit. Es wird eine Reihe von Beispielen allgemeiner Art

untersucht, insbesondere auf die Gültigkeit von $\bar{X}_\varrho^* = X_\varrho^*$, auf starke ϱ -Vollständigkeit, auf (B2) und weitere Bedingungen für $\varrho(x)$. Sind die X_i lineare Räume mit den Modularen $\varrho_i(x)$, so werden auf dem Cartesischen Produkt $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ die Module $\varrho^1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varrho_i(x_i)$, $\varrho^2(x) = \sup_i \varrho_i(x_i)$, $\varrho^3(x) = \sup_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varrho_i(x_i)$ eingeführt. Ist $M(u)$ eine für $u \geq 0$ erklärte nichtabnehmende stetige Funktion mit $M(0) = 0$, $M(u) > 0$ für $u > 0$, so ist die verallgemeinerte Variation $V_M(x) = \sup_i \sum_i M(|x(t_i) - x(t_{i-1})|)$ ein Modular auf dem Raum der auf $[a, b]$ erklärten Funktionen $x(t)$. Auch Module der Gestalt $\varrho(x) = \int M(t, x(t)) dt$ für gewisse $M(u, v) \geq 0$ und der Form $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T M(x(t)) dt$ auf geeigneten Funktionenräumen werden studiert.

G. Köthe.

Nakano, Hidegorô: On an extension theorem. Proc. Japan Acad. 35, 127 (1959). Korrektur einer früheren Note des Verf. (dies. Zbl. 79, 324).

G. Köthe.

Yamamuro, Sadayuki: On conjugate spaces of Nakano spaces. Trans. Amer. math. Soc. 90, 291—311 (1959).

Ein Nakanoraum R ist ein universal stetiger halbgeordneter linearer Raum, auf dem ein Modular $m(x)$ erklärt ist. Auf R sind die erste Norm $\|x\| = \inf_{\xi > 0} \frac{1 + m(\xi x)}{\xi}$ und die zweite Norm $\|x\| = \inf_{m(\xi x) \leq 1} \frac{1}{|\xi|}$ erklärt. Der konjugierte Raum \bar{R} besteht aus allen universal stetigen Linearfunktionen $x(x)$ (d. h. aus $x_\lambda \downarrow 0$ folgt $\inf |\bar{x}(x_\lambda)| = 0$). Der modularkonjugierte Raum \bar{R}^m besteht aus allen bezüglich einer der beiden Normen beschränkten $x \in R$. Es ist \bar{R}^m ein Nakanoraum mit dem Modular $\bar{m}(\bar{x}) = \sup_{x \in R} \{\bar{x}(x) - m(x)\}$. Es wird zuerst ein neuer Beweis für den Reflexivitätssatz von Nakano gegeben, wonach $m(x) = \sup_{\bar{x} \in \bar{R}^m} \{\bar{x}(x) - \bar{m}(\bar{x})\}$ gilt.

Es sei der Modular $m(x)$ endlich, d. h. $m(x) < \infty$ für alle $x \in R$ und es sei das Modularepektrum $\omega(\xi, a, p)$ in ξ differenzierbar (für diesen und andere Begriffe vgl. H. Nakano, Modulared semi-ordered linear spaces, dies. Zbl. 41, 234), es sei ferner, $\pi(\xi, a, p) = \inf_{\varepsilon > 0} \frac{1}{\varepsilon} \{\omega(\xi + \varepsilon, a, p) - \omega(\xi, a, p)\}$; ist $\|a\| = 1$ und a einfach (d. h. $m(a) < \infty$ und aus $m([p])a = 0$ folgt $[p]a = 0$ für jeden Projektor $[p]$), so gilt für das Mazursche Funktional

$$\Phi_a(x) = \lim_{\eta \rightarrow 0+} \frac{1}{\eta} (\|a + \eta x\| - \|a\|)$$

die Integraldarstellung $\Phi_a(x) = \frac{1}{\pi(1/a)} \int_{[a]} \pi(1, a, p) \left(\frac{x}{a}, p\right) m(dp)$; dabei ist $\pi(\xi/a) = \inf_{\varepsilon \leq 0} \frac{1}{\varepsilon} \{m((\xi + \varepsilon)a) - m(\xi a)\}$; das Integral ist aus der Nakanoschen Theorie bekannt und stellt ein lineares Funktional $a^{\bar{R}}(x)$ dar. Es gilt $\|a^{\bar{R}}\| = a^R(a) = \pi(1/a)$, falls $m(a) = 1$ ist. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit der Beziehungen $\|a^{\bar{R}}\| \cdot \|a\| = a^{\bar{R}}(a)$ bzw. $\|a^{\bar{R}}\| \cdot \|a\| = a^{\bar{R}}(a)$ gegeben. Ferner werden für die Elemente von \bar{R} Integraldarstellungen angegeben. Schließlich wird untersucht, wann aus der strikten Konvexität des Modulares $[m(\frac{1}{2}(\xi + \eta)x) = \frac{1}{2}(m(\xi x) + m(\eta x))$ für $\xi, \eta > 0]$ die strikte Konvexität der ersten und zweiten Norm auf R folgt.

G. Köthe.

Shimogaki, Tetsuya: A generalization of Vainberg's theorem. I. Proc. Japan Acad. 34, 518—523 (1958).

Es sei R ein nichtatomischer modularer halbgeordneter linearer Raum, dessen Modular $m(x)$ monoton vollständig ist, d. h. aus $0 \leq a_\lambda \uparrow_\lambda$ und $\sup_\lambda m(a_\lambda) < \infty$ folgt die Existenz von $\bigcup_\lambda a_\lambda$ in R . Ein linearer Operator H auf R heißt zerlegbar, wenn $P(Hx) = H(Px)$ gilt für alle Projektionen P von R auf normale lineare Teilräume. Es wird bewiesen, daß zu jedem zerlegbaren Operator H auf R dann und nur dann eine Zahl $\gamma \geq 0$ und ein nichtnegatives Element $c \in R$ existieren mit $|Hx| \leq c + \gamma|x|$ für alle $x \in R$, wenn der Modular m fast endlich ist (dies bedeutet: Die Menge aller $a \in R$ mit $m(\xi a) < \infty$ für alle $\xi \geq 0$ bildet die Mannigfaltigkeit $F_m \subset R$; folgt aus $|a| \cap |b| = 0$ für alle $b \in F_m$ stets $a = 0$, so heißt $m(x)$ fast endlich). G. Köthe.

Andô, Tsuyoshi: On the structure of the associated modular. Proc. Japan Acad. 34, 587—588 (1958).

Für die Terminologie vgl. H. Nakano, *Modulated Semi-ordered Linear Spaces*, dies. Zbl. 41, 234. Es sei R ein modularer halbgeordneter linearer Raum mit dem Modular m . Im allgemeinen ist der konjugierte Raum \bar{R}^m ein echter Teilraum des assoziierten Raumes \tilde{R}^m . Es sei $(\bar{R}^m)^\perp$ das orthogonale Komplement von \bar{R}^m in \tilde{R}^m . Dann wird bewiesen, daß der assoziierte Modular \tilde{m} auf $(\bar{R}^m)^\perp$ linear ist und durch die Formel $\tilde{m}(\tilde{a}) = \sup_{m(x) < \infty} |\tilde{a}(x)|$ für alle $\tilde{a} \in (\bar{R}^m)^\perp$ gegeben wird. G. Köthe.

Koshi, Shozo: On semi-continuity of functionals. I. Proc. Japan Acad. 34, 513—517 (1958).

R sei ein halbgeordneter linearer Raum, der superuniversal stetig und total stetig ist, d. h. die folgenden beiden Voraussetzungen erfüllt: a) Zu jeder Doppelfolge $[p_{ij}] \uparrow_{j=1}^\infty [p]$ von Projektoren existiert eine Folge $[p_k]$ von Projektoren mit $[p_k] \uparrow_{k=1}^\infty [p]$ und $[p_k] \leq [p_{i,l(i,k)}]$ für geeignete $l(i,k)$; b) zu jedem System von Elementen $a_\lambda \geq 0$ aus R existiert eine Teilfolge a_{λ_i} mit $\bigcap_\lambda a_\lambda = \bigcap_{i=1}^\infty a_{\lambda_i}$. Ein lineares Funktional f auf R heißt beschränkt, wenn $\sup_{|b| \leq |a|} |f(b)| < \infty$ für alle a gilt; f heißt universal stetig, wenn aus $a_\lambda \downarrow 0$ stets $\inf_\lambda |f(a_\lambda)| = 0$ folgt. Ein linearer Teilraum M von R heißt halbnormal, wenn mit a alle b mit $|b| \leq |a|$ in M liegen; M heißt vollständig, wenn aus $|a| \cap |b| = 0$ für alle $b \in M$ stets $a = 0$ folgt. Es wird folgende Vermutung von Amemiya bewiesen: Ist ein beschränktes lineares Funktional f auf R orthogonal zu allen universal stetigen linearen Funktionalen, so verschwindet f auf einem vollständigen halbnormalen Teilraum von R . Jedes beschränkte lineare Funktional fällt auf einem geeigneten vollständigen halbnormalen Teilraum mit einem universal stetigen Funktional zusammen. G. Köthe.

Nakano, Hidegorô and Masahumi Sasaki: Convergence concepts in semi-ordered linear spaces. I. Proc. Japan Acad. 35, 25—30 (1959).

Nakano, Hidegorô: Convergence concepts in semi-ordered linear spaces. II. Proc. Japan Acad. 35, 83—88 (1959).

I. Es sei R im folgenden ein stetiger halbgeordneter linearer Raum. Die Ordnungskonvergenz $a_0 = \lim_{v \rightarrow \infty} a_v$ bedeutet $a_0 = \bigcap_{v=1}^\infty \bigcup_{\mu \geq v} a_\mu = \bigcup_{v=1}^\infty \bigcap_{\mu \geq v} a_\mu$. Eine Abbildung a aller Folgen a_v ($v = 0, 1, 2, \dots$) auf Folgen a_v^a heißt ein Operator, wenn aus $a_0 = \lim a_v$ stets $a_0^a = \lim a_v^a$ folgt und a_v^a ($v \geq 1$) nur von der Folge a_v ($v \geq 1$) abhängt. Das Produkt $a \cdot b$ wird durch $a_v^{ab} = (a_v^a)^b$ erklärt. Eine Menge \mathfrak{A} von Operatoren a heißt ein Prozeß, wenn zu zwei Folgen a_v, b_v mit $a_0 \neq b_0$ stets ein $a \in \mathfrak{A}$ mit $a_0^a \neq b_0^a$ existiert. Eine Klasse \mathfrak{A} von Prozessen \mathfrak{A} heißt ein Modifikator, wenn

zu zwei $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \in A$ stets ein $\mathfrak{A} \in A$ mit $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ existiert. Eine Folge a_ν ($\nu \geq 1$) heißt A -konvergent, wenn es ein $a_0 \in R$ und ein $\mathfrak{A} \in A$ gibt, so daß $a_0^{\mathfrak{A}} = \lim a_\nu^{\mathfrak{A}}$ für alle $\alpha \in \mathfrak{A}$ gilt. Es ist dann $a_0 = A\text{-}\lim a_\nu$ eindeutig bestimmt. Folgt aus $a_0 = A\text{-}\lim a_\nu$ stets $a_0 = B\text{-}\lim a_\nu$, so schreibt man $A > B$. Gilt $A > B$ und $B > A$, so heißen A und B äquivalent, $A \sim B$. Zu zwei Modifikatoren A und B existiert das direkte Produkt $A \circ B$, bestehend aus allen $\alpha \mathfrak{b}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \in A$, $\mathfrak{B} \in B$. Auch ein Produkt AB mit $A \circ B > AB$ läßt sich erklären. Der identische Operator 1 erzeugt den Prozeß $\{1\}$, der das einzige Element des Modifikators O ist, O -Konvergenz bedeutet Ordnungskonvergenz. Alle Operatoren der Teilfolgenbildung erzeugen einen Modifikator S , alle Projektoren $[p]$, die einer Folge a_ν die Folge $[p]a_\nu$ zuordnen, erzeugen einen Modifikator L . Schließlich sei I der Modifikator, der aus allen Operatoren $a_p^i = (a_\nu \cap p) \cup q$ erzeugt wird, die zu Paaren $p \geq 0 \geq q$ von Elementen in R gehören. Diese Modifikatoren werden genauer untersucht. Ein aus O, S, L, I durch Produkt- und direkte Produktbildung abgeleiteter Modifikator heißt ein Standardmodifikator. Ist R superuniversalstetig, so ist jeder Standardmodifikator äquivalent einem der Modifikatoren O, S, L, LS, SL . Ist R überdies vollständig (d. h. jede Folge orthogonaler Elemente in R ist beschränkt), so ist jeder Standardmodifikator äquivalent zu O oder S . — II. R sei jetzt lokal superuniversalstetig, d. h. R sei stetig und es gebe eine Menge von Projektoren $[p_\lambda]$ mit $\bigcup_\lambda [p_\lambda] = 1$, so daß jedes $[p_\lambda]R$ superuniversalstetig ist. Ein Modifikator heiße einfach, wenn er aus S, L, I und $L \circ S$ durch Produktbildung erhalten werden kann. Es gilt dann, daß jeder einfache Modifikator äquivalent einem der folgenden ist: $LSL < SLS < \frac{LS}{SL} < L \circ S < \frac{L}{S} < O$. Ist R überdies vollständig, so ist jeder Standardmodifikator äquivalent einem der Modifikatoren $LS < SL < \frac{L}{S} < O$.

G. Köthe.

Dynin, A. S.: On spaces nuclear in different senses. Doklady Akad. Nauk SSSR 121, 790—792 (1958) [Russisch].

L'A. démontre que la nucléarité de Gelfand équivaut à la nucléarité de Grothendieck pour les espaces (F) et (DF) . Il donne aussi des exemples d'espaces nucléaires au sens de Grothendieck qui ne sont pas nucléaires d'après Gelfand. G. Marinescu.

Singer, Ivan: Remarque sur un théorème d'approximation de H. Yamabe. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 26, 33—34 (1959).

Yamabes Satz für normierte Vektorräume (dies. Zbl. 36, 362) wird auf reelle topologische Vektorräume E ausgedehnt: Ist M eine konvexe überall dichte Teilmenge von E und sind f_1, \dots, f_m stetige lineare Funktionale auf E , so existiert zu jedem $x \in E$ und jeder Umgebung V von x ein $p \in M$ mit $p \in V$ und $f_i(p) = f_i(x)$ für alle i .

G. Aumann.

Colojoară, Ion: Sur une topologie définie à l'aide des familles de quasi-seminormes. Acad. Republ. popul. Romîne, Studii Cerc. mat. 9, 371—383, russ. und französ. Zusammenfassg. 381—383 (1958) [Rumänisch].

Soit $p(x)$ une fonction sous-additive vérifiant en plus $p(\alpha x) = |\alpha|^r p(x)$; c'est — suivant la terminologie de l'A. — une quasi seminorme d'ordre r . L'A. étudie les propriétés élémentaires de structure des espaces vectoriels topologiques dont la topologie est définie par une famille de quasi-seminormes d'ordre r (ce ne sont généralement pas des espaces localement convexes mais qui jouissent de propriétés analogues plus faibles).

G. Gussi.

Kadec (Kadets), M. I.: On strong and weak convergence. Doklady Akad. Nauk SSSR 122, 13—16 (1958) [Russisch].

The following two theorems are proved: Theorem 1. Every separable Banach space may be renormed in such a way that the following condition (C) holds:

if x_n converges weakly to x_0 and $\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$, then $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$. Theorem 2. Any two separable reflexive Banach spaces are homeomorphic to each other. For the proof, the spaces are renormed first according to theorem 1 and a one-to-one correspondence is established by means of "deviation sequences" (see M. I. Kadec, dies. Zbl. 66, 94). The continuity of this correspondence follows from the condition (C).

V. Pták.

Kadec (Kadets), M. I.: On the connection between weak and strong convergence. Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1959, 949—951, russ. und engl. Zusammenfassg. 951—952 (1959) [Ukrainisch].

Let Γ be a linear total set of linear functionals defined in a separable Banach space E and satisfying the following condition: There exists such a number $\eta > 0$ that for every $x \in E$ an $f \in \Gamma$ can be found satisfying the inequality $|f(x)| \geq \eta \cdot \|f\| \cdot \|x\|$. If E is a space which has a basis, Γ may be a linear hull of functionals, which are biorthogonal to the elements of the basis. If $E = E_1$ is a separable conjugate Banach space, Γ may be a set of weak continuous linear functionals, i. e. functionals generated by the elements of the space E_1 . Theorem 1. A new norm $\|\cdot\|_*$ may be defined in E , equivalent to the usual one and causing the conditions

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n - x) = 0 \text{ for all } f \in \Gamma, \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_* = \|x\|_*$$

to result in strong convergence: $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_* = 0$. With the aid of the theorem 1 we may prove

Theorem 2: All separable conjugate Banach spaces are homeomorphic. Engl. Zusammenfassg.

Sundaresan, K.: Orthogonality in normed linear spaces. J. Indian math. Soc., n. Ser. 22, 99—107 (1959).

Durch den Ansatz $\sin \theta = \inf \{\|x + h\| / \|x\| : h \in S\}$ wird ein Winkel $\langle x, S \rangle = \theta$ zwischen einem Element $x \neq 0$ und einem abgeschlossenen linearen Unterraum S eines reellen normierten Raumes B definiert. Ist $S = \{\lambda y\}$ eindimensional, so setzt man $\langle x, y \rangle = \langle x, S \rangle$. Im allgemeinen gilt $\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$. Für $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}\pi$ ergibt sich die von James (dies. Zbl. 60, 262, zweites Referat) eingeführte Orthogonalität ($x \perp y =: \|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ für alle λ). Es wird untersucht, in welchen Fällen es zu jedem abgeschlossenen linearen Unterraum S ein Element x gibt, so daß der Winkel zwischen x und S einen vorgegebenen Wert besitzt. Zu jedem Element x und jedem Winkel θ existiert ein y mit $\langle x, y \rangle = \theta$.

A. Pietsch.

Alexiewicz, A. and Z. Semadeni: Linear functionals on two-norm spaces. Studia math. 17, 121—140 (1958).

Es sei $\langle X, \|\cdot\| \rangle$ ein normierter Raum; X sei ferner ein B_0^* -Raum, d. h. eine Folge wachsender Halbnormen $[x]_i$, $i = 1, 2, \dots$, sei gegeben und durch $\|x\|_* =$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{[x]_k}{1 + [x]_k}$ sei eine inhomogene Norm $\|\cdot\|_*$ auf X erklärt. Es wird vorausgesetzt,

daß $\|\cdot\|$ feiner als $\|\cdot\|_*$ ist. Dann ist X ein sogenannter Zweinormenraum. Die γ -Konvergenz $x_n \xrightarrow{\gamma} x_0$ in X wird durch $\lim \|x_n - x_0\|_* = 0$ und $\sup \|x_n\| < \infty$ erklärt. Es wird schließlich noch vorausgesetzt, daß aus $x_n \xrightarrow{\gamma} x_0$ stets $\|x_0\| \leq \liminf \|x_n\|$ folgt. Bezeichnet \mathcal{E} bzw. \mathcal{E}^* die konjugierten Räume zu $\langle X, \|\cdot\| \rangle$ bzw. $\langle X, \|\cdot\|_* \rangle$ und \mathcal{E}_γ den Raum der γ -stetigen linearen Funktionale auf X , so gilt $\mathcal{E}^* \subset \mathcal{E}_\gamma \subset \mathcal{E}$. Es wird gezeigt, daß aus $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}_\gamma$ folgt, daß die Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_*$ äquivalent sind. Es wird eine lokalkonvexe Topologie auf X angegeben, die als zugehörigen Konvergenzbegriff gerade die γ -Konvergenz ergibt. Sie ist verschieden von der von A. Wiweger (dies. Zbl. 79, 126) angegebenen Topologie. Die Elemente $\xi(x)$ von \mathcal{E}_γ lassen sich charakterisieren als die Grenzwerte $\lim \xi_n(x)$ von $\xi_n \in \mathcal{E}^*$ mit $\|\xi - \xi_n\| \rightarrow 0$. Es wird gezeigt, daß ein auf einem linearen Teilraum von X erklärtes γ -stetiges lineares Funktional sich nicht immer auf ganz X γ -stetig fortsetzen läßt. Es wird schließlich für eine Anzahl von Beispielen die explizite Form der γ -stetigen linearen Funktionale bestimmt.

G. Köthe.

Vidav, Ivan: Zur Axiomatik des Hilbertschen Raumes. Math. Z. 71, 458—460 (1959).

Verf. zeigt, daß die üblichen Axiome zur Definition eines Moduls \mathfrak{M} über einem beliebigen Ring mit Einselement \mathfrak{R} durch Einbeziehung einer Forderung für geeignet auf \mathfrak{M} definierte „lineare Formen“ $f: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{R}$ wesentlich reduziert werden können, und wendet diese Tatsache zur Aufstellung eines abgeschwächten Axiomensystems für einen Hilbertschen Raum an. *K. Leichtweiß.*

Fernández-Long de Foglio, Susana: Extension de la différentielle d'Hadamard-Fréchet aux applications entre deux espaces vectoriels L. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 1108—1110 (1959).

Eine Abbildung $g(\lambda)$ der reellen Zahlen in einen L -Raum heiße differenzierbar in λ_0 und $g'(\lambda_0)$ heiße Ableitung, wenn die Differenz zwischen Ableitung und Differenzenquotient gegen Null geht, wie auch immer die Folge der Argumentzuwächse gegen 0 geht. Eine Abbildung $y = f(x)$ eines L -Raumes in einen anderen heißt differenzierbar in x_0 , wenn es eine stetige lineare Abbildung $y = U(x)$ gibt, so daß für jede in x_0 differenzierbare Kurve $x = g(\lambda)$ die Abbildung $f(g(\lambda))$ in x_0 differenzierbar ist und daselbst die Ableitung $U(g'(\lambda_0))$ hat. Es werden die wichtigsten Eigenschaften für diese Verallgemeinerung des Fréchet'schen Differentials angegeben, insbesondere die Kettenregel. *D. Laugwitz.*

Mibu, Yoshimichi: Cauchy's theorem in Banach spaces. J. math. Soc. Japan 11, 76—82 (1959).

Seien X, Y, Z komplexe Banach-Räume und sei $x \circ y = y \circ x$ ($x \in X, y \in Y, x \circ y \in Z$) eine Bilinearform mit $\|x \circ y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Ferner sei $f(x): \Gamma \rightarrow Y$ (Γ rektifizierbare Kurve in X), so daß das Kurvenintegral

$$\int_{\Gamma} f(x) \circ dx = \lim \sum f(x_n) \circ (x_{n+1} - x_n)$$

in üblicher Weise erklärt ist. Sei nun $f(x)$ im konvexen Gebiet $D \subseteq X$ Fréchet-differenzierbar und gelte für das F -Differential $df(x; h) k = df(x; k) h$. Dann beweist Verf. unter diesen Voraussetzungen den Cauchyschen Integralsatz $\int f(x) \circ dx = 0$ für jeden geschlossenen rektifizierbaren Weg in D . Der Beweis wird in gewohnter Weise auf den Fall der Dreiecke zurückgespielt. Für $X = Y = Z =$ kommutative Banachalgebra mit Einselement erhält man daraus den Satz von E. R. Lorch (dies. Zbl. 60, 272. 2. Ref.). Ist andererseits Y der Raum aller stetigen linearen Abbildungen $X \rightarrow Z$, so ergibt sich $\int f(x; dx) = 0$ für jede in einem konvexen Holomorphiegebiet gelegene geschlossene Kurve. *D. Laugwitz.*

Maksudov, Š. T.: Über die Operatormultiplikation nach Mikusiński. Doklady Akad. Nauk Uzb. SSR 1959, Nr. 3, 3—6 (1959) [Russisch].

For a homogeneous, countable additive $*$ -operation such that $1 * g(t) = \int_0^t g(s) ds$ the author concludes that it is reasonable to define $f * g(t)$ of two analytical functions as $\int_0^t f(t-s) g(s) ds$. However the reviewer does not see the advantage of such approach to the definition of convolution compared to the usual one (J. J. Hirschman-D. V. Widder, The convolution transform (this Zbl. 65, 93)). *S. Kurepa.*

Łojasiewicz, S.: Sur la valeur et la limite d'une distribution en un point. Studia math. 16, 1—36 (1957).

In der vorangegangenen Noten (dies. Zbl. 65, 102; 72, 131) eingeführte Wert einer Distribution wird für Distributionen in einer Variablen genauer untersucht. Es gilt das folgende Kriterium: Die Distribution T besitzt im Punkte x_0 dann und nur dann den Wert $T(x_0) = C$, wenn es in einer Umgebung von x_0 eine stetige Funk-

tion $F(x)$ und eine nicht negative ganze Zahl n gibt, so daß die Beziehungen $T = F^{(n)}$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{C}{n!}$ gelten.

A. Pietsch.

Łojasiewicz, S.: Sur la fixation des variables dans une distribution. *Studia math.* 17, 1—64 (1958).

Die Definition des Wertes einer Distribution wird auf Distributionen in mehreren Variablen ausgedehnt. Dabei ergibt sich folgende verallgemeinerte Problemstellung: Kann man der Distribution $T(x, y)$ mit $x = (x_1, \dots, x_m)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ für einen festen Punkt x^0 eine Distribution $T(x^0, y)$ zuordnen, m. a. W., kann man die Variable $x = x^0$ festhalten? Verf. untersucht zu diesem Zweck den distributionstheoretischen Limes $\lim_{\lambda \rightarrow 0} T(x^0 + \lambda x, y)$. Ergibt sich als Limes eine Distribution $S(y)$, die nur von y abhängt, so wird $T(x^0, y) = S(y)$ gesetzt. Man bezeichnet $S(y)$ als Schnitt (section) von T durch den Punkt x^0 . Als Spezialfall ($n = 0$) erhält man die Definition für den Wert einer Distribution $T(x)$ im Punkte x^0 . Es werden Kriterien für die Existenz der Schnittdistributionen und des Wertes angegeben (vgl. vorstehendes Referat). Die Definitionen werden in verschiedenen Richtungen abgewandelt.

A. Pietsch.

Anderson, Frank W. and Robert L. Blair: Characterizations of certain lattices of functions. *Pacific J. Math.* 9, 335—364 (1959).

Es handelt sich um das von G. Birkhoff und I. Kaplansky gestellte Problem, den Verband $C(X, R)$ aller stetigen, reellen Funktionen auf einem kompakten Hausdorff-Raum X durch innere (verbandstheoretische) Eigenschaften zu kennzeichnen. Nach den bereits vorliegenden Lösungen dieses Problems durch L. J. Heider (dies. Zbl. 70, 340) und A. G. Pinsker [Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 1 (73), 226—229 (1957)] gelingt es Verf., $C(X, R)$ auf zwei neue Arten durch verbandstheoretische Eigenschaften zu kennzeichnen. Genauer werden sogar zwei allgemeinere Probleme gelöst. Beim ersten wird die Kette R der reellen Zahlen durch eine bedingt vollständige, in-sich-dichte Kette K mit der Intervalltopologie ersetzt und nach Kennzeichnungen des Verbandes $C(X, K)$ gefragt. Beim zweiten Problem wird eine gewisse Klasse von Unterverbänden von $C(X, K)$ charakterisiert. Die gewonnenen Kennzeichnungen von $C(X, K)$ können selbst im Spezialfall $K = R$ nur mittels komplizierter, neuartiger, verbandstheoretischer Begriffe ausgesprochen werden, auf die hier nicht eingegangen werden kann.

H. Bauer.

Gelbaum, Bernard R.: Tensor products of Banach algebras. *Canadian J. Math.* 11, 297—310 (1959).

The author is concerned with the relation between the maximal ideal space of a tensor product of Banach algebras and the maximal ideal spaces of the factors. His main result is as follows: Let A_1, A_2 be commutative Banach algebras, $A_1 \otimes A_2$ their algebraic tensor product, A_3 the completion of $A_1 \otimes A_2$ relative to any norm with respect to which $A_1 \otimes A_2$ is a normed algebra having no dense regular maximal ideal, and \mathfrak{M}_i , $i = 1, 2, 3$, the respective maximal ideal spaces in the weak* topologies. Then there exists a homeomorphism t of \mathfrak{M}_3 onto the Cartesian product $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$. If $t(M_3) = (M_1, M_2)$ and if $E_i: A_i \rightarrow A_i/M_i$, $i = 1, 2, 3$, are the epimorphisms which are determined by the respective maximal ideals, then E_1 and E_2 together determine E_3 and conversely. The mapping t is constructed in a natural way; the same construction leads to a one-one mapping of \mathfrak{M}_3 onto $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ for noncommutative algebras in case A_1 and A_2 have approximate identities. The author does not know whether this mapping is a homeomorphism with respect to the kernel-hull topologies on the maximal ideal spaces. The paper closes with a discussion of representations of a locally compact abelian group in the multiplicative semigroup of a Banach algebra.

M. Jerison.

Civin, Paul and Bertram Yood: Involutions on Banach algebras. Pacific J. Math. 9, 415—436 (1959).

This is a systematic study of the existence of involutions of various kinds in a complex Banach algebra B . A real involution is a real linear anti-automorphism of period two, and an involution is a real involution that is also conjugate linear. If B is commutative, a real involution induces a homeomorphism of the maximal ideal space. Properties of this homeomorphism are established, and are related to the existence of involutions. Examples are given of semi-simple commutative Banach algebras with exactly one involution, and with no involution. Let $\text{sp}(x)$ and $\varrho(x)$ denote the spectrum and spectral radius of x . An involution $x \rightarrow x^*$ is said to be symmetric if $\text{sp}(xx^*)$ is contained in the non-negative real axis, Hermitian-real if $\text{sp}(x)$ is contained in the real axis for each self-adjoint x , regular if the only self-adjoint element x with $\varrho(x) = 0$ is the zero element, and proper if $xx^* = 0$ implies $x = 0$. Kaplansky (this Zbl. 33, 187) has proved that a symmetric involution is Hermitian-real. It is here proved that a regular Hermitian-real involution is proper, and also that, for a symmetric involution in a semi-simple B , regularity of the involution is equivalent to its continuity, and is equivalent to the existence of a faithful $*$ -representation by operators on a Hilbert space. It is also proved that if B is not commutative and has a continuous involution, then B has non-denumerably many distinct involutions. If the given involution is symmetric or Hermitian-real, then the others may be chosen with the same property. More detailed properties are established for involutions in special Banach algebras, namely B^* -algebras, H^* -algebras, and semi-simple annihilator algebras. A final section is concerned with properties of commutative Banach algebras with real involutions.

F. F. Bonsall.

Sachnovič, L. A.: Über die Reduktion von nicht-selbstadjungierten Operatoren auf Dreiecksform. Izvestija vyss. učebn. Zaved., Mat. 1 (8), 180—186 (1959) [Russisch].

Let \mathfrak{H}_m be the direct sum of m ($0 < m \leq \infty$) copies of $L^2(0, 1)$; its elements are denoted by $f(t) = \{f_1(t), f_2(t), \dots\}$. The operator A in \mathfrak{H}_m is called triangular if it is of the form $Af = \frac{d}{dx} \int_0^x f(t) K(x, t) dt$ with some $m \times m$ matrix-valued function $K(x, t)$. Let A be an operator in any Hilbert space H ; the maximal subspace D_A of A invariant under A and A^* , and such that $AA^* = A^*A$ in D_A , is called the complementary component of A . The operator A in H is said to belong to the class T if for any pair H_1, H_2 ($H_1 \subset H_2$, $\dim(H_2 \ominus H_1) > 1$) of its invariant subspaces there exists an invariant subspace H_3 such that $H_1 \subset H_3 \subset H_2$, $H_1 \neq H_3 \neq H_2$. The author proves that given any operator A of class T there exists a triangular operator A in \mathfrak{H}_m (for some m) such that A restricted to $H \ominus D_A$ is unitarily equivalent to A restricted to $\mathfrak{H} \ominus D_A$. The proof makes use of the spectral theory of selfadjoint operators.

Adam Korányi.

Nelson, Edward: Kernel functions and eigenfunction expansions. Duke math. J. 25, 15—27 (1958).

Verf. beweist eine Reihe von Sätzen über Spektralentwicklung positiv definiter (Funktionen-) Kerne im funktionellen Hilbertraum H [Bem. des Ref.: ähnliche Sätze — aber in allgemeinerer und zum Teil schärferer Fassung — wurden von Berezanskij (vgl. dies. Zbl. 72, 312) und Ref. [s. dies. Zbl. 81, 122; 86, 99 und Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. 7, 337—341 (1959)] bewiesen. Es wird u. a. die folgende interessante Verallgemeinerung der Titchmarshschen Formel bewiesen: Es sei H ein Hilbertscher Raum der Äquivalenzklassen der μ -meßbaren Funktionen. Es sei $G(x, y; l)$ die Greensche Funktion des selbstadjungierten Operators $A = A^\times = \int \lambda dE(\lambda)$. Dann besitzt für jede Borelsche Menge $\Delta \subset (-\infty, \infty)$

der Operator $E(\Delta)$ einen Carlemanschen Kern $E(\cdot, \cdot; \cdot)$, für welchen gilt

$$E(x, y; (\alpha, \beta)) + \frac{1}{2} E(x, y; \{\beta\}) + \frac{1}{2} E(x, y; \{\alpha\}) = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} (G(x, y; s + i\varepsilon) - G(x, y; s - i\varepsilon)) ds.$$

K. Maurin.

Kurepa, Svetozar: Semigroups of normal transformations in Hilbert space. Periodicum math.-phys. astron., II. Ser. **13**, 257—266 (1958).

Let $N(r)$ be a representation of the additive semi-group G_+ of positive dyadic rationals by (in general unbounded) normal operators in a Hilbert space \mathfrak{H} . Assume that $N(r)$ is non-singular for all $r \in G_+$ and that the intersection of the domains of all the $N(r)$ is dense in \mathfrak{H} . Using the spectral theory of commutative sets of normal operators the author proves that (1) there exists a (unique) selfadjoint operator A and a semi-group $U(r)$ of unitary operators such that $N(r) = U(r) \exp(rA) = \exp(rA) U(r)$ ($r \in G_+$). (2) If $\lim_{n \rightarrow \infty} \|N(\frac{1}{2^n}) - I\| = 0$ holds, then $N(r)$ can be represented as $\exp(rN)$ with a bounded normal N . On basis of (1) it is shown that a result similar to (1) holds also for normal representations $N(t)$ of the additive semi-group of positive reals provided $\sup_{t \in T} \|N(t)f\| < \infty$ for every f in the domain of all $N(t)$ and for some set T of reals such that $m_i(T + T) > 0$. This is a partial generalization of a well-known theorem of B. Sz.-Nagy.

A. Korányi.

Nakamura, Masahiro and Zirô Takeda: On the extensions of finite factors. I. Proc. Japan. Acad. **35**, 149—154 (1959).

Soient A un facteur fini dans un espace hilbertien séparable, $\overline{\mathfrak{A}}$ le groupe des *-automorphismes de A , K le sous-groupe des *-automorphismes intérieurs de A , G un sous-groupe dénombrable de $\overline{\mathfrak{A}}/K$, $(m_{\alpha\beta})$ un système de facteurs de G à valeurs dans K , définissant une extension $(K, G, m_{\alpha\beta})$ de G par K . Moyennant quelques conditions de normalisation sur les $m_{\alpha\beta}$, on construit un facteur fini contenant A qui admet $(K, G, m_{\alpha\beta})$ comme groupe d'automorphismes intérieurs. On étend certains résultats d'un article antérieur, relatif au cas où $m_{\alpha\beta} \equiv 1$ (ce Zbl. **85**, 99). Etude de l'itération de la construction.

J. Dixmier.

Takeda, Zirô: On the extensions of finite factors. II. Proc. Japan Acad. **35**, 215—220 (1959).

Les extensions de facteurs finis considérées dans l'article précédent sont mises en correspondance biunivoque, moyennant quelques conditions, avec un groupe de cohomologie de degré 2. La situation est simplifiée grâce au lemme suivant: le groupe des *-automorphismes intérieurs d'un facteur fini n'a pas de centre.

J. Dixmier.

Kadison, Richard V. and I. M. Singer: Extensions of pure states. Amer. J. Math. **81**, 383—400 (1959).

Soient H un espace hilbertien, \mathfrak{B} l'algèbre des opérateurs continus de H , \mathfrak{A} une algèbre de von Neumann abélienne. Un „procédé diagonal“ relatif à \mathfrak{A} est une application linéaire positive \mathfrak{D} de \mathfrak{B} dans \mathfrak{A} qui est l'identité sur \mathfrak{A} . On a alors $\mathfrak{D}(AB) = A\mathfrak{D}(B)$, $\mathfrak{D}(BA) = \mathfrak{D}(B)A$ pour $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$. Si \mathfrak{A} est abélienne maximale, il existe une *-représentation φ de \mathfrak{B} et un projecteur E de l'espace de la représentation tels que $\mathfrak{D}(B) = \varphi^{-1}(E\varphi(B)E)$ pour tout $B \in \mathfrak{B}$, et tels que φ soit injectif sur \mathfrak{A} . Si \mathfrak{A} est définie par une base orthonormale de H , \mathfrak{D} est unique et consiste à prendre la partie diagonale de la matrice représentant l'opérateur considéré par rapport à la base en question. Si au contraire \mathfrak{A} est „continue“, \mathfrak{D} est non unique; il résulte de là qu'il existe des états purs de \mathfrak{A} qui se prolongent de plusieurs manières en états purs de \mathfrak{B} (ceci résout négativement un problème d'unicité ouvert depuis assez longtemps). Soit $B \in \mathfrak{B}$, et soit E_n une suite de projecteurs

engendrant A ; alors $B^{|E_1| \dots |E_n|}$ (au sens de von Neumann, ce Zbl. 23, 133) converge uniformément vers un opérateur de \mathfrak{A} si et seulement si $e_1(B) = e_2(B)$ pour tout couple (e_1, e_2) d'états de \mathfrak{B} tels que $e_1|\mathfrak{A} = e_2|\mathfrak{A}$ soit un état pur de \mathfrak{A} . Enfin, soit ω un état de \mathfrak{B} ; disons que ω est „défini“ sur un opérateur hermitien $A \in \mathfrak{B}$ si $\omega(A^2) = \omega(A)^2$; alors ω est pur si et seulement si l'ensemble des éléments définis relativement à ω est maximal pour l'inclusion. J. Dixmier.

Tomiya, Jun: On the projection of norm one in W^* -algebras. II. Tôhoku math. J., II. Ser. 10, 204—209 (1958).

Suite d'un article antérieur (ce Zbl. 81, 112). Soient M une algèbre de von Neumann, N une sous-algèbre de von Neumann de M , π un projecteur de norme 1 de M sur N . Il existe 3 projecteurs centraux z_1, z_2, z_3 dans N tels que, posant $\pi_i(a) = \pi(a)z_i$ ($a \in M$), on ait les propriétés suivantes: 1. π_1 est normal; 2. π_2 est singulier, i. e. le transposé de π_2 transforme les formes positives normales sur N en formes qui ne majorent aucune forme positive normale non nulle sur M ; 3. z_1 et z_2 sont maximaux avec ces propriétés. — Le cas où N est une sous- C^* -algèbre de M est aussi envisagé.

J. Dixmier.

Fell, J. M. G.: Representations of weakly closed algebras. Math. Ann. 133, 118—126 (1957).

Soit A une AW^* -algèbre purement infinie de genre dénombrable. Toute $*$ -représentation R de A dans un espace hilbertien séparable est une „direct summand représentation“ (i. e., le noyau de la restriction de R à tout sous-espace stable est de la forme eA , où e est un projecteur du centre de A). Soient A une AW^* -algèbre, e un projecteur de A de support central 1; alors toute „direct summand représentation“ de A est essentiellement déterminée par sa restriction à eAe . Ces deux résultats montrent que si A est purement infinie, de type I et de genre dénombrable, toute représentation de A dans un espace hilbertien séparable est somme directe de restrictions de la représentation identique à des facteurs directs de A (si A est réalisée avec la multiplicité 1). Certains résultats ont été améliorés depuis (Feldman and Fell, ce Zbl. 80, 101).

J. Dixmier.

Nakai, Mitsuru: Some expectations in AW^* -algebras. Proc. Japan Acad. 34, 411—416 (1958).

Es wird ein Erweiterungssatz vom Typ des Satzes von Hahn-Banach bewiesen, wobei an Stelle der reellen Zahlen als „Skalare“ selbstadjungierte vertauschbare Operatoren eines Hilbertraumes treten: Sei A eine kommutative AW^* -Algebra (vgl. I. Kaplansky, dies. Zbl. 42, 124), B die Menge aller selbstadjungierten Elemente von A , M ein Linksmodul über B ($=$ add. Gruppe mit $b \cdot m$ erklärt $\in M$ für $b \in B$, $m \in M$); sei weiter $n : M \rightarrow B$ subadditiv und positiv-homogen, d. h.

$$n(x + y) \leq n(x) + n(y), \quad n(a \cdot x) = a \cdot n(x) \quad \text{für } 0 \leq a \in B, \quad x, y \in M$$

(A ist als ein $C(S)$ darstellbar und damit teilgeordnet). Eine Abbildung f einer Teilmenge D von M in B heißt n -beschränkt, wenn $-n(-x) \leq f(x) \leq n(x)$ auf D . Dann wird gezeigt: Ist f ein n -beschränkter Homomorphismus eines Teillinksmoduls über B von M mit Werten in B , so kann f zu einem n -beschränkten Homomorphismus des vollen B -Moduls M mit Werten in B erweitert werden. Zwei Anwendungen dieses Satzes werden gegeben: Ist M speziell eine B^* -Algebra mit 1, A eine kommutative AW^* -Algebra aus dem Zentrum von M , die 1 enthält, und heißt A regulär eingebettet in M , falls für jedes System orthogonaler Projektionen $(e_i) \subset A$ mit $\sup_i e_i = 1$ aus $x \in M$, $e_i x = 0$ für alle i folgt $x = 0$, so gilt: A ist genau dann

regulär in M eingebettet, wenn das System der „expectations“ $e : M \xrightarrow{\text{auf}} A$ (vgl. Nakamura and Turumaru, dies. Zbl. 58, 105) total ist, d. h. ist $x \in M$ und gilt $e(xx^*) = 0$ für alle e , so ist $x = 0$. Ist A regulär in M eingebettet, dann wird die Menge aller Norm-stetigen Homomorphismen von M (aufgefaßt als A -Modul) mit

Werten in A von den „quasi-expectations“ algebraisch aufgespannt (jeder solche Homomorphismus läßt sich sogar als Differenz zweier positiver Homomorphismen schreiben). Wegen der Einzelheiten muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden, die einige etwas störende Druckfehler enthält.

H. Günzler.

Takesaki, Masamichi: A note on the cross-norm of the direct product of operator algebra. *Kōdai math. Sem. Reports* **10**, 137—140 (1958).

Soient M_1, M_2 deux C^* -algèbres à éléments unités. La C^* -norme α de $Turumaru$ (ce Zbl. **49**, 87) coïncide avec la norme λ de Schatten (Theory of cross-spaces, ce Zbl. **41**, 435) si et seulement si M_1 ou M_2 est commutative.

J. Dixmier.

Goldberg, Seymour: Some properties of the space of compact operators on a Hilbert space. *Math. Ann.* **138**, 329—331 (1959).

Von Schatten (dies. Zbl. **79**, 128) wurde bewiesen, daß der Banachraum \mathcal{K} aller kompakten Operatoren eines Hilbertraumes niemals zu dem dualen Raum X' eines Banachraumes X äquivalent sein kann. Verf. verschärft diese Aussage für separable Hilberträume, indem er zeigt, daß \mathcal{K} sogar niemals isomorph zu einem Raum X' ist. Das gleiche wird für den Raum aller normalen kompakten Operatoren bewiesen.

A. Pietsch.

Maurin, K.: Sphärische Distributionen auf homogenen Räumen. Eine Verallgemeinerung des Satzes von Bochner-Weil-Rajkow. *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys.* **7**, 151—155, russ. Zusammenfassg. **XII** (1959).

Zwei Anwendungen eines Satzes des Verf. über die Entwicklung positiv definierter Kerne nach Eigendistributionen (dies. Zbl. **81**, 122). Sei (Ω_n, G) ein homogener Raum, wobei die Liesche Gruppe G separabel und zusammenhängend ist; $C_0^\infty(\Omega_n)$ die Menge der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompakten Trägern in Ω_n ; $\theta(\varphi, \psi)$ eine positiv definite invariante hermitesche Form auf $C_0^\infty(\Omega_n)$; $\theta(x, y)$ ein Kern m -ter Ordnung auf Ω_n ($m = 1, 2, \dots$); \mathfrak{Z} das Zentrum der universellen einhüllenden Algebra von \mathfrak{g} , der Lieschen Algebra von G (Gel'fand); $\Delta_\nu = P_\nu(iX_1, \dots, iX_n)$ ($P_\nu \in \mathfrak{Z}$) symmetrische Polynome in den Lieschen Differentialoperatoren X_k ; $\mathfrak{L}(H)$ die Banach-Algebra der beschränkten linearen Operatoren im Darstellungsraum H ; \mathfrak{A} die von Neumannsche W^* -Algebra, die über der Menge der Cayley-Transformierten der Δ_ν aufgespannt ist. \mathfrak{A} erzeugt ein direktes Integral (1) $\mathfrak{S} = \int_A \oplus \mathfrak{S}(\lambda) d\mu(\lambda)$; $G \ni g \rightarrow L_g(\lambda) \in \mathfrak{L}(\mathfrak{S}(\lambda))$ eine faktorielle unitäre Darstellung. Dann gilt Satz 1: Der positiv definite invariante Kern $\theta(\dots)$ induziert eine Zerlegung des Hilbertschen Raumes H in das direkte Integral $\mathfrak{S}(1)$. Dabei diagonalisiert die Fourier-Transformation F die Laplaceschen Operatoren Δ_ν auf (Ω_n, G) . $\theta(x, y)$ wird nach den sphärischen Kernen $\theta(x, y, \lambda)$ entwickelt. Die durch den Kern θ induzierte unitäre Darstellung $G \ni g \rightarrow L_g \in \mathfrak{L}(H)$ von G zerfällt in die faktorielle Darstellung

$$\hat{L}_g = F L_g F^{-1} = \int_A \oplus L_g(\lambda) d\mu(\lambda).$$

Satz 2 ist eine Anwendung von Satz 1 auf den Fall, daß Ω_n die Gruppenmannigfaltigkeit G ist, und stellt somit eine Verallgemeinerung der Sätze von Bochner, A. Weil-Rajkow und H. Weyl dar.

G. Krumbach.

Ehrenpreis, L. and F. I. Mautner: Some properties of the Fourier-transform on semisimple Lie groups. **III.** *Trans. Amer. math. Soc.* **90**, 431—484 (1959).

Verff. setzen ihre Untersuchungen der Gruppe G der konformen Abbildungen des Einheitskreises fort (dies. Zbl. **66**, 357; **79**, 132). Es sei für $1 \leq p \leq 2$ $S_{m,n}^p$ der lineare Raum aller Kugelfunktionen $f(g)$ vom Typus m, n auf G , die den Bedingungen $(\partial f)(kg\zeta\kappa) = O[e^{-2\zeta/p/(1+|\zeta|^2)}]$ für alle $j \geq 0$ und alle Ableitungspolynome ∂ genügen. $S_{m,n}^p$ ist in einer natürlichen Topologie ein Schwartzscher Raum. Durch Fouriertransformation wird $S_{m,n}^p$ topologisch isomorph auf einen Raum $\tilde{S}_{m,n}^p$ ab-

gebildet, dessen Elemente die Form $\{H(s), h^+(l), h^-(l)\}$ haben, $H(s)$ eine im Streifen $1/q < \Re s < 1/p$ analytische Funktion, die gewissen Bedingungen genügt, $h^+(l)$ und $h^-(l)$ endliche Folgen komplexer Zahlen. Die topologische direkte Summe $S^p = \bigoplus_{m,n=0}^{\infty} S_{m,n}^p$ ist eine Faltungsalgebra; ihr entspricht topologisch isomorph eine

Algebra aus Matrizentripeln $(H_{m,n}(s), h_{m,n}^+(l), h_{m,n}^-(l))$, die komponentenweise zu multiplizieren sind. Die abgeschlossenen Ideale von S^p werden untersucht, insbesondere gilt, daß jedes abgeschlossene zweiseitige Ideal von S^2 der Durchschnitt der es enthaltenden zweiseitigen primären abgeschlossenen Ideale ist. Es wird eine Anwendung auf die Entwicklung im Mittel periodischer Funktionen auf G gemacht. Als nächstes werden die maximalen abgeschlossenen zweiseitigen Ideale der Faltungsalgebra D der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger auf G bestimmt. Jede nicht ganze komplexe Zahl s_0 bestimmt genau ein solches Ideal, das aus allen $f \in D$ besteht, deren Fouriertransformierte in s_0 verschwindet. Zu jeder ganzen Zahl $\pm n$ gehören genau drei solche Ideale, die genau angegeben werden. Als Anwendung ergeben sich Aussagen über das Spektrum einer zweiseitigen im Mittel periodischen Funktion. Es folgt eine genaue Untersuchung der Ideale der Faltungsalgebra $L^1(G)$. Insbesondere wird ein $h \in L^1(G)$ angegeben, das in keinem zweiseitigen maximalen abgeschlossenen Ideal liegt, andererseits aber ein zweiseitiges abgeschlossenes Ideal $\neq L^1(G)$ erzeugt. Es sei Γ eine diskrete Untergruppe von G und G/Γ kompakt. Durch die reguläre Darstellung zerfällt $L^2(G/\Gamma)$ in eine diskrete Summe irreduzibler invarianter Teilräume. Die Vielfachheit, in der irgend eine irreduzible unitäre Darstellung in der regulären Darstellung vorkommt, wird genau bestimmt (Analogon zum Frobeniusschen Reziprozitätssatz). Der letzte Abschnitt beschäftigt sich mit dem Fall, daß Γ die Modulgruppe ist, G/Γ ist dann nicht kompakt. Es wird eine Klasse von Modulfunktionen untersucht, die sich eindeutig abbilden lassen auf Paare (a, b) , a eine analytische Funktion, die der Funktionalgleichung der ζ -Funktion über dem Gaußschen Zahlenkörper genügt, b eine rasch abnehmende Zahlenfolge.

G. Köthe.

Williamson, J. H.: On theorems of Kawada and Wendel. Proc. Edinburgh math. Soc. **11**, 71—77 (1958).

Soient G un groupe localement compact, μ une mesure positive bornée sur G , et considérons l'endomorphisme $f \rightarrow \mu * f$ de $L^1(G)$ (défini par une mesure de Haar invariante à gauche). Kawada a montré (ce Zbl. **43**, 31) que si cet endomorphisme est surjectif et si en outre $f \geq 0$ presque partout implique $\mu * f \geq 0$ presque partout, alors la mesure μ est nécessairement ponctuelle. L'A. examine ce qui se passe lorsqu'on ne suppose plus $f \rightarrow \mu * f$ surjectif. Il prouve que l'énoncé de Kawada subsiste alors lorsque G est abélien, ou discret, ou compact, puis construit un ingénieux contre-exemple où G est le groupe de Lie résoluble non abélien de dimension 2.

J. Dieudonné.

Roumieu, Charles: Transformation de Fourier, des distributions généralisées. Applications. C. r. Acad. Sci., Paris **246**, 678—680 (1958).

Let $M_\nu > 0$ ($\nu = 0, 1, \dots$), $M_\nu^2 \leq M_{\nu-1} M_{\nu+1}$, $\sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu^{-1/\nu} < \infty$. $\mathcal{D}(\{M_\nu\})$ denotes the space of all infinitely differentiable functions $f(t)$ ($-\infty < t < \infty$) with compact support, satisfying $|f^{(\nu)}(t)| \leq A k^\nu M_\nu$ ($\nu = 0, 1, \dots$), with an appropriate topology. In an earlier note (this Zbl. **79**, 329) the author has defined a generalized distribution (g. d.) as an element of the dual space $\mathcal{D}'(\{M_\nu\})$. The further assumption is now made that $\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \nu^{-2} \log M_\nu < \infty$ which ensures that the derivatives of a g. d. $S \in \mathcal{D}'(\{M_\nu\})$ also belong to $\mathcal{D}'(\{M_\nu\})$ (cf. p. 248 of Mandelbrojt's book: *Séries adhérentes, régularisation des suites, applications*, this Zbl. **48**, 52). Let $\mathcal{S}(\{M_\nu\})$ be the space of all infinitely differentiable functions $f(t)$ which satisfy $|f^{(\nu)}(t)| \leq$

$A k^p h^\lambda M_r M_\lambda |t|^{-\lambda}$ ($\lambda, r = 0, 1, \dots$). The Fourier transformation is an automorphism of $\mathcal{S}(\{M_r\})$ and by transposition we can define the Fourier transforms of the g. d. belonging to the dual $\mathcal{S}'(\{M_r\})$. — The author states the three results: 1. A generalization of the classical theorem of supports: if φ and ψ have compact supports, then the supporting interval of $\varphi * \psi$ is the sum of the supporting intervals of φ and ψ . 2. Every g. d. with compact support φ is of the form $\gamma * \mu$, where μ is a measure with support bounded from below. 3. A necessary and sufficient condition that given a g. d. with compact support φ there exist a g. d. ϱ with support bounded from below such that $\varphi * \varrho = \delta$. The proof of the last result is indicated.

J. Horváth.

Kolmogorov, A. N.: Entropy per unit time as a metric invariant of automorphisms. Doklady Akad. Nauk SSR 124, 754—755 (1959) [Russisch].

Verf. teilt mit, daß die Sätze 2—4 einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 83, 106) in ihrer dortigen Formulierung nicht gelten. W. A. Rohlin hat ein Gegenbeispiel zu Satz 2 konstruiert, das hier zitiert wird. Für Automorphismen (für den diskreten Fall) wird erneut bewiesen, daß die in der obigen Arbeit im § 3 angegebene Zahl h eine Invariante ist. Verf. bemerkt, daß der Gedanke, Begriffe der Informationstheorie auf die Konstruktion von Invarianten von Automorphismen und Flüßen anzuwenden, bereits in einer Odessaer Diplomarbeit von D. Arov enthalten ist (1957).

W. Richter.

Sinaj (Sinai), Ja. (Ja.): On the concept of entropy for a dynamic system. Doklady Akad. Nauk SSSR 124, 768—771 (1959) [Russisch].

Verf. definiert auf naturgemäße Weise die Entropie für beliebige Automorphismen T eines Lebesgueschen Raumes $[M, \mathcal{S}, \mu]$. Danach werden einige interessante neue metrische Invarianten ergodischer Automorphismen kompakter kommutativer Gruppen (k -dimensionaler Torus) angegeben, und zwar in Form von Funktionen der Eigenwerte.

W. Richter.

Régnier, André: Un théorème ergodique ponctuel purement ensembliste. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 2700—2701 (1959).

Es sei \mathfrak{B} eine Boolesche σ -Algebra von Teilmengen einer Menge $E \in \mathfrak{B}$ und \mathcal{B} der Vektorraum aller \mathfrak{B} -meßbaren, beschränkten, reellen Funktionen auf E ; ferner sei $T: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$ ein σ -Homomorphismus von \mathfrak{B} in sich. Dieser Homomorphismus, aufgefaßt als Transformation der charakteristischen Funktionen in \mathcal{B} , kann dann in natürlicher Weise zu einer linearen Abbildung $T: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ fortgesetzt werden. Es bezeichne T^r die r -fach iterierte Abbildung; für jedes $f \in \mathcal{B}$ werde $S_f^r = \frac{1}{r} \sum_{e=0}^{r-1} T^e f$ gesetzt. Dann wird die Menge aller $x \in E$ untersucht, für welche die Folge $(S_f^r(x))_{r=1,2,\dots}$ konvergiert. Eines der diesbezüglichen Hauptresultate lautet: Bezüglich eines jeden endlichen Maßes m auf \mathfrak{B} sind folgende Aussagen gleichwertig: (1) Für jedes $f \in \mathcal{B}$ konvergiert die Folge (S_f^r) m -fast überall. — (2) Für jede monoton fallende Folge (X_n) von Mengen aus \mathfrak{B} mit leerem Durchschnitt strebt die Folge der Zahlen $\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \sum_{e=0}^{r-1} m(T^e X_n)$ monoton gegen Null.

H. Bauer.

Rolewicz, S.: On inversion of non-linear transformations. Studia math. 17, 79—83 (1958).

Eine eindeutige stetige Abbildung eines F -Raumes X (im Sinn von Banach) auf einen anderen F -Raum Y besitzt eine stetige Inverse U^{-1} , wenn U additiv ist. Setzt man nichts über Additivität voraus, so besagt eine Vermutung von Mazur, daß U^{-1} von der ersten Baireschen Klasse ist. Es wird zuerst ein Beispiel dafür gegeben, daß die Menge der Unstetigkeitspunkte von U^{-1} dicht in Y sein kann. Es wird dann folgender mit der Mazurschen Vermutung verwandter Satz bewiesen: Es sei X ein separabler F -Raum und τ ein Konvergenzbegriff, bezüglich dessen die

Einheitskugel in X folgenkompakt ist (z. B. die schwache Konvergenz; wenn X dualer Raum eines separablen Banachraumes ist) und es sei Y ein F -Raum, in dem aus der Normkonvergenz die τ - und die σ -Konvergenz folgt; ist dann U eine eindeutige (τ, σ) -stetige Abbildung von X auf Y , so ist U^{-1} von der ersten Baireschen Klasse bezüglich der Normkonvergenz.

G. Köthe.

Altman, M.: An extension to locally convex spaces of Borsuk's theorem on antipodes. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. 6, 293—295, russ. Zusammenfassg. XXII (1958).

Der bekannte Borsuksche Antipodensatz, der von M. A. Krasnosel'skij (dies. Zbl. 39, 337) auf den Fall vollständig stetiger Operatoren in Banachschen Räumen übertragen wurde, wird vom Verf. sinngemäß in einem lokal-konvexen, linearen topologischen Raum X ausgesprochen. Er zeigt: Ist U eine offene, konvexe und symmetrische Umgebung des Ursprungs 0 von X , F eine vollständig stetige Transformation von \bar{U} (Hülle von U) in X , $f(x) = x - F(x)$, $0 \notin f(\bar{U} - U)$, $f(-x) = -f(x)$ ($x \in \bar{U} - U$) und bezeichnet $d = d(f, U, 0)$ den Abbildungsgrad von Leray-Schauder (vgl. dies. Zbl. 7, 165), so ist d ungerade. H. Hadwiger.

Altman, M.: On involution in Banach spaces. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. 7, 33—36, russ. Zusammenfassg. III—IV (1959).

Verf. erweitert die von J. W. Jaworowski (dies. Zbl. 67, 407) und A. I. Fet (dies. Zbl. 55, 416) erzielten Verallgemeinerungen des Borsukschen Antipodensatzes, wobei die antipodische Selbstabbildung der n -dimensionalen euklidischen Sphäre S^n durch eine beliebige fixpunktfreie stetige Involution ersetzt ist, auf die Sphäre eines Banachschen Raumes X . Er zeigt: Ist $S = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$, F ein vollständig stetiger Operator $S \rightarrow X$, $f(x) = x - F(x)$, $f(x) \neq 0$ ($x \in S$), U eine stetige, dimensionstreue, involutorische und fixpunktfreie Abbildung $S \rightarrow S$, $f(Ux)/\|f(Ux)\| \neq f(x)/\|f(x)\|$ und bezeichnet $d = d(f, S; 0)$ der Abbildungsgrad von Leray-Schauder, so ist d ungerade. Ein Fixpunktsatz für F zeigt, daß f nicht stetig auf die Vollkugel $Q = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ mit $f(x) \neq 0$ ($x \in Q$) fortgesetzt werden kann.

H. Hadwiger.

Browder, Felix E.: On a generalization of the Schauder fixed point theorem. Duke math. J. 26, 291—303 (1959).

This paper extends Schauder's fixed point theorems in various directions. A first generalization states that if A is a compact absolute neighbourhood retract, f a continuous self-mapping of A such that $f^m(A)$ is contained in a closed acyclic subset of A , where m denotes a positive integer, then f has a fixed point. The proof is a straightforward application of the Lefschetz fixed point theorem. The author remarks that if $H_i(A)$ is the i -th homology group of A over a field and if $f_{*,i}^m$ denotes the homomorphism of $H_i(A)$ induced by f^m , then $f_{*,i}^m = (f_{*,i})^m$. It follows that $A(f) \neq 0$. The second generalization (theorem 2 of the paper), the most important result of the author, runs as follows: let S be an open convex subset of X , a Banach space; let f be a continuous mapping of S into X such that $f(S)$ is contained in a compact; suppose that a positive integer, m , exists such that, S_1 being an open convex subset of S and S_0 a closed convex subset of S_1 : (1) the domain of f^m contains S_1 , (2) $\bigcup_{i=0}^m f^i(S_0) \subset S_1$, (3) $f^m(S_1) \subset S_0$. Then f has a fixed point. The proof of this proposition comprises essentially two steps. First it is shown that there exists a finite dimensional space E satisfying the condition $E \cap S_1 \neq \emptyset$ and a continuous mapping g of $E \cap S$ into E such that the domain of g^m contains $E \cap S_1$ and that $\|g^i(x) - f^i(x)\| < \varepsilon$ for $1 \leq i \leq m$ and $x \in E \cap S_1$, where ε is an arbitrary positive real number. Secondly it is proved that if E is a finite dimensional Banach space, S' and S'_0 closed bounded convex subsets of E , S'_1 an open convex subset of S' , $S'_0 \subset S'_1$, and f a continuous mapping of S' into E , f has a fixed point under the follow-

ing conditions: (1) the domain of f^m contains S'_1 ,

$$(2) \quad N_\zeta \left[\bigcup_{i=0}^m f^i(S'_1) \right] \subset S', \quad (3) \quad N_\zeta \left[\bigcup_{i=0}^m f^i[N_\zeta(S'_0)] \right] \subset S'_1, \quad (4) \quad f^m(S'_1) \subset S'_0.$$

$V_\zeta(A)$ denotes the neighbourhood of A : union of the open balls whose centres are in A and whose radii are $= \zeta$. The author's proofs call only into play the classical theory of simplicial mappings of polytopes and known properties of Banach spaces. The author does not indicate any application of his second generalization to problems of Functional Analysis although it seems probable that it leads to new existence theorems in the theory of boundary value problems. It is not difficult to deduce from theorem 2 the following proposition: let X be a Banach space, f a completely continuous mapping whose domain is X . If $f^m(X)$ is bounded for some positive integer m , then f has a fixed point. A third generalization is concerned with completely continuous mappings of X , a Banach space, into the space of its non empty closed convex subsets. Such a mapping, F say, is said to be completely continuous if: (1) its graph is closed in X^2 , (2) if for every bounded set $S \subset X$, there exists a compact K_S such that $F(x) \cap K_S \neq \emptyset$ for all $x \in S$, (3) if K and K_1 are compact subsets such that $F(x) \cap K_1 \neq \emptyset$ for all $x \in S$ and if x_0 is a point of K , a positive real number δ may be determined in such a way that $\|x - x_0\| < \delta$ implies, ε being a positive constant given in advance:

$$F(x) \cap K_1 \subset N_\varepsilon[F(x_0)] \cap K, \quad F(x_0) \cap K_1 \subset N_\varepsilon[F(x) \cap K_1].$$

The author proves that if F is a mapping of the type just defined and if $F^m(X)$ is bounded for some positive integer m , then there exists an $x \in X$ such that $x \in F(x)$. The proof utilizes the same ideas as that of theorem 2: there exists an "approximation to an arbitrary ε " of F by a continuous mapping g of a finite dimensional space E into itself and g has a fixed point.

C. Racine.

Browder, Felix E.: Functional analysis and partial differential equations. I. Math. Ann. 138, 55—79 (1959).

L'A. si propone di esporre in questo e in un successivo lavoro una trattazione unitaria della teoria dei problemi al contorno per equazioni differenziali alle derivate parziali. Questo primo lavoro è dedicato essenzialmente alla teoria degli operatori lineari chiusi non necessariamente continui, teoria che l'A. ritiene preferibile a quella delle distribuzioni di L. Schwartz (nella quale, come è noto, viene introdotta una opportuna topologia in modo da rendere continui gli operatori differenziali). Siano E, F due spazi lineari di Hausdorff, localmente convessi. E dicesi „pienamente completo“ se, munendo E^* della topologia debole $\sigma(E^*, E)$, ogni $B \subset E^*$ è chiuso se e solo se $B \cap K$ è compatto per ogni compatto $K \subset E^*$. $A \subset E$ dicesi „circolato“ se $\alpha a \in A$ per ogni $a \in A$, α complesso con $|\alpha| \leq 1$. $A \subset E$ dicesi „assorbente“ se per ogni $x \in E$ esiste λ complesso tale che $\lambda x \in A$. E dicesi „tonnelé“ se ogni chiuso convesso circolato assorbente $A \subset E$ contiene l'origine nel suo interno. E dicesi „pienamente tonnelé“ se ogni chiuso sottospazio di E è tonnelé. (Ogni spazio di Fréchet è pienamente completo e pienamente tonnelé). Sia T un operatore lineare con dominio $D(T)$ denso in E e codominio $R(T) \subset F$. Sia $G(T) \subset E \times F$ il grafico di T , T^* l'operatore aggiunto con dominio $D(T^*) \subset F^*$, e codominio $R(T^*) \subset E^*$, $N(T)$ e $N(T^*)$ gli insiemi (di E, F^*) mutati da T, T^* nell'origine (di F, E^* , rispettivamente). Si considerano le seguenti proprietà: (a) $R(T)$ è chiuso in F ; (b) $R(T^*)$ è chiuso in E^* ; (c) munendo E^* della topologia debole $\sigma(E^*, E)$, $R(T^*)$ risulta debolmente chiuso in E^* ; (d) T è un omomorfismo di $D(T)$ in F ; (e) munendo E, F delle topologie deboli $\sigma(E, E^*), \sigma(F, F^*)$, T risulta un omomorfismo di $D(T)$ in F ; (f) T^* è un omomorfismo di $D(T^*)$ in E^* ; (g) munendo F^*, E^* delle topologie deboli $\sigma(F^*, F), \sigma(E^*, E)$, T^* risulta un omomorfismo di $D(T^*)$ in E^* ; (h) $R(T) = \{f | \langle f, f^* \rangle = 0 \text{ per ogni } f^* \in N(T^*)\}$; (i) $R(T^*) = \{e^* | \langle e, e^* \rangle = 0 \text{ per ogni } e \in N(T)\}$; (j) $R(T)$ è tonnelé. L'A. dimostra le seguenti relazioni: (I) (a) \Leftrightarrow (h) \Leftrightarrow (g); (b) \Leftarrow

(c) \Leftrightarrow (i) \Leftrightarrow (e) \Leftarrow (d). (II) Se $G(T)$ è pienamente completo ed F è pienamente tonnelé (j) \Leftrightarrow (a) \Leftrightarrow (h) \Leftrightarrow (g) \Leftrightarrow (d) \Rightarrow (e) \Leftrightarrow (i) \Leftrightarrow (c) \Rightarrow (b). (III) Sotto ulteriori condizioni soddisfatte ad es. se F è metrizzabile si ha anche (e) \Rightarrow (d). (IV) Nelle ipotesi di (II) e sotto ulteriori condizioni soddisfatte ad es. se $(E \times F)^*$ è pienamente completo e $(G(T))^*$ tonnelé, (f) \Rightarrow (c). (V) Nelle ipotesi di (IV) e supponendo inoltre F^* pienamente completo, $G(T^*)$ pienamente tonnelé allora tutte le proprietà considerate sono a due a due equivalenti. Questo teorema contiene risultati di Banach, J. Dieudonné-L. Schwartz (questo Zbl. 35, 355), G. Fichera (questo Zbl. 71, 318), E. Hille-R. S. Phillips (questo Zbl. 78, 100), P. Lax-A. N. Milgram (questo Zbl. 58, 87), J. Leray: Hyperbolic differential equations (Princeton 1953), L. Schwartz (questo Zbl. 50, 333), M. I. Višik (questo Zbl. 44, 95; 47, 95; 70, 122), B. Yood (questo Zbl. 43, 119). Come applicazione l'A. espone una trattazione generale della teoria astratta dei problemi al contorno nel senso di M. I. Višik (questo Zbl. 47, 95), L. Hörmander (questo Zbl. 67, 322), M. I. Višik-O. A. Ladyženskaja (questo Zbl. 73, 99). *E. Gagliardo.*

Stampacchia, Guido: Completamenti funzionali ed applicazione alla teoria dei potenziali di dominio. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 16, 415—429 (1958).

Elementare Bemerkungen zur funktionalen Vervollständigung von Aronszajn-Smith und über Regularität der Elemente der Sobolev'schen Räume $W_r^{(d)}(\Omega_n)$. *K. Maurin.*

● **Volterra, Vito:** Theory of functionals and of integral and integro-differential equations. Dover edition with a preface by Griffith C. Evans, a biography of Vito Volterra and a bibliography of his published works by Sir Edmund Whittaker. Unabridged republ. of the first English transl. New York: Dover Publications, Inc. 1959. 39, 226 p. \$ 1,75.

Volterra hielt im Jahre 1925 Vorlesungen über das im Buchtitel angezeigte Thema an der Universität Madrid. Diese wurden von L. Fantappiè ausgearbeitet und erschienen in der spanischen Übersetzung von O. de Toledo 1927. Eine sehr erweiterte Umarbeitung erschien 1930 in englischer Sprache in der Übersetzung von M. Long. Sie bezog alle inzwischen erschienen Ergebnisse dieses Gebietes ein. Die jedem Kapitel angeschlossenen Literaturnachweise enthalten 539 Nummern. Daß dieses imposante Werk jetzt einen neuen unveränderten Abdruck erhalten hat, ist begrüßenswert. Der reichhaltige Inhalt der sechs Kapitel kann hier nur kurz skizziert werden: I. Allgemeine Begriffsbildungen bei Funktionalen und Funktionaloperationen. — II. Integralgleichungen zweiter und erster Art, singuläre Kerne, allgemeinere Funktionalgleichungen. — III. Ausdehnung des Begriffs der analytischen Funktionen, Fonctions de ligne und deren Verallgemeinerung in mehr Dimensionen. — IV. Kompositionsprodukte aus zwei Funktionen; Funktionen, die mit einer gegebenen vertauschbar sind; Kompositionsreihen zweiter Art. — V. Mehrere Typen von Integrodifferentialgleichungen; funktionale Differentialgleichungen: u. a. Ausdehnung der Jacobi-Hamiltonschen Theorie, Beziehungen zwischen linearen funktionalen Differentialgleichungen und Integrodifferentialgleichungen. VI. Verschiedene Anwendungen rein mathematischer Natur und solche auf Schaukelwellen an der Wasseroberfläche, Membranschwingungen, Dynamik, Elastizitätstheorie, physikalische und technische Probleme mit Nachwirkung, ein Problem, dem Volterra in vielen Arbeiten seine Aufmerksamkeit geschenkt hat. *R. Iglisch.*

Ibrahim, S. A.: Structure of infinite matrices. J. London math. Soc. 34, 281—288 (1959).

There is a classical theorem on the structure of a finite matrix A , that when the latent roots of A are distinct, A can be expressed in terms of these latent roots and certain idempotent matrices associated with A ; and this theorem can then be extended to cover the case where multiple latent roots occur, expressing A in terms

of the latent roots and the principal idempotent and nilpotent elements of A corresponding to a particular latent root (cf. J. H. M. Wedderburn, *Lectures on matrices*, this Zbl. 10, 99). The only attempt previously made to extend these results to infinite matrices is a direct extension of Wedderburn's exposition for finite matrices to a class of infinite lower semi-matrices, given by C. E. Gurr (this Zbl. 22, 101). In the present paper, Wedderburn's exposition is further extended to what the author calls semi block infinite matrices, defined as follows. Let S be the set of square matrices, including 1×1 matrices, and $\{S_r\}$ an infinite sequence of matrices of S of orders w_r , $r = 0, 1, 2, \dots$. Let A be an infinite matrix formed from the sequence $\{S_r\}$ arranged along its leading diagonal, and from arbitrary elements to the left of the S_r , while all elements to the right of the S_r are zero. Then A is called a lower semi-block matrix. (Similar matrices were used in another connexion by P. Vermes, this Zbl. 46, 336.) An analogue of the Hamilton-Cayley equation for finite square matrices is also established for semi-block infinite matrices.

R. G. Cooke.

Ibrahim, S. A.: Infinite matrices in bonds. J. London math. Soc. 34, 273—280 (1959).

The infinite matrices A, B are said to be in a bond if they (a) generate a linear associative algebra with complex scalar field, (b) satisfy an equation either of the form $\sum_{r=0}^l \sum_{s=0}^m a_{r,s} A^r B^s = 0$, or of the form $\sum_{r=0}^l \sum_{s=0}^m a_{r,s} B^r A^s = 0$; i. e., all terms in the equation are such that either the power of A precedes that of B , or else the power of B precedes that of A . The bond is said to be of order n if n is the least degree of such an equation to be satisfied by A and B . We say that $A_r \rightarrow A$ if $(A_r)_{i,j}$ tends to a limit $A_{i,j}$ as $r \rightarrow \infty$ for every i and j . The following results are established. Theorem I. If A, B are in a bond of order n of the form $\sum_{r=0}^n f_r B^r$,

where $f_r = \sum_{s=0}^n a_s^{(r)} A^s$, such that $A^N B^{N-s} \rightarrow 0$ as $N \rightarrow \infty$ for $s = 0, 1, \dots$

$\dots, 2n-1$), then $f_{0,n} \sum_{r=0}^{\infty} A^r B^r = \sum_{r=1}^n f_{r,n} A^{r-1} B^{r-1}$, where $f_{r,n} = \sum_{m=r}^s f_m A^{n-m}$. Moreover, if a left-hand reciprocal $^{-1}f_{0,n}$ of $f_{0,n}$ exists in the same linear associative

algebra of A, B , then $\sum_{r=0}^{\infty} A^r B^r = ^{-1}f_{0,n} \sum_{r=1}^n f_{r,n} A^{r-1} B^{r-1}$. Corollary I. If B is al-

gebraic with minimal equation of the form $\sum_{r=1}^n b_r B^r = 0$, then $\sum_{r=0}^{\infty} B^r =$

$\frac{1}{b_{0,n}} \sum_{r=1}^n b_{r,n} B^{r-1}$, where $0 \neq b_{0,n} = \sum_{r=0}^n b_r$, and $b_{r,n} = \sum_{m=r}^s b_m$, provided that

$B^N \rightarrow 0$ as $N \rightarrow \infty$. [This corollary is given by Makar, *Proc. Math. Phys. Soc. Egypt* 3, 57—63 (1948).] Corollary II. If the conditions of the theorem are satisfied, and if A, B are positive matrices which commute, then

$$\sum_{r=0}^{\infty} A^r B^r = \sum_{r=0}^{\infty} (AB)^r = ^{-1}f_{0,n} \sum_{r=1}^n f_{r,n} (AB)^{r-1} = (I - AB)^{-1}.$$

Theorem II. If A, B are two infinite matrices in the same bounded field which are in a bond of order n of the form $\sum_{r=0}^n f_r B^r = 0$, where $f_r = \sum_{s=0}^n a_s^{(r)} A^s$, and if a left-hand reciprocal $^{-1}f_n$ exists in the same bounded field as A, B , then $|B^r| < KM^r$ for every positive integer r , where $K = \sum_{s=0}^{n-1} |B^s|$, $|B^0| = 1$, and $M = |^{-1}f_n| \sum_{s=0}^n |f_s|$.

Corollary I. If the bond equation $\sum_{r=0}^n f_r B^r = 0$ is put in the form $\sum_{r=0}^n f'_r A^r = 0$,

where $f'_r = \sum_{s=0}^n b_s^{(r)} B^s$, then if f'_r has a right-hand reciprocal in the same bound-

ed field as A, B , we have $|A^r| < K' M'^r$, where $K' = \sum_{s=0}^{n-1} |A^s|$, $|A^0| = 1$, and $M' = |-1f_n| \sum_{s=0}^n |f'_s|$; i. e., $|A^r B^r| \leq |A^r| |B^r| < K K' (M M')^r = K M''^r$. Corollary II. The series $\sum_{r=0}^{\infty} a_r A^r B^r$ is strongly convergent if $M'' < \lim_{r \rightarrow \infty} |a_r|^{-1/r}$, with the notation of Corollary I. Theorem III. If A, B are two infinite matrices satisfying the conditions of Theorem II, then the series $\sum_{r=0}^{\infty} \alpha^r A^r B^r$ is strongly convergent if the scalar α satisfies $|\alpha| < 1/M$, with the notation of Theorem II. Moreover, if the matrix $F = \sum_{r=0}^n f_r x^{n-r}$ has a left-hand reciprocal ^{-1}F in the same bounded field as A, B , then the unique two-sided reciprocal of the matrix $I - \alpha B$ exists, and is given by $(I - \alpha B)^{-1} = ^{-1}F \sum_{r=0}^{n-1} f'_r \alpha^r$, where $f'_r = \sum_{s=0}^r f_{n-s} B^{r-s}$.

R. G. Cooke.

Bochner, S.: Generalized conjugate and analytic functions without expansions. Proc. nat. Acad. Sci. USA **45**, 855—857 (1959).

Mit Hilfe neuer Beweismethoden werden in dieser Note einige klassische Sätze aus der Theorie der Fourier-Reihen und verwandten Gebieten auf allgemeinen Maßräumen formuliert und skizzenhaft bewiesen. Betrachtet wird hierzu ein Maßraum $(X, \mathfrak{B}, \sigma)$ und eine Menge F von komplex-wertigen Funktionen auf X . Es wird vorausgesetzt: F enthält alle komplexen Konstanten, F ist ein Ring bezüglich der üblichen Operationen, F enthält mit jeder Funktion f auch die Funktion \bar{f} . Ferner seien Γ und Φ zwei Unterringe von F . Der erste enthalte mit f ebenfalls stets die Funktion \bar{f} ; aus $\gamma \in \Gamma$ und $\varphi \in \Phi$ soll stets $\gamma \varphi \in \Phi$ folgen. Schließlich wird angenommen: $F \subset L_p$ für alle p mit $1 < p < \infty$. Dann kann jedes $f \in F$ dargestellt werden in der Form $f = \gamma + \varphi + \bar{\psi}$ mit $\gamma \in \Gamma$, $\varphi, \psi \in \Phi$. Die Komponenten γ, φ, ψ sind hierbei σ -fast-überall eindeutig bestimmt. Für die sich somit ergebenden linearen Operatoren $\gamma = A f$, $\varphi = B f$, $\psi = B f$ gilt in Verallgemeinerung eines klassischen Satzes von M. Riesz: Existiert zu jedem p mit $1 < p < \infty$ eine Konstante M_p mit $\|A f\|_p \leq M_p \|f\|_p$, so gibt es zu jedem solchen p eine Konstante N_p mit $\|B f\|_p \leq N_p \|f\|_p$ (für alle $f \in F$). Der Beweis verwendet eine bereits früher benutzte Methode des Verf. (vgl. dies. Zbl. **20**, 300). Im zweiten Teil der Note wird X zusätzlich als kompakter Raum und σ als Radonmaß der Gesamtmasse 1 mit dem Träger X vorausgesetzt. Ferner seien alle Funktionen aus F stetig und Γ bestehe nur aus den konstanten Funktionen. Dann werden die von H. Helson und D. Lowdenslager (dies. Zbl. **82**, 282) angegebene Version des Satzes von Szegő-Kolmogoroff-Krein sowie weitere Resultate der beiden Autoren auf den hier vorliegenden abstrakten Fall übertragen. Die Funktionen $\varphi + \gamma$, $\varphi \in \Phi$, $\gamma \in \Gamma$, verallgemeinern hierbei die analytischen Funktionen. Auch methodisch schließt dieser Teil an die zitierte Arbeit von Helson-Lowdenslager an.

H. Bauer.

Svidzinskij, A. V.: Ein Kurvenintegral im Funktionalraum. Izvestija vyssh. učebn. Zaved., Mat. **1** (8), 199—203 (1959) [Russisch].

Es wird eine heuristische Herleitung einer für gewisse Aufgaben der Quantenfeldtheorie verwendbaren Formel gegeben: Gegeben ist ein Funktional $\Phi = \Phi[\varphi(y); x]$; gesucht ist die Lösung F der Funktionaldifferentialgleichung

$$(1) \quad \delta F[\varphi] / \delta \varphi(x) = \Phi[\varphi; x],$$

Dabei ist die Funktionalableitung $\delta F[\varphi] / \delta \varphi(x)$ erklärt als Limes für $\delta \varphi \rightarrow 0$ (d. h.: $\delta \varphi(y)$ ist nur in einer Umgebung von x von Null verschieden, welche sich in der Grenze auf x zusammenzieht, wobei zugleich $\max |\delta(y)| \rightarrow 0$) des Differenzen-

quotienten $(F[\varphi + \delta\varphi] - F[\varphi]) / \int \delta(y) dy$. Verf. betrachtet zunächst den x -Raum als Gitterraum mit endlich vielen Punkten und endlicher Gitterkonstante, erhält dabei statt der Funktionaldifferentialgleichung ein partielles Differentialgleichungssystem 1. Ordnung, das wie üblich gelöst werden kann, falls die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist. Bei unendlicher Verfeinerung des Gitters wird damit die Lösungsformel für die Gleichung (1) plausibel gemacht: (Integrabilitätsbedingung $\delta\Phi[\varphi; x] / \delta\varphi(y) = \delta\Phi[\varphi; y] / \delta\varphi(x)$)

$$F[\varphi] - F[\varphi_0] = \int dx \int_0^1 dt \Phi[(\varphi - \varphi_0)t + \varphi_0; x] (\varphi - \varphi_0).$$

Als Anwendungen werden die Bestimmung einer S -Matrix in einer Aufgabe der Quantenelektrodynamik und eine Funktionaldifferentialgleichung 2. Ordnung behandelt.

D. Laugwitz.

Gheorghiu, O. Em. et B. Crstici: Sur quelques objets géométriques à deux composants. Acad. Republ. popul. Romine, Studii Cerc. mat. 9, 311—331, russ. und französ. Zusammenfassg. 331—330 (1958) [Rumänisch].

Es werden geometrische Objekte mit zwei Komponenten im n -dimensionalen Raume mit Transformationsformeln der Gestalt

$$O'_1 = f(T_{x'x}) O_1 + g(T_{x'x}), \quad O'_2 = h(T_{x'x}) j(T_{x'x}) O_1 + k(T_{x'x})$$

gesucht, wo $T_{x'x}$ die Transformation vom Koordinatensystem mit den Koordinaten x^i in das mit den Koordinaten $x^{i'}$ ($i, i' = 1, 2, \dots, n$) und O_1, O_2 bzw. O'_1, O'_2 die Komponenten des Objektes in diesen beiden Koordinatensystemen bedeuten, während f, g, h, j, k die zu bestimmenden stetigen Funktionen sind, deren Gestalt gegenüber Koordinatentransformation invariant ist. Verff. behaupten, daß diese Objekte von höchstens erster Klasse sein können (d. h. daß die Funktionen f, g, h, j, k von den Ableitungen höchstens erster Ordnung der $x^{i'}$ bezüglich der x^i ($i, i' = 1, 2, \dots, n$) abhängen; dies scheint für $n = 1$ nicht gültig zu sein, vgl. auch übrigens J. E. Penzov (dies. Zbl. 39, 379; 44, 170), was z. T. in einer späteren Arbeit bewiesen werden soll. Wenn wir das Ergebnis von V. V. Vagner [Doklady Akad. Nauk SSSR 46, 347—349 (1945); vgl. A. Nijenhuis, Theory of the geometric object (dies. Zbl. 49, 229), § 7, J. Aczél, dies. Zbl. 78, 139] beachten, wonach nicht rein differentielle geometrische Objekte immer auf rein differentielle zurückgeführt werden können (was Verff. nicht tun, obwohl sie diese Arbeit von Vagner zitieren), so genügt es, den Fall zu betrachten, wo f, g, h, j, k auch von den Werten der Veränderlichen $x^i, x^{i'}$ ($i, i' = 1, 2, \dots, n$) selbst nicht abhängen, nur von den ersten Ableitungen $\partial x^{i'} / \partial x^i$ ($i, i' = 1, 2, \dots, n$), die wir in die Matrix X vereinigen, und die Aufgabe reduziert sich auf die Lösung des Funktionalgleichungssystems (1) $f(YX) = f(X) f(Y)$, (2) $g(YX) = g(X) f(Y) + g(Y)$, (3) $h(YX) = h(X) h(Y)$, (4) $j(YX) = j(X) h(Y) + f(X) j(Y)$, (5) $k(YX) = k(X) h(Y) + g(X) j(Y) + k(Y)$. Nun ist aber die Lösung der Funktionalgleichungen (1), (3) bekannt [vgl. z. B. die Arbeiten von M. Kucharszewski, M. Kuczma, M. Hosszú in Publ. math., Debrecen 6, 181—198, 199—203, 288—289 (1959); in der vorliegenden Arbeit wird eine — unvollständige — Lösung dieser Gleichungen auch verwendet, ohne Begründung und Literaturhinweis], die des Systems (1), (2) ebenfalls [M. Kuczma, Publ. math., Debrecen 6, 72—78 (1959)], und auch die Gleichungen (4), (5) lassen sich auf (2) zurückführen, womit alles erledigt ist. In der vorliegenden Arbeit sind wegen Fehlens der obigen Reduktion die Rechnungen verwickelter. Sie werden z. T. in extenso gegeben, z. T. nur skizziert. Die Ergebnisse scheinen nicht ganz vollständig zu sein, insbesondere wird $f(X) = (\det X)^a$ als allgemeine stetige nichttriviale Lösung von (1) bezeichnet, statt $f(X) = |\det X|^a$ und $f(X) = |\det X|^a \operatorname{sg}(\det X)$. — (Drei Schreibfehler: in (18) (S. 315) muß der zweite Beistrich weggelassen werden; auf S. 330, Z. 19 und S. 331, Z. 4 muß (58) statt (59) stehen; in (33) (S. 320) ist $\sigma \neq \tau \neq 0$ so zu verstehen, daß auch $\sigma \neq 0$ vorausgesetzt wird.)

J. Aczél.

Gheorghiu, Octavian Em.: Objets géométriques par rapport au groupe projectif nonholonome. Bul. ştiin. tehn. Inst. politehn. Timişoara. n. Ser. 3 (17), 9—12, französ. und russ. Zusammenfassg. 12 (1958) [Rumänisch].

Verf. untersucht in dieser klar geschriebenen und auch für den die Sprache nicht kennenden Leser leicht verständlichen Arbeit das Funktionalgleichungssystem (vgl. vorstehendes Referat)

$$\begin{aligned} f(xy, u + xv) &= f(x, u) f(y, v), & g(xy, u + xv) &= g(x, u) f(y, v) + g(y, v), \\ h(xy, u + xv) &= h(x, u) h(y, v), & j(xy, u + xv) &= j(x, u) h(y, v) + f(x, u) j(y, v), \\ k(xy, u + xv) &= k(x, u) h(y, v) + g(x, u) j(y, v) + k(y, v) \end{aligned}$$

und findet auf elementarem Weg

$$\begin{aligned} f(x, u) &= x^{-1}, & g(x, u) &= a u x^{-1} + b(1 - x^{-1}), \\ h(x, u) &= x^{-2}, & j(x, u) &= c u x^{-2} + d(x^{-1} - x^{-2}), \\ k(x, u) &= \frac{1}{2} a c x^{-2} u^2 + (a d x^{-1} - b c x^{-2}) u + b d(1 - x^{-1}) + e(1 - x^{-2}) \end{aligned}$$

(a, b, c, d, e sind beliebige Konstanten) als allgemeine Lösung (man sollte etwa Stetigkeit oder Meßbarkeit voraussetzen). — (Ein verständnisstörender Druckfehler: in (10) (S. 10) muß im ersten Glied der rechten Seite C^0 statt C stehen). Es werden nur wenig Einzelheiten gegeben, es ist aber nicht schwer, das fehlende zu rekonstruieren. Verf. weist auf eine Anwendung bezüglich linearer Objekte unter der nicht-holonomen projektiven Transformationsgruppe hin. J. Aczél.

Praktische Analysis:

● **Faddeeva, V. N.: Computational methods of linear algebra.** Authorized transl. from the russian by **Curtis D. Benster.** New York: Dover Publications, Inc. 1959. X, 252 p. \$ 1,95.

Das Buch liegt nunmehr in englischer Übersetzung vor. (Bespr. des Originals dies. Zbl. 41, 240). Es behandelt die numerische Lösung von Problemen der linearen Algebra: Gleichungslösung, Matrixinversion, Elimination (Berechnung von Linearformen), Eigenwertprobleme. Ein einleitendes Kapitel bringt die Grundlagen des Matrizenkalküls und der linearen Algebra. Den Hauptteil bilden die Beschreibungen einer ganzen Anzahl von Verfahren zur Lösung der erwähnten Probleme. Vollständigkeit wird nicht angestrebt. Folgende Verfahren werden behandelt: Gaußsches Verfahren in einzelnen Schritten und kompakt (nach Dwyer, in Deutschland oft als Gauß-Banachiewicz-Verfahren bezeichnet), Quadratwurzelmethode für symmetrische Matrizen, Unterteilung in Untermatrizen bei umfangreichen Problemen, Ränderungsmethode und Treppenmethode sowie die üblichen Iterationsverfahren. Bei den weniger bekannten Verfahren der Lösung durch Ränderung und nach der Treppenmethode handelt es sich um Rekursionsverfahren, die die Ordnung des Problems fortlaufend um 1 erhöhen. Dabei werden stets die in der linken oberen Ecke der Ausgangsmatrix stehenden Matrizen benutzt. Die Methoden zur Lösung von Eigenwertproblemen sind wie üblich in direkte Methoden (Aufstellung des charakteristischen Polynoms) und iterative Methoden gegliedert. Von den ersteren werden die Methode von Krylov (Transformation von $A - \lambda E$ in eine Matrix, in der alle Spalten außer der ersten kein λ enthalten) und die ihr verwandte Methode von Samuelson, die Methode von Danilewski (Ähnlichkeitstransformation in die Frobeniussche Normalform), eine Modifikation der Leverrierschen Methode der Matrixpotenzierung sowie die Treppenmethode und die Interpolationsmethode behandelt. Besonders zu erwähnen sind die zu den einzelnen Verfahren vollständig durchgerechneten Zahlenbeispiele. K.-H. Bachmann.

Mikeladze, Š. E.: Über einige Iterationen höherer Ordnung. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR 22, 257—264 (1959) [Russisch].

Es wird die folgende Verallgemeinerung des Newtonschen Verfahrens zur Lösung der Gleichung $f(z) = 0$ vorgeschlagen: Die Iteration wird definiert durch $\varphi(z) = z - \sum_{k=1}^m a_k \omega_k(z)$, wobei $\omega_k(z) = \frac{f(z)}{f'[z + \beta_{k-1} \omega_{k-1}(z)]}$. Hier sind a_1, \dots, a_m und $\beta_0, \dots, \beta_{m-1}$ Konstanten, welche so gewählt werden müssen, daß für eine Wurzel α der Gleichung $f(z) = 0$ außer $\varphi(\alpha) = \alpha$ noch die Bedingungen $\varphi'(\alpha) = 0, \dots, \varphi^{(n)}(\alpha) = 0$ für ein möglichst großes n erfüllt sind. Im Falle $m = 1$, $\beta_0 = 0$ ergibt sich aus $\varphi'(\alpha) = 0$, daß $a_1 = 1$ sein muß, und man kommt so zurück auf das Newtonsche Verfahren. Für $m = 4$ und $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = -\frac{1}{2}$, $\beta_2 = -\frac{1}{2}$, $\beta_3 = -1$ werden die Bedingungen für die $\omega_k(z)$ und ihre Ableitungen erfüllt, wenn man $a_1 = a_4 = \frac{1}{6}$, $a_2 = a_3 = \frac{1}{3}$ setzt. Die auf diese Weise eindeutig bestimmte Iteration wird verwendet im Falle $f(x) = x^2 - \log x - 2$, und für den Anfangswert $x_0 = 1$ wird gefunden, daß die zweite Iterierte $x_2 = 1.5644623$ in allen Dezimalen mit dem genauen Wert der Wurzel von $f(x) = 0$ übereinstimmt. Im zweiten Abschnitt wird das entsprechende Problem für ein Gleichungssystem $F_j(w_1, \dots, w_n) = 0$ ($j = 1, \dots, n$) behandelt, wobei die im vorher besprochenen einfachen Falle für $m = 4$ hergeleitete Iterationsformel eine Rolle spielt.

H. Schwerdtfeger.

Gastinel, Noël: Conditionnement d'un système d'équations linéaires. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 2707—2709 (1959).

L'A. propose à partir de normes de matrices une définition du conditionnement d'un système d'équations du premier degré et il étudie les propriétés de celui-ci. Il s'agit d'un nombre compris entre zéro et un. La valeur zéro correspond aux matrices singulières, la valeur un aux matrices orthogonales en lignes. J. Kuntzmann.

Wilf, Herbert S.: Matrix inversion by the annihilation of rank. J. Soc. industr. appl. Math. 7, 149—151 (1959).

Il est bien connu [Householder "Principles of Numerical analysis" (ce Zbl. 51, 346), pages 79—83,] que si l'on connaît l'inverse de A , on peut donner celui de $A + u v^T$, u et v colonnes. L'A. indique un algorithme d'inversion bien déterminé qui coûte $\frac{3}{7} N^3$ multiplications.

J. Kuntzmann.

Berger, W. J. and Edward Saibel: Power series inversion of the Leontief matrix. Econometrica 25, 154—165 (1957).

Waugh (dies. Zbl. 36, 220) hat die reziproke Matrix zu einer Leontief-Matrix $L = I - A$, $A =$ Matrix der technologischen Koeffizienten, $0 \leq a_{ij}$, $a_{kk} = 0$, $\sum_{j=1}^n a_{ij} < 1$, durch Potenzreihenentwicklung gebildet. Verff. zeigen, daß sein Verfahren der Spezialfall einer allgemeinen Methode ist, die bei Wahl einer geeigneten, leicht umkehrbaren Hilfsmatrix X schneller konvergierende Reihen ergibt. Sie setzen $L = X + E$, $L^{-1} = X^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-E X^{-1})^k$ und geben geeignete Hilfsmatrizen (auch für andere als Leontief-Matrizen), durch welche die gewogenen Mittel aus den Spalten bzw. Zeilen von L gebildet werden.

H. Härten.

Bauer, F. L.: Zusammenhänge zwischen einigen Iterationsverfahren der linearen Algebra. Ber. internat. Mat.-Kolloquium Dresden, 22. bis 27. Nov. 1955, 99—111 (1957).

Als Verallgemeinerung des bekannten Vektor-Iterationsverfahrens zur Eigenwertbestimmung einer Matrix A wird das Verfahren der Treppeniteration und sein Zusammenhang mit der Rutishauserschen LR -Transformation beschrieben. Die Vektoriteration $x_{i+1} = A x_i$ wird erweitert zur Treppeniteration $\Delta_{i+1} R_{i+1} = A \Delta_i$, wobei Δ_i und Δ_{i+1} untere Dreiecksmatrizen sind, R_{i+1} ist eine obere Dreiecksmatrix. Im Konvergenzfall $\Delta_i \rightarrow \Delta$ ist R ähnlich zu A . Mit $\Delta_{i+1} = \Delta_i L_{i+1}$ ergibt sich die Beziehung zur LR -Transformation, gekennzeichnet durch $A_i = L_i R_i$, $R_i L_i = A_{i+1}$.

Dabei sind die L_i ebenfalls untere Dreiecksmatrizen und Ausgangsmatrix ist $A_1 = A$ oder allgemeiner $A_1 = A_0^{-1} A A_0$. Die Zerlegung in zwei Dreiecksmatrizen kann mit dem Gauß-Banachiewicz-Verfahren geschehen. Die Konvergenz ist im Fall verschiedener Eigenwerte linear (Bernoullischer Konvergenztyp). Sie kann quadratisch gemacht werden, indem der Iterationsindex jedesmal verdoppelt wird, wie es z. B. auch beim Iterationsverfahren durch fortwährende Quadrierung einer Matrix geschieht (Graeffescher Konvergenztyp). Es entsteht die AP -Transformation $P_i A_i = A_i^* P_i^*$ (Dreieckszerlegung), $A_i A_i^* = A_{2i}$, $P_i^* P_i = P_{2i}$, beginnend mit $A_1 = L_1$, $P_1 = R_1$ wie oben. Während die Treppeniteration selbstkorrigierend ist, sind es LR - und AP -Transformation nicht. Bei der Treppeniteration kann man überdies die Rechnung auf eine Anzahl von Spalten der Matrizen A_i beschränken. Interessante Spezialfälle, z. B. Lösung algebraischer Gleichungen und Anwendung bei der Lösung linearer Gleichungssysteme werden abschließend behandelt. Die Arbeit zeigt, daß das Verfahren der Treppeniteration sehr allgemein ist und eine systematische Einordnung von Iterationsverfahren der linearen Algebra ermöglicht.

K.-H. Bachmann.

Osborne, Elmer E.: On acceleration and matrix deflation processes used with the power method. J. Soc. industr. appl. Math. 6, 279—287 (1958).

Auf Grund numerischer Experimente kommt Verf. zum Schluß, daß die gebrochene Iteration nach Wielandt, d. h. Iteration mit $(A - \alpha E)^{-1}$, der gewöhnlichen Iteration überlegen ist, und zwar auch dann, wenn man letztere mit dem Aitkenschen δ^2 -Prozeß beschleunigt. Verf. bestimmt α jeweils als Rayleigh-Quotient des laufenden Iterationsvektors (für symmetrische Matrizen bereits von S. H. Crandall, vgl. dies Zbl. 42, 364, vorgeschlagen), was allerdings bei jedem Schnitt eine Gleichungsauflösung erfordert. Zur Bestimmung weiterer Eigenwerte reduziert Verf. die Ordnung der Matrix mit einem Deflationsverfahren von G. Blanch [zitiert bei Feller und Forsythe, Quart. appl. Math. 8, 325—331 (1951; dies. Zbl. 43, 15)], welches anscheinend auch für größere Matrizen geeignet ist.

H. Rutishauser.

Rutishauser, Heinz: Deflation bei Bandmatrizen. Z. angew. Math. Phys. 10, 314—319 (1959).

Verf. behandelt ein Deflationsverfahren für symmetrische Bandmatrizen, welches, im Gegensatz zur Hotellingschen Deflation, die Bandgestalt der Matrix nicht zerstört. Sei A eine symmetrische Matrix mit der Bandeigenschaft $a_{ik} = 0$ für $|i - k| > m$, und sei λ ein Eigenwert und v ein zugehöriger normierter Eigenvektor der Matrix A . Dann läßt sich eine orthogonale Matrix H von Hessenberg-Gestalt (d. h. $h_{ik} = 0$ für $i > k + 1$) konstruieren, deren letzte Spalte gleich v ist. Die Matrix $B = H^T A H$ hat offenbar dieselben Eigenwerte wie A und die Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & C & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

wobei C wieder eine symmetrische Matrix mit derselben Bandeigenschaft darstellt. An dieser Matrix kann daher die Eigenwertbestimmung fortgesetzt werden. Verf. skizziert, wie man die weiteren Deflationsschritte ausführen muß, um sich steigende Rundungsfehler zu vermeiden. Er gibt für den ersten Schritt ein einfaches numerisches Beispiel an.

Th. J. Dekker.

Bellman, Richard and Tomlinson Fort: On convergent perturbation expansions. Quart. appl. Math. 17, 96—98 (1959).

Im Anschluß an frühere Arbeiten geben Verff. für das Randwertproblem $u(0) = u(1) = 0$ bei der Sturm-Liouvilleschen Differentialgleichung $u'' + \lambda(f(x) + \varepsilon g(x))u = 0$ für den kleinsten Eigenwert und die zugehörige Eigenfunktion Potenzreihenentwicklungen nach Potenzen von $\varepsilon/(h + \varepsilon)$.

J. Heinhold.

Wittmeyer, H.: A new method for developing simple formulae for the eigenvalues of linear ordinary self-adjoint differential equations. J. Soc. industr. appl. Math. 6, 111—143 (1958).

Ein Verfahren wird angegeben zur „ersten angenäherten Bestimmung“ der Eigenwerte einer gewöhnlichen selbstadjungierten Differentialgleichung. Deren Variationsproblem wird zunächst auf kanonische Form gebracht, dabei bleiben als Koeffizienten etwa Funktionen h_1, h_2, \dots, h_r ; diese werden dann ersetzt durch Konstanten b_1, b_2, \dots, b_r , welche durch folgende Forderung bestimmt sind: Beim „Zwischenproblem“ mit $b_1 + \varepsilon_1(h_1 - b_1), \dots, b_r + \varepsilon_r(h_r - b_r)$ ist der erste Eigenwert μ_1 offenbar eine Funktion von $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$; man bestimmt nun die b_i so, daß alle ersten Ableitungen von μ_1 nach den ε_i für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_r = 0$ verschwinden. Das gegebene Problem wird also ersetzt durch ein solches mit konstanten Koeffizienten, und die Methode ergibt eine günstige Wahl dieser konstanten Koeffizienten. — Anwendungsbeispiele auf Torsions- und Biegeschwingungen eines unhomogenen Stabes werden angegeben, welche eine sehr bemerkenswerte Übereinstimmung mit den exakten Eigenwerten zeigen. — Nach Ansicht des Ref. könnte diese Methode auch zwecks Abschätzung der Eigenwerte (nach oben oder nach unten) ergänzt werden, was auch der wesentlichen Verwendung der Variationsprinzipien entsprechen würde.

J. Hersch.

Abdel-Messih, M. A.: A Green's function analogue for ordinary linear difference equations. Proc. math. phys. Soc. Egypt Nr. 22, 43—51 (1959).

Verf. diskutiert das Analogon zur Greenschen Funktion für

$$\sum_{v=-n}^{+n} a_v(x) u(x + v h) = -\Phi(x) \quad \text{mit } n = 1 \text{ und } n = 2$$

bei homogenen Randbedingungen. Beispiel: Angenäherte Lösung von $u'' + u = -x$, $u(0) = u(1) = 0$ mit $h = 0.1$. Bei $x = 0.2$ ist die Näherung z. B. um 1,7% zu klein.

G. Bertram.

● Patry, Jean: Über die linearen Differentialgleichungen mit sinusförmigen Koeffizienten. Zürich: Juris-Verlag 1957. 149 S. (Diss.).

In seiner Dissertation hat sich Verf. die Aufgabe gestellt, für die Lösungen der Differentialgleichung

$$(1) \quad \sum_{k=0}^s (e_k + f_k e^{-ix} + g_k e^{ix}) \frac{d^k u}{dx^k} = 0$$

eine systematische Übersicht aufzustellen. Durch $Z = e^{ix}$ erhält man eine Gleichung, auf die die Fuchssche Theorie anzuwenden ist. Als Stellen der Bestimmtheit ergeben sich $Z = 0$, $Z = \infty$, $Z = Z_1$ und $Z = Z_2$ mit $|Z_1| < |Z_2|$. Lösungen in den Gebieten $|Z| < |Z_1|$ und $|Z| > |Z_2|$ lassen sich durch direkte Ansätze mit der Fuchsschen Theorie ermitteln. Schwierigkeiten ergeben sich in dem besonders interessanten Gebiet $|Z_1| < |Z| < |Z_2|$. Aus der Theorie der unendlichen Determinanten und Modifikationen der Kettenbruchmethode entwickelt Verf. ein numerisches Lösungsverfahren, das sich besonders für moderne Rechenmaschinen eignet. Als Anwendung wird ein Beispiel aus der Elektronenoptik behandelt. — Darauf spezialisiert Verf. die Ausgangsgleichung in einer der folgenden Weisen: 1. (1) ändert sich nicht, wenn x durch $-x$ ersetzt wird. 2. (1) ändert nur das Vorzeichen, wenn x durch $-x$ ersetzt wird. 3. (1) hat für reelle x reelle Koeffizienten. Hier werden als Beispiele die Differentialgleichung des optischen Gitters, $u' + 2a \sin x \cdot u = 0$ und $u''' + 2a \sin x \cdot u = 0$ behandelt. Abschließend wird die Lösung inhomogener Differentialgleichungen vom Typ (1) behandelt, dazu als Beispiele die Berechnung des Magnetfeldes in großen Cyclotronanlagen. Alle Beispiele werden bis zur vollen numerischen Lösung geführt (Tabellen für die Entwicklungskoeffizienten).

W. Haacke.

Hamming, R. W.: Stable predictor-corrector methods for ordinary differential equations. *J. Assoc. comput. Machin.* **6**, 37—47 (1959).

Par une modification des coefficients, il est possible de rendre stable le procédé de prediction-correction de Milne, sans diminuer beaucoup sa précision. L'A. donne deux formules, l'une ayant un terme d'erreur en h^4 et l'autre un terme d'erreur en h^5 .

J. Kuntzmann.

Uematu, Tosio: Note on the numerical computation in the discrimination problem. *Ann. Inst. statist. Math.* **10**, 131—135 (1959).

Le problème de valeurs propres rencontré dans le problème de statistique cité dans le titre se réduit à un problème d'ordre inférieur par des changements d'inconnues.

J. Kuntzmann.

Collatz, Lothar: Fehlerabschätzungen bei Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen mit unendlichem Grundgebiet. *Z. angew. Math. Phys.* **9a**, 118—128 (1958).

Es werden Beispiele von Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen mit unendlichem Grundgebiet angegeben, die sich durch einfache Transformationen in solche mit endlichem Grundgebiet überführen und dann nach einfachen Randmaximum-Prinzipien näherungsweise lösen und mit Fehlerabschätzungen versehen lassen. So z. B. elliptische Differentialgleichungen im n -dimensionalen Raum

$$-P(X_j) \Delta_X U + \sum_{k=1}^n Q_k(X_j) \frac{\partial U}{\partial X_k} + S(X_j) U = 0$$

mit der Randbedingung

$$A_1(X_j) U - A_2(X_j) \partial U / \partial N = A_3(X_j)$$

unter gewissen Einschränkungen über A_1 und A_2 . Die Fehlerabschätzung funktioniert für $n \geq 3$. — Auch gewisse parabolische Differentialgleichungen mit unendlichem Grundgebiet lassen sich behandeln.

R. Iglisch.

Ehrlich, L. W.: A numerical method of solving a heat flow problem with moving boundary. *J. Assoc. comput. Machin.* **5**, 161—176 (1958).

Les AA. étudient un problème parabolique en x et t avec frontière extérieure fixe et discontinuité des coefficients le long d'une frontière intérieure variable (séparation d'une partie fondue et d'une partie solide). Les équations aux différences utilisées sont soigneusement décrites, les erreurs discutées. Un exemple numérique est traité.

J. Kuntzmann.

Noble, B.: The approximate solution of dual integral equations by variational methods. *Proc. Edinburgh math. Soc.* **11**, 115—126 (1958).

Die beiden Integralgleichungen $\int_{\alpha}^{\beta} M(t) X(t, x) A(t) dt = f(x)$ in $a \leq x < c$

und $\int_{\alpha}^{\beta} N(t) X(t, x) A(t) dt = g(x)$ in $c < x \leq b$ bestimmen die unbekannte Funk-

tion $A(t)$. Nach Reduktion auf eine einzige Integralgleichung $\lambda e(x) + \Re e(x) = w(x)$ läßt sich durch Variation der Form $I(E) = 2(w, E) - \lambda(E, E) - (\Re E, E)$ eine Näherungslösung vorgegebener Gestalt bestmöglich bestimmen. Es werden Abschätzungen für den Defekt der Integralgleichung bei Einsetzen der Näherungslösung angegeben. Die Anwendung zur Berechnung des Potentials zweier geladener paralleler Kreisplatten zeigt im Vergleich zu früheren Resultaten von Nomura (dies. Zbl. **26**, 228) die Wirksamkeit des Verfahrens.

G. Hämmerlin.

Picone, Mauro: Un metodo di calcolo automatico degli estremi di una funzione o delle soluzioni di un'equazione vettoriale. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. **25**, 373—380 (1959).

If a real function of class C^2 in an open connected set D of E_n has a unique minimum in D , then for the determination of the point of minimum the author pro-

poses the numerical integration of the ordinary differential equations of the curves of steepest descent starting at an arbitrary point of D . A corresponding process is proposed for conditional minima. *L. Cesari.*

Squire, William: Application of generalized Gauss-Laguerre quadrature to boundary-layer problems. *J. Aero-Space Sci.* 26, 540—541 (1959).

Um eine Differentialgleichung vom Typ der Blasiuschen ($f''' + ff'' = 0$, $f(0) = f'(0) = 0$, $f(\infty) = 1$) durch Quadratur zu lösen, benötigt man $f''(0)$. Mit $Y' = f$ erhält man $f''(0)^{-1} = \int_0^\infty Y^{2/3} e^{-Y} (Y^{-2/3}/Y') dY$. Dieses Integral hat die für die Anwendung einer Gauß-Laguerreschen Quadraturformel benötigte Gestalt. Mit $Y' \approx \frac{1}{2} f''(0) \eta^2$ erhält man $f''(0) \approx 0,480$; dieser Wert kann nun durch Einsetzen des daraus fließenden Y schrittweise verbessert werden (exakter Wert: 0,4696). *G. Hämmerlin.*

Salzer, Herbert E.: Some new divided difference algorithms for two variables. *Numer. Approx., Proc. Sympos. Math. Res. Center, Madison*, April 21—23, 1958, 61—98 (1959).

In dieser Arbeit werden Verfahren zur Interpolation einer Funktion von zwei Variablen $f(x, y)$ durch Polynome $P(x, y)$ untersucht. Verf. stellt zunächst Forderungen auf, die von einem Interpolationsschema erfüllt sein sollten, z. B. die Gültigkeit für eine fast beliebige Anordnung der Interpolationsstellen. Sodann werden verallgemeinerte dividierte Differenzen behandelt und Interpolationsformeln aufgestellt, wobei in einem Fall nur die Werte von f , im zweiten Fall aber auch die Werte der partiellen Ableitungen von f herangezogen werden. Verf. betont, daß es sich hier in der Hauptsache um eine Untersuchung der formalen Zusammenhänge handelt. Es fehlt daher eine Fehlerabschätzung und überhaupt eine Angabe über das Restglied. Die Aufstellung und Abschätzung des Restgliedes wird neben 13 anderen Problemen vom Verf. als weitere Aufgabe vorgeschlagen. *G. Meinardus.*

Murnaghan, Francis D.: The approximation of differentiable functions by polynomials. *Anais Acad. Brasil. Ci.* 31, 25—29 (1959).

Dans cet article de présentation, l'A. indique pour la détermination de l'approximation au sens de Tchebycheff un procédé itératif qui semble remonter à E. Remes (ce Zbl. 10, 17). *J. Kuntzmann.*

Džems-Levi (James-Levi), G. E.: Nomogram construction without quadratures. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 115, 438—440 (1957) [Russisch].

Verf. gibt eine Methode zur Bestimmung der Skalengleichungen von Fluchtlinientafeln nomographierbarer Gleichungen an. Diese Methode hat den Vorzug, daß keine Integrationen ausgeführt zu werden brauchen. Es sind nur Systeme algebraischer Gleichungen aufzulösen. Auf Gleichungen vierter und fünfter nomographischer Ordnung wird näher eingegangen. *K. Bögel — A. Stammberger.*

Džems-Levi (James-Levy), G. E. (J.): On the problem of general anamorphosis. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 113, 258—260 (1957) [Russisch].

Verf. behandelt das für die nomographische Praxis bisher noch unbefriedigend gelöste Problem der Umwandlung einer zu nomographierenden Gleichung in die Soreausche Determinante und das damit verbundene Problem der Aufstellung der Skalengleichungen des zu entwerfenden Nomogramms. Er gibt die Bedingungen an, auf Grund derer die Skalengleichungen bestimmt werden können. Sie führen auf Differentialgleichungen 2. Ordnung. Für einige der klassischen Schlüsselgleichungen sind die nach dem neuen Verfahren abgeleiteten Skalengleichungen angegeben. *K. Bögel — A. Stammberger.*

Vil'ner, I. A.: La nomographie stéréoscopique et l'anamorphose d'espace avec une échelle donnée. *Ukrain. mat. Žurn.* 9, 121—133, französ. Zusammenfassg. 133 (1957) [Russisch].

Verf. gibt die Konstruktionsunterlagen für räumliche Fluchtlinientafeln auf der Grundlage des Anaglyphenverfahrens an. Ferner untersucht er die Bedingungen, unter denen eine gegebene Funktion als räumliches Nomogramm dargesetzt werden kann.
K. Bögel — A. Stammlberger.

Huzino, Seiiti: On some sequential machines and experiments. Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A **12**, 136—158 (1958).

Sequential machines are originally considered by Edward Moore. A sequential machine M is composed of n states, m input symbols and p output symbols (x_1, x_2, \dots, x_n) , (f_1, f_2, \dots, f_m) and (g_1, g_2, \dots, g_p) , respectively. The set of states, the set of input symbols and the set of output symbols are denoted by X_M , F_M , and G_M , respectively. Two assumptions are made: 1. The present state of M depends only on its previous states and previous input. 2. The present output depends only on the present state. M can be completely constructed by defining these relations. If an input f_i operates on a state x_i and transits x_j to a state $x_{i,j}$, then $x_{i,j} = f_i(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) which show the connections between the previous state and the previous input, therefore define the present state. There exists an application h_M from X_M into G_M , by which a definite present output corresponds to each present state $h_i = h_M(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n; h_i \in G_M$). Both relations define a sequential machine $M(x)$ [or $M_{n,m,p}(x)$] in a state $x \in X_M$. The properties of fundamental machines, strongly connected machines, uniform machines, latin-connected machines, symmetric machines and reversible machines, which are defined as special sequential machines, and the relations between them, are given.

M. Nedelcu.

Huzino, Seiiti: Reduction theorems on sequential machines. Mem. Fac. Sci. Kyusyu, Ser. A **12**, 159—179 (1958).

In this paper, using the Moore's sequential machine and the notations and definitions of the paper reviewed above, the author defines boundary machines and studies their effectiveness about reduction theorems. One of this theorems can be considered as a generalization of Moore's reduction theorem for strongly connected machines in a sense.

M. Nedelcu.

Sauer, Robert: Sulla calcolatrice elettronica PERM (Politecnico di Monaco-Bav.) e sullo sviluppo della matematica numerica. Rend. Sem. mat. fis. Milano **28**, 3—17, engl. Zusammenfassg. 17 (1959).

Présentation générale de la machine PERM, de sa programmation et des problèmes pour lesquelles elle est utilisée.

J. Kuntzmann.

Ernst, D.: Aufbau und Wirkungsweise elektronischer Analogiegeräte. I, II. Regelungstechnik **6**, 125—128, 162—167 (1958).

Die prinzipielle Arbeitsweise des in elektronischen Analogiegeräten verwendeten Rechenverstärkers wird unter Verwendung der Schreibweise der Laplace-Transformation beschrieben. Es wird kurz der Aufbau verschiedener Rechenelemente erläutert, dabei werden auch Elemente zur Erzeugung spezieller Übergangsfunktionen erwähnt. Im zweiten Teil werden nichtlineare Elemente betrachtet (Begrenzung, Hysterese, Totzeit, Funktionserzeugung). Ausgabe- und Eingabeeinheiten werden kurz erörtert und einige Zusatzeinrichtungen beschrieben. Abschließend wird noch auf die äußere Gestaltung der Geräte und die Einteilung in Langzeit- und Kurzzeit-rechner eingegangen.

K.-H. Bachmann.

Uttley, A. M.: The design of conditional probability computers. Inform. and Control **2**, 1—24 (1959).

Verf. beschreibt eine Rechenanlage, die bedingte Wahrscheinlichkeiten berechnet. Der Eingang der Maschine besteht aus einer Anzahl von Klemmen, die entweder erregt oder nicht erregt sind. In jedem vorgegebenen Augenblick ist eine ge-

wisse Gruppe dieser Klemmen erregt: die Anlage berechnet, auf Grund der früheren Ereignisse, die bedingte Wahrscheinlichkeit der übrigen Klemmen. Anwendungen auf das Gebiet der Lernprozesse werden gegeben, ebenso Einzelheiten über die Konstruktion des Apparates.
Ambr. Speiser.

Lowenschuss, O.: Restoring organs in redundant automata. *Inform. and Control* **2**, 113—136 (1959).

The author shows that in order to remove the effect of malfunctions, we can use a larger class of devices to form restoring organs than that discussed by von Neumann, that is, we can use to form restoring organs in the two-valued as well as the multivalued case. The possible restoring organs can be classified in terms of their „length“. This approach makes it possible to write truth-tables for restoring organs, and to synthesize them by means of two-valued or multivalued devices.

P. Constantinescu.

Sheridan, Peter B.: The arithmetic translator-compiler of the IBM Fortran automatic coding system. *Commun. Assoc. comput. Machin.* **2**, Nr. 2, 9—21 (1959).

The author describes the steps in translation employed by the Fortran arithmetic translator in converting Fortran formulas into 704 assembly code. The steps are described in about the order in which they are actually taken during translation.

M. Nedelcu.

Berman, Martin F.: A method for transposing a matrix. *J. Assoc. comput. Machin.* **5**, 383—384 (1958).

The transposition of a stored matrix seems to be a rather academic problem. Moreover the word flag, being one bit per element, used by the author, is superfluous, if the transposition (or more generally the permutation of N words) is carried out in this way: Let a_k ($k = 1, \dots, N$) denote the words which have to be permuted and the permutation be defined by the simultaneous substitutions $a_k := a_{f(k)}$, where f is a given function which from every new index yields the original one. Then the process runs as follows (we use Algol notation): for $k := 1$ step 1 until N do begin $l := k$; $L:l := f(l)$; if $l < k$ then go to L ; $w := a_l; a_l := a_k; a_k := w$ end. The method, which is due to E. W. Dijkstra (Mathematical Centre, Amsterdam) and as far as I know not published, only needs storage locations for k , l , w and possibly for the computation of $f(l)$. A drawback of this method is, that it may be necessary to compute $f(l)$ a considerably larger number of times. *Th. J. Dekker.*

Heinhold, J.: Konforme Abbildung mittels elektronischer Analogrechner. *MTW, Z. modern. Rechentechn. Automat.* **6**, 44—48 (1959).

In dieser Arbeit wird gezeigt, wie elektronische Analogrechner auch vorteilhaft zur Ausführung konformer Abbildungen eingesetzt werden können. Im ersten Teil wird ein Verfahren angegeben für die Abbildung von Kurvenstücken oder Scharen von Kurvenstücken der z -Ebene für den Fall, daß die Abbildungsfunktion $w = f(z)$ explizit gegeben ist. Dabei werden gewisse Parameterfunktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ — die Variable t stellt die Maschinenzeit dar —, die abzubildende Kurve $x(\varphi, \psi)$ und $y(\varphi, \psi)$ sowie die Bildkurve $u(x, y)$ und $v(x, y)$ mittels Recheneinheiten gebildet. Die Funktionen u und v werden dabei direkt aus x und y mittels Grundrechenoperationen oder auch z. T. als Lösungen entsprechender Differentialgleichungen erhalten. Als Beispiel der direkten Berechnung wird die Joukowski-Abbildung behandelt. Im zweiten Teil der Arbeit werden Abbildungen durch Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen betrachtet. Das Verfahren wird allgemein dargestellt für die Differentialgleichung $d^n w / dz^n = F(z, w, \dots, d^{n-1} w / dz^{n-1})$. Die Lösung $u(t)$ und $v(t)$ mit sämtlichen Ableitungen von $f(z)$ längs des abzubildenden Kurvenstückes ergeben sich als Lösung eines reellen Differentialgleichungssystems. In speziellen Fällen können sich wesentliche Vereinfachungen ergeben, wie am Beispiel der Besselfunktion $J_{0,5}(z)$

für die Kreise $z = Re^{it}$ (R Parameter) gezeigt wird. Für die Rechenschaltungen werden eine Reihe von Multipliziereinheiten benötigt; da deren Genauigkeit nicht die der linearen Recheneinheiten erreicht, wird der Fehler der Abbildung im wesentlichen durch die Arbeitsgenauigkeit der Multipliziereinheiten bestimmt.

H. Adler.

Muller, Mervin E.: A comparison of methods for generating normal deviates on digital computers. *J. Assoc. comput. Machin.* 6, 376—383 (1959).

Zur Erzeugung von normal verteilten Zufallsvariablen in digitalen Rechenmaschinen sind verschiedene Näherungsverfahren bekannt. Verf. beschreibt zwei neue Methoden: 1. „Direct Approach“: $X_1 = (-2 \log U_1)^{1/2} \cdot \cos 2\pi U_2$ und $X_2 = (-2 \log U_1)^{1/2} \sin 2\pi U_2$ sind normiert normal verteilt, wenn U_1 und U_2 im Intervall $[0, 1]$ gleichverteilt sind; 2. „Inverse Approach“: Aus $U = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_0^X e^{-t^2/2} dt$ erzeugt man $X(U)$ stückweise angenähert durch Tschebyscheff-Polynome bzw. durch rationale Funktionen. Verf. vergleicht sie bei der Verwendung einer IBM 704 im Hinblick auf Rechenzeiten, Genauigkeiten und Zahl der verwendeten Speicherplätze mit vier älteren Verfahren: 3. „Central Limit Approach“, 4. „v. Neumann's Rejection Approach“, 5. „Hasting's Approach“ und 6. „Teichroew's Approach“. Die direkte Methode ist i. a. genauer als die älteren Methoden mit gleicher Rechenzeit; die inverse Methode erfordert etwa 1/4 der Rechenzeit von früheren Methoden bei gleicher Genauigkeit.

G. Bertram.

Hernalsteen, P.: Analyse et synthèse de fonctions de transfert. *Ann. Assoc. internat. Calcul Analogique* 1, 125—131, engl. u. deutsche Zusammenfassung 152 (1958).

Pour étudier la comportation d'un système physique non-linéaire, la fonction qui décrit le phénomène, fonction qui peut présenter des difficultés du point de vue des mathématiques, s'approxime par un développement limité en série de fonctions orthogonales. Dans ce but, l'A. utilise les fonctions de Laguerre, qui peuvent être aisément synthétisées par des méthodes électroniques et permettent de résoudre le problème à l'aide d'un calculateur analogique. L'A. présente la réalisation de deux ensembles, dont le premier sert à la synthèse des fonctions de Laguerre jusqu'au quinzième ordre et le second sert à la détermination des coefficients de la série d'approximation qui décrit le phénomène; des dispositifs qui ont été réalisés et employées dans le calculateur analogique de l'Université de Bruxelles.

V. Dumitru.

Moshman, Jack: The application of sequential estimation to computer simulation and Monte Carlo procedures. *J. Assoc. comput. Machin.* 5, 343—352 (1958).

Bekannte Folgeschätzverfahren für Schätzung des Erwartungswertes normal verteilter Zufallsgrößen unbekannter Streuung und das Parameters einer Binomialverteilung sowie die asymptotische Theorie von Anscombe (dies. Zbl. 36, 214) werden besprochen und der mögliche Einsatz von Rechenautomaten wird diskutiert.

D. Morgenstern.

Hicks, J. S. and R. F. Wheeling: An efficient method for generating uniformly distributed points on the surface of an n -dimensional sphere. *Commun. Assoc. comput. Machin.* 2, Nr. 4, 17—19 (1959).

Les AA. engendrent une répartition uniforme sur la sphère à n dimensions par récurrence sur n . Pour $n = 20$, une IBM 704 caclule environ 100 points par minute.

J. Kuntzmann.

Muller, Mervin E.: A note on a method for generating points uniformly on N -dimensional spheres. *Commun. Assoc. comput. Machin.* 2, Nr. 4, 19—20 (1959).

L'A. utilise le fait que si les x_i obéissent à une loi de Gauß, les $x_i \left(\sum_i x_i^2 \right)^{-1/2}$ sont uniformément répartis sur la sphère unité.

J. Kuntzmann.

● Ljapunov, A. A. (unter der Redaktion von): **Probleme der Kybernetik.** [Problemy kibernetiki.] I. Moskau: Staatsverlag für physikalisch-mathematische Literatur 1958. 268 S. R. 12,60 [Russisch].

● Lyapunov, A. A. (chief editor): **Problems of cybernetik. I.** Translation editor Richard Goodman. Consulting editor A. D. Booth. Transl. from the Russian by M. Nadler, F. J. Griffiths, G. Kiss and S. A. Muir. Oxford-London-New York-Paris: Pergamon Press 1960. X, 314 p. £ 10; \$ 28,00.

Die Arbeiten des Originals wurden bis auf eine in diesem Zbl. bereits angezeigt. In der folgenden Aufführung der Verfasser sind angegeben: erst die Seitenzahlen im Original, dann die in der Übersetzung und schließlich in Klammern die Zentralblattstelle. A. A. Ljapunov, 5–22, 1–21 (85, 344); M. L. Cetlin, 23–45, 22–47 (85, 339); A. A. Ljapunov, 46–74, 48–81 (85, 340); Ju. I. Janov, 75–127, 82–140 (85, 340); R. I. Podlovčenko, 128–134, 141–148 (–); S. S. Kamynin, Ė. Z. Ljubimskij und M. R. Šura-Bura, 135–171, 149–191 (85, 117); Ė. S. Luchovickaja, 172–177, 192–198 (85, 117); Ė. Z. Ljubimskij, 178–181, 199–203 (85, 118); S. S. Kamynin, 182–184, 204–207 (85, 118); V. S. Šarkman, 185–189, 208–213 (85, 118); G. A. Michajlov, B. N. Šitikov und N. A. Javlinskij, 190–202, 214–227 (85, 115); O. S. Kulagina, 203–214, 228–242 (83, 155); T. N. Mološnaja, 215–221, 243–250 (83, 155); I. A. Mel'čuk, 222–264, 251–306 (83, 155).

● Bellman, R. E., I. Glicksberg and O. A. Gross: **Some aspects of the mathematical theory of control processes.** (Rand Report R-313.) Santa Monica, Calif.: The Rand Corporation 1958. VIII, 244 p.

In fünf Abschnitten behandeln Verff. ausgewählte mathematische Probleme aus der Regelungstheorie. Der 1. Abschnitt ist linearen Differential-, Differenzen- und verwandten Funktionalgleichungen gewidmet; diese spielen eine sehr wichtige Rolle, da sie stets bei der mathematischen Beschreibung von physikalischen Vorgängen in erster Näherung auftreten. Verff. geben einen Überblick über die Lösungen verschiedener Differential-Differenzen- und Integralgleichungen und zeigen, daß die Lösungen eine gemeinsame abstrakte Form haben. Sie streifen kurz die Stabilitätstheorie, erwähnen das Hurwitz-Kriterium und den Ljapunovschen Satz über die Stabilität nach der ersten Näherung. Im 2. Abschnitt gehen sie zu linearen und quadratischen Regelungsproblemen über. Sie betrachten die lineare Vektordifferentialgleichung $dx/dt = Ax + f(t)$, wobei der Vektor x den Zustand eines dynamischen Systems beschreiben soll, während der Vektor f eine Steuerungsfunktion darstellt; diese soll so bestimmt werden, daß der Prozeß $x(t)$ einen in gewisser Hinsicht optimalen Verlauf nimmt. Die Aufgabenstellung zeigt, daß weniger Regelungs- als vielmehr Steuerungsprobleme erörtert werden. Die Optimierungsbedingungen bestehen darin, daß bestimmte lineare oder quadratische Funktionale ein Minimum erreichen müssen. Im 3. Abschnitt verweilen Verff. bei Variationsproblemen in Zusammenhang mit Steuerungsaufgaben und bringen einige Resultate, die für die Beurteilung der Regelgüte auf Grund von Integralkriterien wichtig sind. Außerdem untersuchen sie ein Problem der unstetigen Regelung, bei der die Komponenten des Steuerungsvektors f konstante Beträge haben, während ihre Vorzeichen so zu variieren sind, daß ein möglichst schnelles Abklingen des Übergangsprozesses $x(t)$ erreicht wird. Die letzten beiden Abschnitte (die etwa den halben Umfang des Buches haben) befassen sich mit stochastischen Prozessen, die in der modernen Regelungstheorie immer mehr Bedeutung erlangen. Abschnitt 4 gibt eine Einführung in die Theorie des dynamischen Programmierens; diese wird insbesondere dazu verwendet, zuvor abgeleitete Variationsprobleme, die man als eine Art von Entscheidungsprozessen ansieht, zu behandeln. In Abschnitt 5 wird angenommen, daß auf das lineare dynamische System außer der wohlbekannten Steuerfunktion noch zufällige Störungen wirken. Sieht man diese als ungünstig an, so daß ihre Tendenz immer der Steuerung entgegengesetzt ist, so läßt sich das Regelungsproblem mit Methoden aus der sogenannten Theorie der Spiele bearbeiten. Aus dieser geben Verff. abschließend einen Ausschnitt. Wie Verff. sehr anschaulich darlegen, haben die von ihnen

in rein mathematischer Form behandelten Probleme große Aktualität auf dem Gebiet der Kybernetik; darum verdient das vorliegende Buch das Interesse breiter Kreise.

R. Reißig.

● Kogan, B. Ja.: Elektronische Analogiegeräte und ihre Anwendung zur Untersuchung von automatischen Regelungssystemen. [Elektronnye modelirujuščie ustrojstva i ich primenenie dlja issledovanija sistem avtomatičeskogo regulirovanija.] Moskau: Staatsverlag für physikalisch-mathematische Literatur 1959. 492 S. 1 Taf. R. 16,40 [Russisch].

Das vorliegende Buch ist aus Vorlesungen über „Analogiemethoden zur Lösung von Regelproblemen“ hervorgegangen. Es enthält eine systematische und den Stand von 1957 ziemlich vollständig wiedergebende Darstellung von Methoden zur modellmäßigen Lösung von technischen Problemen und von den dazu notwendigen Geräten. Verf. beschränkt sich dabei ausschließlich auf die „Mathematische Modellierung“ von Regelvorgängen, d. h. auf die Nachbildung der Differentialgleichungen eines Regelvorganges durch ein elektronisches Modell. Es werden nur Gleichstrom-Modelle mit ideal arbeitenden Verstärkern (Verstärkungsfaktor = reelle Zahl) behandelt. Bei der schnellen Entwicklung auf dem Gebiet der elektronischen Rechenmaschine verwundert es nicht, daß einige Abschnitte des Buches inzwischen überholt sind. Dennoch erspart diese Zusammenstellung in vielen Fällen ein Zurückgreifen auf das sehr umfangreiche Schrifttum. Tabellarische Übersichten erleichtern das Zurechtfinden. Daten und zum Teil auch Abbildungen sind von 16 sowjetischen und von 37 ausländischen elektronischen Analogiegeräten angegeben.

K. Magnus.

Perotto, Pier Giorgio: Un nuovo componente elementare per reti logiche dotate di alte facoltà. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 92, 316—343 (1958).

L'A. montre la possibilité de construire des modèles cibernetiques avec des réseaux logiques, formés des cellules élémentaires avec des propriétés spéciales. Il donne l'analogie entre ces réseaux logiques et des réseaux nerveux. On voit aussi la possibilité d'appliquer ces considérations à l'étude des machines à calculer, de même que la possibilité de réalisation pratique d'une cellule élémentaire avec les moyens communs de la technique.

M. Nedelcu.

Miroslavlev, E. N.: Über ein nichtlineares System der automatischen Regelung mit Korrektionsglied. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. 13, Nr. 1, 69—72 (1958).

On considère un système d'équations différentielles qui décrit le mouvement d'un système automatique de réglemant et qui intervient par exemple dans l'étude de la stabilité de l'avion. Ce système est nonlinéaire à cause de $F(\sigma)$. On considère le système linéaire ($F(\sigma) = h\sigma$) et on trouve des domaines de stabilité.

P. Constantinescu.

● Oberländer, Siegfried: Tabellen von Exponentialfunktionen und -integralen zur Anwendung auf Gebieten der Thermodynamik, Halbleiterttheorie und Gaskinetik. (Schriftenreihe des Forschungsinstituts für Mathematik. Heft 7.) Berlin: Akademie-Verlag 1959. VIII, 150 S.

Das Buch enthält Tabellen folgender bisher in dem angegebenen Bereich noch nicht hinreichend genau tabellierter Funktionen: 1. $0,2 \leq \Delta E \leq 2$ (0,2) [eV], $25 \leq T \leq 1000$, (25) [°K]

$\Delta E/kT$, $kT/\Delta E$, $\exp(-\Delta E/kT)$, $(kT/\Delta E) \exp(-\Delta E/kT)$, $-\text{Ei}(-\Delta E/kT)$,

$$\frac{k}{\Delta E} \int_0^T \exp\left(-\frac{\Delta E}{k\tau}\right) d\tau, \text{E}\left(\frac{kT}{\Delta E}\right), 1 - \text{E}\left(\frac{kT}{\Delta E}\right).$$

2. Die gleichen Funktionen für denselben Energiebereich, aber $150 \leq T \leq 390$,

(10) [$^{\circ}\text{K}$]. 3. $0,01 \leq x \leq 0,1$ (0,0001)

$$\exp\left(-\frac{1}{x}\right), \quad x \exp\left(-\frac{1}{x}\right), \quad -\text{Ei}\left(-\frac{1}{x}\right), \quad \int_0^x \exp\left(-\frac{1}{\xi}\right) d\xi, \quad \text{E}(x), \quad 1 - \text{E}(x).$$

O. Madelung.

Loh, S. C.: On toroidal functions. Canadian J. Phys. **37**, 619—635 (1959).

Es werden die wichtigsten Formeln der Torus-Funktionen zusammengestellt, insbesondere Integraldarstellungen, Rekursionsformeln, Differentiationsformeln, Näherungsausdrücke für kleines und großes Argument, sowie eine Entwicklung nach Potenzen von e^{-2u} . Wichtigster Inhalt der Veröffentlichung sind aber die größtenteils erstmalig berechneten numerischen Tafeln der Torus-Funktionen erster und zweiter Art ($p_n^{(m)}(u)$ und $q_n^{(m)}(u)$). Alle Tafeln sind 5-stellig mit den Stützwerten $0(0,1)4$, und zwar für die Funktionen $p_n^{(m)}(u)$ und $q_n^{(m)}(u)$ mit $m = 0, 1, \dots, 4$; $n = m, m + 1, \dots, 4$. Von den zonalen Torusfunktionen ($m = 0$) sind auch die ersten Ableitungen vertafelt. Die zonalen Torusfunktionen werden außerdem in Diagrammen dargestellt.

J. Dörr.

Rogers, William M., William J. Hall and Robert L. Powell: Tables of transport integrals: A supplement. J. Res. nat. Bur. Standards **63B**, Nr. 1, 23—30 (1959).

Vervollständigung der ersten Publikation (Tables of transport integrals, dies. Zbl.

82, 339). Das Transportintegral $J_n(x) \equiv \int_0^x \frac{e^z z^n dz}{(e^z - 1)^n}$ wird hier für $n = 18$ und $n = 20$ tabuliert, wobei $0,2 \leq x \leq 50,2$ in $0,2$ Schritten.

W. Klose.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

• **Medgyessy, Pál und Lajos Takács:** Wahrscheinlichkeitsrechnung. [Valószínűség-számítás.] (Universitátszülősbuch. Technisch-mathematische Übungen. C. V.) Budapest: Tankönyvkiadó 1957. 333 S. 31.—Ft.

This book contains a survey of the theory of probability, with the stress on examples and their solutions. It consists of two Parts: A. General, by P. Medgyessy and B. Stochastic Series, by L. Takács. The first Part leads as far as The Law of Large Numbers, Generating Functions, and the Central Limit Theorem. The second Part consists of three Chapters: Markov Chains, Markov Series, and Non-Markov Type Series.

S. Vajda.

Badrikian, Albert: Les éléments aléatoires généralisés à valeurs dans un espace vectoriel; définitions et premiers résultats. C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 1603—1605 (1959).

Soient X un espace vectoriel topologique sur R , X' son dual; un élément aléatoire généralisé à valeurs dans X est une application linéaire ξ de X' sur R . A l'aide de cette nouvelle définition l'A. généralise les diverses notions de convergence ainsi que la loi des grands nombres pour les éléments „Bochnériens“.

R. Féron.

Meyer, André: Séparabilité d'un processus stochastique. C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 3106—3107 (1959).

Let $\{X_t(\omega)\}_{t \in T}$ be a stochastic process defined on a basic probability space (Ω, Σ, P) and taking values in (E, \mathcal{A}) or in (E', \mathcal{A}') where $E' = E \cup \{\alpha\}$ and \mathcal{A}' is the Borelian field generated by \mathcal{A} and $\{\alpha\}$, $\alpha \notin E$. Let us suppose that T is a subset of the real axis and denote by \mathcal{I} the set of open intervals with rational extremities. For a denumerable subset $S \subset T$, $A \in \mathcal{A}$, $I \in \mathcal{I}$ let us put

$$V(S, I, A) = \{\omega: \forall t \in S \cap I, X_t(\omega) \in A\},$$

$$V(I, A) = \{\omega: \forall t \in T \cap I, X_t(\omega) \in A\};$$

S verifies Condition (D) with respect to I and A if

$$\forall t \in T \cap I, P\{\omega: \forall s \in S \cap I, X_s(\omega) \in A; X_t(\omega) \notin A\} = 0.$$

The following result is given: If $\Omega = E^T$, there is an extension P^* of P such that $V(I, A)$ is measurable for any $A \in \mathcal{A}$, $I \in \mathcal{I}$ and $P^*(V(I, A)) = P(V(S, I, A))$ for any S verifying condition (D) with respect to I and A ; if E is a topological space, \mathcal{K} the family of compact sets of E , then there is an analogous extension on E^T , verifying the above properties, for any $A \in \mathcal{K}$. R. Theodorescu.

Ionescu Tulcea, C.: On a class of operators occurring in the theory of chains of infinite order. Canadian J. Math. **11**, 112—121 (1959).

Suppose that T and E are two arbitrary sets and denote by \mathfrak{T} and \mathfrak{E} two tribes, corresponding respectively to T and E . For every $n \in N^* = \{1, 2, \dots\}$, let E^n represent the product $\prod_{i=1}^n E_i$, $E_i = E$, $1 \leq i \leq n$ and let \mathfrak{E}^n be the corresponding tribe. For every $x \in E$, let us consider a mapping u_x of T into T , for $x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $u_x = u_{x_n} \circ \dots \circ u_{x_1}$, and suppose that $\{(t, x_1, \dots, x_n) | u_{(x_1, \dots, x_n)}(t) \in A\} \in \mathfrak{T} \oplus \mathfrak{E}^n$ for all $n \in N^*$ and $A \in \mathfrak{T}$. Denote by \mathfrak{M} the Banach space of real-valued, bounded and \mathfrak{T} -measurable functions defined on T with the norm $\|f\| = \sup_{t \in T} |f(t)|$ and by \mathfrak{M}_S the part of \mathfrak{M} consisting of the functions f for which $|f(u_x(t_1)) - f(u_x(t_2))| \leq a_n$, $n \in N^*$, $x \in E^n$ and $t_1, t_2 \in T$, where $S = (a_n)_{n \in N^*}$ is a sequence of positive numbers. Let us consider a real-valued function p , defined on $T \times \mathfrak{E}$, with the following properties: (1) $0 \leq p(t, A) \leq p(t, E) = 1$, $(t, A) \in T \times \mathfrak{E}$; (2) $p(t, \cdot)$ is a completely additive measure on \mathfrak{E} for every $t \in T$; (3) $p(\cdot, A) \in \mathfrak{M}_S$ for every $A \in \mathfrak{E}$, where $S = (a_n)_{n \in N^*}$ is such that $\sum_{n \in N^*} a_n < \infty$. Consider now on \mathfrak{M} the linear operator U of norm one

$$Uf(t) = \int_E p(t, dx) f(u_x(t))$$

which maps \mathfrak{M} into \mathfrak{M} . Operators of this form occur essentially in the theory of chains with complete connections (chains of infinite order according to the terminology of this paper), which were firstly considered by O. Onicescu and G. Mihoc (this Zbl. **12**, 28). It is shown that if p satisfies a certain condition (K) and $f \in \mathfrak{M}_C$, $C = (c_n)_{n \in N^*}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$, then there is a constant function $U^\infty f$ and a constant h ,

$$0 < h = h_C < 1 \text{ such that } \|U^n f - U^\infty f\| \leq \|f\|^+ \inf_{1 \leq s \leq n} (\tilde{c}_s / (1 - h) + 2 h^{n/s} - 1),$$

$$n \in N^*, \text{ where } \|f\|^+ = \sup(\|f\|, 1) \text{ and } \tilde{c}_n = 4 \sum_{j \approx n} a_j + \sup_{j \geq n} c_j \ (n \in N^*). \text{ This}$$

ergodic theorem is then applied to the transition probabilities of a chain with complete connections and the corresponding evaluation is deduced. Further, if E is a finite set and if for every $n \in N^*$ and $t \in T$ there is $x \in E^n$ and $t_n \in T$ such that $u_x(t_n) = t$, then for every $f \in \mathfrak{M}_1$ there is a function $U^\infty f \in \mathfrak{M}$ verifying the equality

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n U^j f - U^\infty f \right\| = 0,$$

where \mathfrak{M}_1 is the union of the sets \mathfrak{M}_C , $C = (c_n)_{n \in N^*}$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$. Assume now

that E is a metric complete and separable space, \mathfrak{E} the corresponding tribe of Borel parts of E , $T = E^{-N} = \prod_{i \in -N} E_i$, $E_i = E$, $i \in -N = \{\dots, -1, 0\}$ and let u_x ($x \in E$) be the mapping defined on T by the equality $u_x((\dots, x_{-1}, x_0)) = (\dots, x_0, x)$; it is proved that if p satisfies a certain condition (K), then there is a unique stationary strongly mixing stochastic process $(E^Z, \mathfrak{G}^Z, p^Z)$ such that

$$(*) \quad p_Z\{\text{pr}_{n+1}^{-1}(A) | \text{pr}_{\{\dots, n\}}(\omega) = t\} = p(t, A)$$

a. e. for every $n \in Z = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$. Furthermore, a certain central limit

theorem is proved; thus, let f be a real-valued \mathcal{C}^r -measurable function defined on E^r and $f_n = f \circ \text{pr}_{(n, \dots, n-r+1)}$. Let the conditions under which the theorem (*) is proved be verified and $\sum_{n \geq 1} n \left(\sum_{j \geq \sqrt{n}} a_j \right)^{1/2} < \infty$; if $E(f_1) = 0$ and $E(|f|^\alpha) < \infty$ for an $\alpha > 2$, then (i) the series

$$D = E(f_1^2) + 2 \sum_{i \in N^*} E(f_1 f_{1+i})$$

is absolutely convergent, $E((f_1 + \dots + f_n)^2/n) = D + O(1/n)$ ($n \rightarrow \infty$) and (ii) if $D \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^Z \left(\frac{f_1 + \dots + f_n}{\sqrt{n}} < a \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \int_{-\infty}^a \exp\left(-\frac{t^2}{2D}\right) dt,$$

uniformly with respect to a .

R. Theodorescu.

• **Lebedev, V. L.:** Zufällige Prozesse in elektrischen und mechanischen Systemen. [Slučajnye processy v električeskich i mehaničeskich sistemach.] Moskau: Staatsverlag für physikalisch-mathematische Literatur 1958. 176 S. R. 6,45 [Russisch].

Das Buch befaßt sich mit der Theorie elektrischer und mechanischer Systeme mit gruppierten Konstanten, auf welche die äußeren Einflüsse, die ihrerseits zufällige Zeitfunktionen sind, wirken. Nach einem kurzen einleitenden Kapitel legt Verf. im zweiten Abschnitt die Grundlagen der Theorie zufälliger Prozesse und deren linearer Transformationen dar. Der dritte Buchabschnitt enthält eine Beschreibung von drei Methoden der Analyse zufälliger Prozesse in den betrachteten linearen Systemen, und zwar: a) mit der Methode der stochastischen Differentialgleichungen; b) mit der Methode der Impulscharakteristiken oder Gewichtsfunktionen; c) mit der Spektralmethode. Die abgeleiteten Beziehungen hat man für die Analyse der Systeme mit mehr als einem Eintritt und Austritt verwendet. Der gegenseitige Vergleich der drei Methoden wird an Hand einiger einfacher Beispiele dargestellt. Die Ergebnisse des dritten Buchabschnitts werden im nächsten Kapitel im Zusammenhang mit der Lösung eines breiteren Problemkreises, darunter die Brownsche Bewegung, Schwingung der elektrischen Spannung, Übertragung von telegraphischen Signalen und von Rauschen mit einem Tiefpaßfilter, Grundlagen der Theorie optimaler Systeme u. ä. weiterentwickelt. Die Kapitel 5 und 6 enthalten die Theorie nichtlinearer Systeme (ohne Wirkung der Massenkräfte) und deren Anwendung auf einige konkrete Probleme auf dem Gebiet der Elektrotechnik. Das Buch setzt den technischen Hochschulen entsprechende Kenntnisse höherer Mathematik voraus. Mit seinem Inhalt bildet es eine wertvolle Ergänzung zum früheren Schrifttum auf dem Gebiet der statistischen Dynamik in den Übertragungs- und Kontrollsystemen und macht den verhältnismäßig schwierigen Stoff dem technischen Leser zugänglich.

A. H. Žaludová.

Faure, Pierre: Sur quelques résultats relatifs aux fonctions aléatoires stationnaires isotropes introduites dans l'étude expérimentale de certain phénomènes de fluctuations. C. r. Acad. Sci., Paris 244, 842—844 (1957). Errata: 244, 1843 (1957).

Faure, Pierre: Déduction de certaines propriétés statistiques d'une fonction aléatoire stationnaire isotrope définie dans un espace à plusieurs dimensions de l'étude de sa trace sur une courbe de cet espace. C. r. Acad. Sci., Paris 244, 998—1000 (1957).

$F(M)$ sei die Durchlässigkeit eines photographischen Filmes im Punkt M des Filmes. Sie wird als stationäre, isotrope Zufallsfunktion vorausgesetzt. Gewisse für die zweidimensionale physikalische Problemstellung bereits behandelten Fragen bezüglich der Korrelationsfunktion und deren Spektrum werden auf den n -dimensionalen Raum ausgedehnt. Es wird u. a. bemerkt, daß es für die experimentelle Bestimmung dieser Funktionen im allgemeinen genügt, F auf einer geeigneten Kurve $u(t)$ des E_n zu kennen. Die Beziehungen zwischen der zufälligen Funktion

$\Phi(t) = F(u(t))$ der Zeit und der Art der Kurve $u(t)$ werden in der zweiten Arbeit weiter verfolgt. *J. Heinkel.*

Praporgescu, N.: Sur les probabilités en chaîne. Acad. Republ. popul. Romîne, Studii Cerc. mat. 9, 439—480, russ. und franzôs. Zusammenfassg. 477—479 (1958) [Rumänisch].

Asymptotic behaviour of stationary and non-stationary Markov chains and of chains with complete connections is investigated, by making use of certain special systems of integral equations, studied by the author in a previous paper [Acad. Republ. popul. Romîne, Bul. ști., Sect. Ști. mat. fiz. 8, 549—616 (1956)].

R. Theodorescu.

Fireșcu, D.: Fonctions d'estimation pour les probabilités de passage inverses d'une chaîne de Markov. Analele Univ. C. I. Parhon București, Ser. Ști. Natur. Nr. 21, 15—22, russ. und franzôs. Zusammenfassg. 22—23 (1959) [Rumänisch].

This paper continues the investigations started by the author in two previous papers (this. Zbl. 82, 137; 84, 146) on estimation problems relative to a simple discrete stationary Markov chain with a finite set of states a_j , $1 \leq j \leq m$. Under certain regularity conditions involving indecomposability of the stochastic matrix $\|p_{ij}\|$ of the given chain, it is shown that the estimation functions n_{isj_s}/n_{j_s} , $1 \leq s \leq r$ (here n_i and n_{ij} represent, respectively, the numbers of occurrences of a_i and $a_i a_j$ in a sequence of n trials) corresponding to a subset q_{isj_s} , $1 \leq s \leq r$ of unknown inverse transition probabilities are asymptotically Gaussian and become asymptotically efficient when the considered subset coincides with the set of all inverse transition probabilities.

R. Theodorescu.

Goodman, Leo A.: Exact probabilities and asymptotic relationships for some statistics from m -th order Markov chains. Ann. math. Statistics 29, 476—490 (1958).

Einige weitere Untersuchungen auf dem Gebiet der Statistik Markoffscher Prozesse im Anschluß an Arbeiten des Verf. in Zusammenarbeit mit T. W. Anderson [Ann. math. Statistics 28, 89—110 (1957)] und von R. Dawson und I. J. Good (dies. Zbl. 78, 317).

W. Richter.

Sankaranarayanan, G.: A note on the equidistribution of sums of independent random variables. J. Indian math. Soc., n. Ser. 22, 93—98 (1959).

Let $S_n = X_1 + \dots + X_n$, where X_1, X_2, \dots is a sequence of independent random variables, all having the same characteristic function $\Phi(t)$. With respect to the roots of the equation $\Phi(t) = 1$, there are three cases to consider according as $\Phi(t) = 1$ only when $t = 0$, $\Phi(t) = 1$ for all t , and $\Phi(t) = 1$ for some $t \neq 0$. In the last case, there is some $\beta > 0$ such that $\Phi(t) = 1$ if and only if $t = 2k\pi/\beta$. ($k = 0, \pm 1, \dots$). Corresponding to these three cases, the mean value $M(h)$ of a function $h(x)$ is defined as

$$M(h) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h(x) dx; \quad M(h) = h(0); \quad M(h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^N h(j\beta)$$

respectively. H. Robbins (this Zbl. 53, 267) has shown that: The class H of functions $h(x)$ such that with probability 1

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n h(S_j) = M(h)$$

contains all uniformly almost periodic functions. Let $p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots$ be a sequence of integers which tends to infinity. The author proves that the relation (1) holds with probability 1 for

$$h(x) = e^{itx} \text{ and } S_j = X_{p_1 + \dots + p_{j-1} + 1} + \dots + X_{p_1 + \dots + p_j}; \quad j \geq 1.$$

S. K. Nasr.

Wendel, J. G.: Invariance of normal distributions. Michigan math. J. 4, 173—174 (1957).

In Umkehrung des bekannten Satzes, daß affine Transformationen (multi-variable) Normalverteilungen in Normalverteilungen überführen, beweist Verf.: Transformiert die eindeutige Transformation g des Euklidischen R_n auf sich selbst $n+1$ n -variable Normalverteilungen $N(u_j, U)$ mit Mittelwertvektoren u_j ($j = 0, 1, \dots, n$) und gleicher Kovarianzmatrix U in Normalverteilungen $N(v_j, V_j)$, so ist g fast überall äquivalent einer affinen Transformation. *M. P. Geppert.*

Clark, Charles E. and G. Trevor Williams: Distributions of the members of an ordered sample. *Ann. math. Statistics* **29**, 862—870 (1958).

Es handelt sich um das Problem, die Verteilung von x_m zu berechnen, wenn $x_1 \dots x_m \dots x_N$, mit $x_i \leq x_{i+1}$, $i = 1 \dots N-1$, die geordneten Elemente einer Zufallsstichprobe aus einer statistischen Menge mit der Verteilungsfunktion $F(x)$ und der Wahrscheinlichkeitsdichte $F'(x) = f(x)$ sind. Unter Voraussetzung spezieller Verteilungsfunktionen ist das Problem schon mehrfach behandelt (s. insbesondere M. G. Kendall and A. Stuart, "The advanced theory of statistics", Bd. I, London 1958, pp. 218—224). Verff. berechnen die Momente der Verteilung von x_m vorerst unter der Voraussetzung, daß die Umkehrfunktion von $F(x)$ polynomial ist, d. h.

$$F^{-1}(x) = \sum_{i=0}^r a_i (x - p)^i, \quad p = m/(N+1).$$

Aus den Resultaten folgt u. a. die bekannte Tatsache, daß mit wachsendem N bei festem m/N die asymptotische Verteilung von x_m den Mittelwert x_p , und die Varianz $p q / f^2 N$ hat, und daß für großes N die Verteilung genähert normal ist. Verff. diskutieren sodann die Anwendbarkeit der Ergebnisse für den Fall, daß $F^{-1}(x)$ nicht polynomial, sondern lediglich nach p differenzierbar ist. Es zeigt sich, daß die Momente der Verteilung von x_m mit genügender Sicherheit bestimmbar sind, wenn die ersten Glieder der Taylorentwicklung von $F^{-1}(x)$ nach x_p Verwendung finden. Verff. untersuchen auch die Effizienz des Zentralwertes als Schätzwert des Mittels einer Normalverteilung. Schließlich werden die Momente der verbundenen Verteilung von x_m und x_n , $m < n$, berechnet. *H. Jecklin.*

Prasad, Ayodhya: A new discrete distribution. *Sankhyā* **17**, 353—354 (1957).
Verf. bestimmt für die mit $\lambda > 0$ in $\xi = 1, 2, \dots$ definierte diskrete Verteilung

$$\zeta_\xi = 2\lambda(\lambda+1)/\{(\lambda+\xi-1)(\lambda+\xi)(\lambda+\xi+1)\}$$

Erwartungswert $\mu_1' = 1 + \lambda$ und durchschnittliche Abweichung

$$\delta_m = 4\lambda(\lambda+1)/\{([\lambda]+1)(\lambda+[\lambda]+2)\}$$

und bringt ζ_ξ in Zusammenhang mit einer Modifikation von Buffons Nadelproblem. *M. P. Geppert.*

Coleman, B. D.: On the strength of classical fibres and fibre bundles. *J. Mech. Phys. Solids* **7**, 60—70 (1958).

The statistical aspects of the breaking strength of fibers and of bundles are discussed on the basis of the asymptotic distributions of extreme values. *A. M. Freudenthal.*

Batiele, Edgar: Le mélange des cartes par coupes successives. *C. r. Acad. Sci., Paris* **248**, 1284—1286 (1959).

Wird in einem Kartenspiel n mal nacheinander „abgehoben“, so gelangt jede Karte mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit an einen beliebig vorgegebenen Platz (= Rang). x_n sei die Rangordnung (bezogen auf die Einheit) der Karte, die nach dem n -ten Abheben den 1. Rang einnimmt und u_n der Rang der Karte, die zu Beginn den Rang u_0 besaß, dann ist $u_n = u_0 + h - S$ mit $S = \sum_{v=1}^n x_v$, wobei h die sukzessiven Werte 1, 2, 3, \dots , n annimmt. Verf. gibt für $u_0 = 0$ die Wahrscheinlichkeitsdichte und den Mittelwert von u_n an. *J. Heinhold.*

Wierzbicki, Witold: A probabilistic model of an icicle. Rozprawy inż. 5, Nr. 4, 573—576, russ. und engl. Zusammenfassg. 576—577 (1957) [Polnisch].

Statistik:

• **Davidson, Donald and Patrick Suppes** in collaboration with **Sidney Siegel:** Decision making. An experimental approach. Stanford, Cal.: Stanford University Press 1957. 121 p. \$ 3,25.

Utility und subjektive Wahrscheinlichkeit werden axiomatisiert unter Zugrundelegung einer Anzahl von Hypothesen, die an einer Gruppe von Studenten getestet werden. Verff. illustrieren, daß viele der in der Literatur diskutierten Axiomensysteme im Vergleich zur Vielfalt der beobachteten Verhaltensarten zu eng sind. *D. Bierlein.*

Good, I. J.: The interaction algorithm and practical Fourier analysis. J. roy. statist. Soc., Ser. B 20, 361—372 (1958).

Der Yatesche Algorithmus zur Berechnung der Interaktionen in der 2^k -Tafel [z. B. Cochran-Cox, Experimental Designs (1957; dies. Zbl. 77, 132), p. 159] und seine Analoga für die t^k -Tafeln, sowie dessen Umkehrung und die Berechnung der Divisoren wird durch Matrizen übersichtlich und allgemein beschrieben. Auch das $t_1 \times t_2 \times \dots$ -Faktor-Experiment wird erfaßt. Ähnliche Überlegungen und übersichtliche Formeln werden dann für die diskrete mehrdimensionale Fourier-Zerlegung angestellt; dabei ergeben sich für das praktische Rechnen wichtige Vereinfachungen, wenn die Anzahl der benutzten Stellen $= t_1 t_2 \dots t_k$ (t_ν rel. prim) ist. *D. Morgenstern.*

Raj, Des and Salem H. Khamis: Some remarks on sampling with replacement. Ann. math. Statistics 29, 550—557 (1958).

Es werden zwei Verfahren der Stichprobenerhebung mit Zurücklegen für die Mittelwertschätzung einer endlichen Menge von Zufallsvariablen verglichen. Beim ersten Verfahren wird eine vorbestimmte Anzahl m von Elementen mit Zurücklegen gewählt, beim zweiten wird die Auswahl unter Zurücklegen fortgesetzt, bis eine vorbestimmte Anzahl n unterschiedlicher Elemente erreicht ist. Es ist klar, daß für $m = n$ die Zahl der unterschiedlichen Elemente der Stichprobe im ersten Fall $\leq n$ ist. Es wird gezeigt, daß bei Stichproben mit Zurücklegen eine Schätzung, welche nur auf unterschiedliche Elemente der Stichprobe abstellt, einer Schätzung auf Basis der gesamten Stichprobe überlegen ist, sofern der Stichprobenumfang im vorhinein festgelegt wird, während die Anzahl der unterschiedlichen Elemente der Stichprobe eine Zufallsvariable ist, oder sofern der totale Stichprobenumfang eine Zufallsvariable ist, während die Zahl der unterschiedlichen Elemente der Stichprobe zum voraus fixiert wird. Dasselbe gilt für die Schätzung von Verhältniszahlen, deren Erwartungstreue besser ist auf Basis nur unterschiedlicher Elemente, sei es daß deren Anzahl vorgegeben wird, sei es daß sie als Zufallsvariable gelte. Verff. geben auch die Formeln für Schätzung der Varianz der behandelten statistischen Charakteristika. Sie dehnen die Resultate schließlich auf mehrstufige Stichproben aus. *H. Jecklin.*

• **Dodge, Harold F. and Harry G. Romig:** Sampling inspection tables. Single and double sampling. (Wiley Publ. in Appl. Statistics.) 2nd ed. rev. and expanded. New York: John Wiley & Sons, Inc.; London: Chapman & Hall, Ltd. 1959. XI, 224 p.

Die zweite Ausgabe des heute noch aktuellen Buches von Dodge-Romig (erste Ausgabe s. dies. Zbl. 28, 412) wurde sowohl der äußeren als auch der inneren Seite nach neu umgestaltet: die grundlegenden drei Kapitel der ursprünglichen Ausgabe wurden mit gewissen Abänderungen übernommen, das einleitende Kapitel wurde erweitert und das vierte Kapitel hinzugefügt. Der zweite Teil des Buches,

der ursprünglich nur die Tafeln enthielt, wurde mit vorzüglich gestalteten graphischen Darstellungen von Verläufen operativer Charakteristiken ergänzt. Neu ausgearbeitete zwei Abschnitte des einleitenden Kapitels enthalten einerseits eine Anleitung für die Anwendung von Tafeln für den Fall, in dem eine hundertprozentige Lieferungskontrolle nicht durchgeführt wird, falls die Lieferung auf Grund des Kontrollergebnisses zurückgewiesen wurde, andererseits eine Beschreibung der Art, mit der man den Übernahmeplan wählt. In diesem zweiten Teil haben Verff. auf Grund der Erfahrungen mit den statistischen Übernahmen eine logische Folge von Erwägungen ausgearbeitet, welche der Auswahl des Übernahmeplans vorangeht. Im vierten Kapitel erläutern Verff. den Begriff der Operationscharakteristik (OC) und liefern im Bilderteil des Buches eine Beschreibung der Berechnung einzelner OC und vergleichen die Operationscharakteristiken für den Fall einer endlichen und einer unendlichen Grundgesamtheit. Den Textteil des Buches ergänzen die Anlagen (Diagramme und Tafeln), die mehr als zwei Drittel des Buches umfassen. Verff. erwägen zwei Systeme der Tafeln von Übernahmeplänen: a) gestützt auf den Wert der schlimmsten resultierenden Qualität P_L (AOQL) und b) gestützt auf den Wert des unzulässigen Prozentsatzes von Fehlerhaften in der Lieferung P_2 (LTPD). Die Übernahmepläne werden solcherart gewählt, daß die Zahl der kontrollierten Erzeugnisse für den gegebenen Wert des durchschnittlichen Prozentsatzes von Fehlerhaften in der Produktion für den gegebenen Lieferungsbereich N minimal ist. Im letzten Abschnitt des Buches wiedergegebene Tafeln sind mit den ursprünglichen Tafeln identisch. Die graphischen Darstellungen von Operationscharakteristiken entsprechender einzelner Übernahmepläne, die Verff. zweckmäßig in Bildern gruppiert haben, werden gleichermaßen wie die Tafeln gegliedert. Die Verläufe der OC werden unter Voraussetzung einer unendlichen Grundgesamtheit bestimmt. Das Buch ist vorzüglich gestaltet, der Druck und Papier von ausgezeichneter Qualität. Das besondere (größere) Format des Buches ergab sich aus den Forderungen nach einer geeigneten und zweckmäßigen Gestaltung des Bilderteiles. Die vorgenommene Verbesserung und — im Vergleich mit der ursprünglichen Ausgabe — Erweiterung des Buches bezwecken das Ziel, den Inhalt des Buches einem möglichst großen Leserkreis zugänglich zu machen. Dieser von Verff. verfolgte Zweck wird gewiß erreicht.

A. Žaludová.

Cox, C. P.: The analysis of Latin square designs with individual curvatures in one direction. J. roy. statist. Soc., Ser. B, 20, 193—204 (1958).

Bei Feldversuchen werden die Pläne häufig in Form eines lateinischen Quadrats angelegt. Verf. zeigt, wie ein mathematisches Modell entwickelt werden kann, bei dem die Zeilen und Spalten des Quadrates durch je einen Satz von parallelen Kurven dargestellt werden. Zunächst wird das Modell $y_{ij} = \mu + \alpha_j + \beta_j \alpha_{ij} + \theta_i + e_{ij}$ studiert, wobei die Buchstaben folgendes bedeuten: y_{ij} Beobachtungswert der i -ten Behandlung in der j -ten Spalte, μ Mittelwert, α_j und β_j Parameter für Veränderungen in der j -ten Spalte, θ_i i -ter Behandlungsparameter, α_{ij} Konstante für die i -te Behandlung in der j -ten Spalte (wobei hier im allgemeinen gelten soll $\sum_{i=1}^n \alpha_{ij}^2 =$

$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^2 = 1$), e_{ij} normalverteilte Zufallsvariable mit der Varianz σ^2 und dem Mittelwert 0. Verf. führt die Varianzanalyse durch und prüft die Behandlungsunterschiede. Als Beispiel wird der Milchertrag von 4 Kühen in 4 Wochen untersucht. Die neue Methode wird mit der bisher üblichen verglichen, und es werden Untersuchungen angestellt, wann die eine und wann die andere zu bevorzugen ist. Im allgemeinen Fall — unter Berücksichtigung der Regressionen — lautet das Modell

$$y_{ij} = \mu + \alpha_j + \sum_{r=1}^p \beta_{rj} \cdot \alpha_{rij} + \theta_i + e_{ij}.$$

Das zugehörige Beispiel stammt wieder aus der Milchwirtschaft; Verf. weist jedoch darauf hin, daß das allgemeine Prinzip einen viel größeren Anwendungsbereich hat.
17 Literaturhinweise. *G. Reißig.*

Patterson, H. D. and H. L. Lucas: Extra-period change-over designs. *Biometrics* 15, 116—132 (1959).

Versuche mit zyklischer Anordnung der Behandlung verwendet man besonders dann, wenn das Experiment sich über verschiedene Perioden erstreckt. Der einfachste Typ eines solchen Versuchsplanes ist das lateinische Quadrat. Spezialfälle sind in der Literatur bereits behandelt. Verff. führen die Ergebnisse von Yates, Lucas sowie Cochran und Cox an. In allen diesen Untersuchungen darf ein und dieselbe Behandlung auf eine Versuchseinheit nur in einer einzigen Periode angewandt werden. Verff. gehen von t Behandlungen, p Perioden und b Blöcken mit k Versuchseinheiten aus. Sie untersuchen die direkten Wirkungen und die Restwirkungen und stellen Gleichgewichtsbetrachtungen an. Komplette Sätze von orthogonalen Quadraten findet man in den Tafeln von Fisher und Yates. In der Praxis werden die Reihen des lateinischen Quadrates durch Zufall ausgewählt. Verff. geben Beispiele an und führen die Varianzanalyse durch. Bei der Abschätzung des Versuchsfehlers treten ähnliche Probleme auf wie bei Experimenten mit Milchvieh, die in früheren Arbeiten der Verff. beschrieben worden sind. Bei Versuchsanlagen, die nicht von orthogonalen lateinischen Quadraten abgeleitet sind, bereitet die Bestimmung der Quadratsummen für die direkten Wirkungen einige Schwierigkeiten. Verff. geben die entsprechenden Gleichungen in Matrizenform an. Als Beispiel werden Milcherträge betrachtet. In der abschließenden Diskussion werden zwei Fälle unterschieden: 1. Ein Plan für p Perioden kann nicht in einen für $p + 1$ Perioden umgewandelt werden. 2. Eine solche Umwandlung ist möglich.

G. Reißig.

Lafon, Monique: Coefficient d'efficacité d'un bloc incomplet partiellement équilibré. *C. r. Acad. Sci., Paris* 248, 3114—3115 (1959).

The efficiency factor of a partially balanced incomplete block design (PBIBD) with two associate classes attains its maximum — for r, k, v fixed — when $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ i. e. when it is a BIBD.
T. V. Narayana.

Rybarz, J.: Ein einfacher Beweis für das dem χ^2 -Verfahren zugrundeliegende Theorem. *Metrika* 2, 89—93 (1959).

Unter Benutzung der Tatsache, daß die Multinomialverteilung auftritt als Verteilung k unabhängiger Poisson-verteilter Größen X_i mit der zusätzlichen Bedingung $\sum X_i = n$, wird die asymptotische Verteilung der Testgröße $\sum (X_i - np_i)^2 / np_i$ durch Benutzung des zentralen Grenzwertsatzes nachgewiesen. Der Gedanke der Gewinnung als bedingter Poisson-Verteilung findet sich bereits bei W. G. Cochran (dies. Zbl. 47, 131) und in manchen Lehrbüchern, z. B. Anderson-Bancroft, *Statistical Theory in Research*, p. 132 (dies. Zbl. 49, 98).
D. Morgenstern.

Sundaresan, K.: A note on some properties of the power function of chi-square. *J. Madras Univ., Sect. B* 27, 299—304 (1957).

As is well known, when ξ_i ($i = 1, \dots, n$) are independent normal variates with zero mean and unit variance, $\chi^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ is distributed according to the chi-square distribution with n degrees of freedom. However, when ξ_i ($i = 1, \dots, n$) are independent normal variates with unit variance, but with different means a_i ($i = 1, \dots, n$), $\chi'^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ has the non-central chi-square distribution with n degrees of freedom and the non-central parameter $\lambda = \sum_{i=1}^n a_i^2$. Denote the former case by H_0 and the latter by H_1 . The author treats the power of the chi-square test of H_0 against H_1 .

The results stated are the following: (i) The power decreases for a fixed λ , as n increases. (ii) The power increases for a fixed n , as λ increases. (iii) When both n and λ vary, the power increases as long as $\lambda/n > 1/5$. K. Matusita.

Watson, G. S.: On chi-square goodness-of-fit tests for continuous distributions. J. roy. statist. Soc., Ser. B **20**, 44—72 (1958).

Das Verteilungsgesetz der klassischen Prüfgröße

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{\{n_i - N p(\tilde{\theta})\}^2}{N p_i(\tilde{\theta})}$$

wird hergeleitet, wenn die Parameter (θ) eines kontinuierlichen Verteilungsgesetzes nach der Methode des maximalen Likelihood vor der Gruppierung der Daten bestimmt werden. Es ergibt sich, daß χ^2 unter diesen Voraussetzungen verteilt ist wie

$$(a) \quad y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{k-s-1}^2 + [\lambda_1 y_{k-s}^2 + \lambda_2 y_{k-s+1}^2 + \dots + \lambda_s y_{k-1}^2],$$

worin die y_i gegenseitig stochastisch unabhängige, normal verteilte und standardisierte zufällige Variable und die λ_i gewisse charakteristische Wurzeln einer aus dem Parametervektor $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ folgenden Bestimmungsgleichung sind. Das bei praktischen Anwendungen gewöhnlich vernachlässigte und in Formel (a) in Klammern gesetzte Korrekturglied verschwindet asymptotisch für $k \rightarrow \infty$. In einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **81**, 360) wurde für eine Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert, aber bekannter Streuung $\lambda = 0,139$ gefunden, für eine Cauchy-Verteilung wird $\lambda = 0,189$ ermittelt. Die Ergebnisse der Arbeit bedeuten einen wertvollen Ausbau der Theorie des χ^2 -Tests; insbesondere wird Klarheit gewonnen über die Art und das Ausmaß des Fehlers, den man begeht, wenn man das in (a) eingeklammerte Korrekturglied vernachlässigt. H. Ammeter.

Chapman, Douglas G.: A comparative study of several one-sided goodness-of-fit tests. Ann. math. Statistics **29**, 655—674 (1958).

Die Güte statistischer Tests für die Übereinstimmung geordneter Beobachtungsreihen mit Null-Hypothesen wird an Hand der vom Verf. vorgeschlagenen Kriterien minimale und maximale Schärfe (power) bewertet. Die Formeln für diese Kriterien werden für eine Reihe von bekannten Tests hergeleitet und unter der Annahme von Gegenhypothesen, die aus der Null-Hypothese durch Translation hervorgehen, numerisch ausgewertet. Diese numerische Untersuchung zeigt, daß der π' -Test von Fisher-Pearson die beste maximale Schärfe, andererseits aber eine sehr bescheidene minimale Schärfe aufweist. Umgekehrt weist der D_n -Test von Smirnov die beste minimale Schärfe, aber eine niedrige maximale Schärfe auf. Vom Standpunkt der Minimax-Strategie aus weist der letztere Test — wenn keine Anhaltspunkte über Gegenhypothesen vorliegen — optimale Eigenschaften auf. H. Ammeter.

Bose, P. K. and S. B. Chaudhuri: Method of matching used for the estimation of test reliability. Sankhyā **17**, 377—384 (1957).

Werden N Probanden n gleiche Aufgaben ($i = 1, \dots, n$) gestellt, die nur Lösung oder Nicht-Lösung zulassen, so bilden die Resultate n streng individuell verknüpfte Stichproben von n Variablen x_i , wobei $x_i = 1$ bzw. 0 bei Lösung bzw. Nicht-Lösung der Aufgabe i , mithin $E(x_i) = p_i = 1 - q_i$, $\text{var } x_i = p_i q_i$ mit $q_i =$ Wahrscheinlichkeit für Nicht-Lösung („Schwierigkeit“) von Aufgabe i . Zur Ermittlung der Zuverlässigkeit (reliability) des Testes, d. h. der Korrelation seiner n Aufgaben, empfehlen Verff. Aufteilung der n Aufgaben in $m \geq 2$ Teilteste von je k Aufgaben derart, daß die Aufgaben jedes Teiltestes gleiche p -Werte aufweisen wie entsprechende Aufgaben aller anderen Teilteste und daß alle Teilteste das gleiche Korrelationsgefüge aufweisen. Zur Prüfung der Gleichheit der entsprechenden $m q$ -Werte an Hand der zugehörigen $m N$ Beobachtungen, die aus m individuell verknüpften N -gliedrigen Stichproben bestehen, eignet sich der (für $m = 2$ in den McNemar-Test übergehende) Cochran-Test (W. C. Cochran, dies. Zbl. **40**, 222). Die Korrelationen zwischen

zwei Teiltesten werden sodann aus den N beobachteten Wertepaaren X, Y ermittelt mit Hilfe der Schätzformel

$$\hat{\varrho} = [2 \sum XY - (\sum X + \sum Y)^2 / 2N] / [\sum X^2 + \sum Y^2 - (\sum X + \sum Y)^2 / 2N],$$

die sich bei Simultan-Schätzung der Parameter μ, σ^2, ϱ einer Binormal-Verteilung mit Korrelation ϱ , Mittelwerten $= \mu$, Varianzen $= \sigma^2$ aus einer N -gliedrigen einfachen Stichprobe auf Grund des Maximum-likelihood-Prinzips ergibt.

M. P. Geppert.

Stevens, W. L.: Sampling without replacement with probability proportional to size. *J. roy. statist. Soc., Ser. B* **20**, 393—397 (1958).

Beim Problem der proportionalen Stichprobenauswahl wird im allgemeinen ein Zurücklegen der gewählten Elemente angenommen (siehe z. B. L. Schmetterer, Einführung in die mathematische Statistik, S. 154, dies. Zbl. **70**, 143). Für die Durchführung ohne Zurücklegen haben F. Yates und P. M. Grundy eine Methode dargelegt (dies. Zbl. **52**, 153), welche in vorliegender Arbeit eine Abänderung und nach Ansicht des Verf. auch Verbesserung erfährt. Vorausgesetzt wird, daß für jedes Element der endlichen statistischen Gesamtheit die Maßzahl x des zu untersuchenden statistischen Charakteristikums bekannt sei und daß sich die Gesamtheit aus Gruppen mit $N_i \geq n$ Elementen ungefähr gleicher Maßzahl x_i zusammensetzt. Es werden n Gruppen mit Zurücklegen gewählt, wobei zwecks Vermeidung des bei Mehrfachwahl des gleichen Elementes entstehenden Fehlers jedes bereits einmal gewählte Element durch ein anderes zufällig gewähltes Element ersetzt wird. Es wird gezeigt, daß die biasfreie Mittelwertschätzung für die Gesamtheit formal mit dem Fall der Stichprobenauswahl unter Zurücklegen übereinstimmt. Für die Schätzung der Varianz dagegen ergibt sich ein Korrekturglied.

H. Jecklin.

Eeden, Constance van: Maximum likelihood estimation of ordered probabilities. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **59**, 444—455 (1956).

Eeden, Constance van: Maximum likelihood estimation of partially or completely ordered parameters. I, II. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **60**, 128—136, 201—211 (1957).

Eeden, Constance van: Note on two methods for estimating ordered parameters of probability distributions. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **60**, 506—512 (1957).

Eeden, Constance van: A least squares inequality for maximum likelihood estimates of ordered parameters. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **60**, 513—521 (1957).

Die fünf hier besprochenen Arbeiten gehen von folgender Fragestellung aus: Es seien k Grundgesamtheiten gegeben. Für $j = 1, \dots, k$ seien die I_j eindimensionale, abgeschlossene Intervalle. Der j -ten Grundgesamtheit sei eine Schar von Verteilungsfunktionen $F_j(x; t_j)$ zugeordnet, wobei der Parameter t_j das Intervall I_j durchlaufe. Es wird angenommen, daß die k Grundgesamtheiten unabhängig voneinander verteilt sind. Für kein j sei $F_j(x; t_j)$ vom singulären Typ. Die Menge der Parameter $\{t_1, \dots, t_k\}$ sei geordnet [aber nicht notwendig voll geordnet], und zwar in der Weise, daß für eine nicht leere Teilmenge die übliche Vollordnungsrelation für reelle Zahlen erklärt ist. Überdies (A) soll zwischen t_i und t_j keine Ordnungsrelation bestehen, wenn $I_i \cap I_j$ nicht leer ist. Es wird also im folgenden stets vorausgesetzt, daß die t_j in I_j variieren und für gewisse i, j $t_i \leq t_j$ gilt und aus $t_i \leq t_j, t_j \leq t_k$ stets die Bedingung $t_i \leq t_k$ gefolgert werden kann. Der j -ten Grundgesamtheit wird eine Stichprobe vom Umfang n_j entnommen. Mit $L_j(t_j)$ wird der Logarithmus der entsprechenden Likelihoodfunktion an der Stelle t_j bezeichnet. Was kann man unter den angegebenen Bedingungen über die Lösung der Likelihoodgleichung

$\sum_{j=1}^k L_j(t_j) = 0$ aussagen? In der ersten Arbeit wird der Fall betrachtet, daß die I_j von der Gestalt $0 \leq t_j \leq 1$ sind, (A) nicht notwendig gilt und die $F_j(x; t_j) = \sum_{l \leq x} \binom{1}{l} t_j^l (1 - t_j)^{1-l}$ sind,

$j = 1, \dots, k$. Es liegt also die Aufgabe vor, die Likelihoodschätzungen für k Binomialverteilungen zu studieren, deren Parameter geordnet sind. Es wird mittels doppelter Induktion (einerseits nach k , andererseits im wesentlichen nach der Anzahl der Paare t_i, t_j , für die die Ordnungsrelation erklärt ist) das Hauptergebnis gezeigt, daß die Likelihoodgleichung genau eine Lösung hat. Der Induktionsbeweis erlaubt es auch, Schritt für Schritt die Lösung der Maximum-Likelihoodgleichung zu berechnen. Die zweite Arbeit ist allgemeineren Verteilungsfunktionen $F_j(x; t_j)$ gewidmet. Die Beweismethode und die Aussage des oben formulierten Hauptergebnisses können im wesentlichen übertragen werden, wenn die Bedingung (B) erfüllt ist: Es sei M eine Teilmenge von $\{1, \dots, k\}$. Wenn $I_M = \bigcap_{j \in M} I_j$ nicht leer ist, dann sei $\sum_{j \in M} L_j(t)$ strikt eingipfelig für $t \in I_M$. Im Falle der Binomialverteilung ist sogar eine etwas schärfere Bedingung erfüllt. Unter der Bedingung (B) werden im zweiten Teil der zweiten Arbeit auch Aussagen über die Konsistenz der Likelihoodschätzungen gemacht. Hierzu wird eine von Wald (vgl. dies. Zbl. 34, 229) entwickelte Methode modifiziert und durch Induktion bewiesen, daß das k -Tupel $(\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_k)$ der Likelihoodschätzungen für $n_1 \rightarrow \infty, \dots, n_k \rightarrow \infty$ konsistent für das k -Tupel (t_1, \dots, t_k) der Parameter ist. Für den Fall, daß $F_j(x; t_j)$ vom Exponentialtypus ist, hat Brunk (vgl. dies. Zbl. 66, 385) unabhängig vom Verf. das Problem der Maximum-Likelihoodschätzungen geordneter Mengen von Parametern untersucht. Für den Fall einer Vollordnung wurden solche Untersuchungen schon früher von Ayer, Brunk, Ewing, Reid und Silverman (vgl. dies. Zbl. 66, 385) durchgeführt. Verf. studiert nun in der vierten Arbeit den Zusammenhang zwischen der von Brunk entwickelten Methode und ihrer eigenen. Sie zeigt, daß die Ergebnisse von Brunk in den ihren enthalten sind. In der letzten Arbeit wird im wesentlichen wieder unter der Bedingung (B) eine interessante Verallgemeinerung einer Ungleichung gegeben, die in der zitierten Arbeit von Ayer, Brunk usw. nur für die Binomialverteilung gefunden wurde. *L. Schmetterer.*

Kulldorff, G.: A problem of maximum likelihood estimation from a grouped sample. Metrika 2, 94—99 (1959).

Let two random variables X and Y have the distribution functions $F(x)$ and $G(x)$. Suppose that $F(x)$ is unknown, while $G(x)$ is known, and that the relation $F(x) = \delta G(x)$ holds for all $x \leq x'$, where δ is an unknown non-negative parameter. The problem treated in this paper is to give the maximum likelihood estimate of the parameter δ based on the observation on X under the following condition: Let x_0, x_1, \dots, x_k be a fixed ordered set of values with $x_0 = -\infty, x_{k-1} = x', x_k = +\infty$. Then, all the information available in the sample is the set of frequencies n_i of the observation falling into the intervals $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, k$) $\left(n = \sum_{i=1}^n n_i\right)$.

The results are the following: (i) When the values of $G(x_i)$ ($i = 1, \dots, k-1$) are completely determined ($k \geq 2$), that is $G(x_i)$ do not contain any unknown parameter, the maximum likelihood estimate of δ is $\hat{\delta} = (1 - n_k/n)/G(x_{k-1})$. This is the uniformly minimum variance unbiased estimate of δ with $\text{Var}(\hat{\delta}) = (\delta/G(x_{k-1}) - \delta^2)/n$. (ii) When $G(x)$ contains a set of unknown parameters $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ to be also estimated, the joint maximum likelihood estimate of (δ, θ) is $(\hat{\delta}, \hat{\theta})$, where $\hat{\theta}$ is the maximum likelihood estimate of θ obtained by considering n_i as the frequencies of observation on Y falling into $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, k-1$) ($k \geq 3$ being assumed), and $\hat{\delta} = (1 - n_k/n)/G_{\hat{\theta}}(x_{k-1})$, $G_{\hat{\theta}}(x_{k-1})$ denoting the value of $G(x_{k-1})$ with θ taking on $\hat{\theta}$. *K. Matusita.*

Creager, John A.: General resolution of correlation matrices into components and its utilization in multiple and partial regression. Psychometrika 23, 1—8 (1958).

Durch geeignete Matrizenoperationen zeigt Verf., wie sich die Bestimmung der multiplen und partiellen Korrelationen und Regressionskoeffizienten von n Variablen vereinfacht durch vorherige Faktorenanalyse und Zurückführung auf r ($< n$) — nicht notwendig orthogonale — Faktoren. Das Verfahren ist besonders ergiebig bei großen n und kleinen r . Die für die verschiedenen Problemstellungen entwickelten optimalen Rechenschemata werden an einem Zahlenbeispiel mit $n = 7$, $r = 2$ illustriert.

M. P. Geppert.

Harley, B. I.: Further properties of an angular transformation of the correlation coefficient. *Biometrika* **44**, 273—275 (1957).

This paper continues earlier work by the same author (see this Zbl. **70**, 376). For odd values of the size n of a sample from a bivariate normal distribution (correlation coefficient ρ , sample value r) it presents a direct proof of an amazingly simple and neat result, viz. $E(\sin^{-1} r) = \sin^{-1} \rho$. Compared to the simplicity of the result, the proof is quite intricate, but the reviewer was unsuccessful when he tried to find a more transparent method of proof. One may evoke haunting reminiscences of the theory of integral equations and integral transformations when writing down the result in the form: $\int f(\rho, r) g(r) dr = g(\rho)$ with $g(x) = \sin^{-1} x$, $f(\rho, r) =$ density function of the distribution of r . The work described in this paper suggested to the author that the distribution of $r/(1-r^2)^{1/2}$ might be similar to that of the non-central t distribution. This is investigated in another paper (cf. the subsequent review).

H. R. van der Vaart.

Harley, B. I.: Relation between the distributions of non-central t and of a transformed correlation coefficient. *Biometrika* **44**, 219—224 (1957).

Let r be the correlation coefficient in a sample of size n drawn randomly from a normal bivariate population with $\rho = 0$. It is well known that $(n-2)^{1/2} r(1-r^2)^{-1/2}$ is then distributed exactly as Student's t with $n-2$ degrees of freedom. Now the author calculates the first four moments of $(n-2)^{1/2} r(1-r^2)^{-1/2} \gamma(\rho)$ ($\gamma(\rho)$ a function, yet to be determined, of ρ) if $\rho \neq 0$ in a normal bivariate population. He also lists the first four moments of non-central $t = (z + \delta) w^{-1/2}$; here z is distributed $N(0, 1)$, w and z are independent, and w is distributed as χ^2/f with f degrees of freedom. He finds that if $f = n-2$, $\delta = (2n-3)^{1/2} \rho(2-\rho^2)^{-1/2}$, $\gamma(\rho) = [2(1-\rho^2)(2-\rho^2)^{-1}]^{1/2}$, the values of the second moment, and of the ratio of the third and the first moments are the same for the distribution of non-central t and for the distribution of $(n-2)^{1/2} r(1-r^2)^{-1/2} \gamma(\rho)$. With these values for δ and $\gamma(\rho)$ the fourth moments differ only slightly (relative error is $O(n^{-2})$.) Furthermore, let t_ϵ satisfy the equation $P(t > t_\epsilon) = \epsilon$, where t again is non-central with parameters δ and f . The author shows that the above correspondence between the distributions of r and of non-central t can be used to obtain very good approximations to numerical values of t_ϵ from a table of the distribution of r if $\rho \neq 0$.

H. R. van der Vaart.

● **DuBois, Philip H.: Multivariate correlational analysis.** New York: Harper & Brothers, Publ. 1957. XV, 202 p. \$ 5.00.

Das von einem Psychologen für Nicht-Mathematiker geschriebene Buch befaßt sich hauptsächlich mit Methoden zur systematischen Berechnung multipler und partieller Korrelationen und entsprechender Regressionskoeffizienten. Aufbauend auf der linearen Regressionsgleichung $\tilde{z}_0 = \beta_{01.2\dots n} z_1 + \dots + \beta_{0n.1\dots(n-1)} z_n$ für n unabhängige und eine abhängige standardisierte Variable, definiert und erläutert Verf. Grundbegriffe und deren wichtigste Eigenschaften und Relationen. Er entwickelt ein Rechenschema, bei dem, ausgehend von der Korrelationsmatrix der $n+1$ standardisierten Variablen z_0, z_1, \dots, z_n , sukzessive jeweils eine der n Variablen „eliminiert“, d. h. in die Regression aufgenommen wird, u. z. jeweils diejenige, welche die Korrelation zwischen z_0 und Regressionsfunktion zum Maximum macht. Einfache einheitliche Rechenregeln gestatten, bei jedem Schritt (Ausschaltung der Variablen

z_{n+1-k}) aus der vorangehenden die neue Matrix der Ordnung $n+1-k$ zu bestimmen, die die Varianten und Kovarianten der Reste aller $n-k$ noch nicht eliminierten (z_1, \dots, z_{n-k}) und des Restes $z_0 - \tilde{z}_0$ der abhängigen Variablen sowie deren Regressionskoeffizienten bezüglich z_{n+1-k} angibt. (Die Matrix bedeutet hier nur ein handliches Anordnungsschema, es wird aber nicht wie bei der klassischen Faktorenanalyse der Matrizen-Kalkül verwendet.) In das Rechenschema sind überdies ausreichende Rechenkontrollen eingebaut. Verf. zeigt die Äquivalenz seines Algorithmus mit Yules klassischem, aber komplizierterem Formelapparat und erörtert von seinem Standpunkt aus Zusammenhänge mit Spearmans Generalfaktor-Theorie und Thurstones multipler Faktorenanalyse. Hingegen kommen modernere statistische Gesichtspunkte überhaupt nicht zur Sprache. Die Überlegungen beschränken sich im wesentlichen auf beschreibende Statistik (zufallsfreie Daten); die Stichprobentheorie multipler und partieller Korrelationen wird nur in wenigen Zeilen, in einer den heutigen Auffassungen kaum genügenden Form erwähnt.

M. P. Geppert.

Bennet, B. M.: Tests for linearity of regression involving correlated observations. Ann. Inst. statist. Math. 8, 193—195 (1957).

Verf. entwickelt analog R. A. Fishers klassischem Test für Linearität der Regression einen für praktische Fragen bedeutsamen Linearitätstest im Falle korrelierter Proben. Für jeden von c festen x -Werten x_i ($i = 1, \dots, c$) werden unabhängig voneinander n Werte y_{ik} ($k = 1, \dots, n$) beobachtet; die cn Beobachtungen y_{ik} gelten als n -gliedrige einfache Stichprobe einer c -dimensionalen Normalverteilung mit

$$E(y_{ik}) = \mu_i, \text{ var } y_{ik} = \sigma^2, \text{ cov } (y_{ik}, y_{jk}) = \rho\sigma^2.$$

Durch Ausführung einer für alle i gleichlautenden orthogonalen Transformation der y_{ik} ($k = 1, \dots, n$) nach y'_{ik} mit

$$y'_{in} = (y_{i1} + \dots + y_{in})/\sqrt{n} = y'_i$$

und einer zweiten orthogonalen Transformation der y'_i ($i = 1, \dots, c$) nach y''_i mit

$$y''_c = (y'_1 + \dots + y'_c)/\sqrt{c}, y''_{c-1} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x}) y'_i}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}} = b \sqrt{n} \frac{\sum_i (x_i - \bar{x}) y'_i}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}}$$

wird die Nullhypothese der linearen Regression $\mu_i = \alpha + \beta x_i$ ($i = 1, \dots, c$) in die äquivalente Hypothese $E(y''_i) = \dots = E(y''_{c-2}) = 0$ übergeführt, die im Falle bekannter Korrelation ρ mittels Fisher-Verteilung von

$$c(n-1) \frac{\sum_{i=1}^{c-2} y_i'^2}{\left[(c-2)(1-\rho) \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^{n-1} y_{ik}^2 \right]} = \\ = cn(n-1) \frac{\sum_{i=1}^c [y_i - y_{..} - b(x_i - \bar{x})]^2}{\left[(c-2)(1-\rho) \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^n (y_{ij} - y_i)^2 \right]}$$

mit $c-2$ und $c(n-1)$ F. G. zu prüfen ist, wobei $\bar{x} = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^c x_i$,

$$y_{i.} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_{ik}, y_{..} = \frac{1}{cn} \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^n y_{ik} \text{ und } b = \frac{\sum_{i=1}^c (x_i - \bar{x}) y_{i.}}{\sum_{i=1}^c (x_i - \bar{x})^2}$$

den Regressionskoeffizienten bedeutet. Umgekehrt liefert die Fisher-Verteilung des genannten Quotienten bei Linearität der Regression Confidenzgrenzen für ρ .

M. P. Geppert.

Fréchet, Maurice: Sur les tableaux dont les marges et des cases vides sont données. C. r. Acad. Sci., Paris 249, 592 (1959).

Sind N_i, N'_j ($i = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots$) mit $\sum_i N_i = \sum_j N'_j = N$ die Ränder einer rechteckigen Korrelationstabelle T und K eine Teilmenge der in T enthaltenen Felder, so gilt für die Existenz von Besetzungszahlen $n_{ij} \geq 0$, die die Randzahlen N_i, N'_j ergeben und in K null betragen, die notwendige und hinreichende Bedingung: Für beliebige Index-Mengen I, J der Spalten und Zeilen von T mit $I \times J \subset K$ gilt

$\sum_{i \in I} N_i + \sum_{j \in J} N'_j - N \leq 0$. Verf. skizziert einen neuen Beweis dieses Satzes, der auf seinen früheren Untersuchungen (vgl. dies. Zbl. 45, 229; 71, 128) über Korrelationstabellen mit vorgegebenen Randverteilungen aufbaut und auf geeigneten Permutationen der Zeilen bzw. Spalten und Ineinanderschachtelung einer Folge von Korrelationstabellen beruht.

M. P. Geppert.

Klinken, J. van: Some remarks on the method of least squares and linear regression. Verzekerings-Arch. 34, Actuar. Bijv. 73—77 (1957).

Sei $y = y(x)$ eine Schar Poisson-verteilter Zufallsvariablen mit Parameter $E y = \text{var } y = a x + b$ (> 0); die Koeffizienten a, b der linearen Regression sollen aus n unabhängig von einander beobachteten Wertepaaren (x_i, y_i) geschätzt werden. Anwendung des Maximum-Likelihood-Prinzips führt auf ein explizit nicht lösbares Gleichungssystem, das wegen der Nicht-Normalität der y nicht übereinstimmt mit den Normalgleichungen der Methode der kleinsten Quadrate, welche auch wegen der Heteroskedastizität nicht ratsam ist. Ersetzt man hingegen in den exakten Gleichungen die Nenner $E y_i = a x_i + b$ approximativ durch ihre Schätzwerte y_i , so resultieren ohne weiteres lösbare lineare Gleichungen

$$\sum_{i=1}^n x_i(y_i - a x_i - b)/y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n (y_i - a x_i - b)/y_i = 0,$$

die sich ebenso ergeben bei der von H. Cramér und H. Wold (dies. Zbl. 12, 363) vorgeschlagenen Minimalisierung von $\sum_{i=1}^n (y_i - a x_i - b)^2/y_i$. Das so modifizierte Prinzip der kleinsten Quadrate führt also approximativ auf die plausibelsten (Maximum-Likelihood-) Schätzwerte für a, b .

M. P. Geppert.

Healy, M. J. R.: A rotation method for computing canonical correlations. Math. Tables Aids Comput. 11, 83—86 (1957).

Für zwei Sätze von Zufallsvariablen x_i ($i = 1, \dots, p$), y_j ($j = 1, \dots, q$) mit $p \geq q$ und Dispersionsmatrix $\begin{pmatrix} A & C \\ C' & B \end{pmatrix}$, wo A die $p \times p$ -Dispersionsmatrix der x , B die $q \times q$ -Dispersionsmatrix der y und C die $p \times q$ -Matrix der $\text{cov}(x, y)$ sind, bestimmen sich die Quadrate Hottellings q kanonischer Korrelationen $\varrho_i = \text{cov}(u_i, v_i)$ als Wurzeln der Determinanten-Gleichung $|C'A^{-1}C - \lambda B| = 0$ und die Koeffizienten der kanonischen Variablen v_1, \dots, v_q bzw. u_1, \dots, u_p als Lösungen der homogenen Gleichungen $(C'A^{-1}C - \varrho_i B)y = 0$ bzw. als $A^{-1}Cy$. Zur Abkürzung dieser bei großen p, q sehr langwierigen Rechenoperationen führt Verf. mit geeigneten Dreiecks-Matrizen H, K für $A = HH'$, $B = KK'$ und $UH = S$, $VK = T$ die Aufgabe darauf zurück, zwei orthogonale Matrizen S, T zu finden, für die

$$\begin{pmatrix} S & O \\ O & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & H^{-1}CK'^{-1} \\ K^{-1}C'H'^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S' & O \\ O & T' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & R \\ R' & I \end{pmatrix},$$

wobei R die $p \times q$ -Dispersions-Matrix der u_i, v_j mit $\text{cov}(u_i, v_i) = \varrho_i$, $\text{cov}(u_i, v_k) = \text{cov}(v_j, v_k) = \text{cov}(u_i, v_j) = 0$, var $u_i = \text{var } v_j = 1$ ist. Diese Aufgabe löst Verf. iterativ mit Hilfe sukzessiver Drehungen $D_1 = S_1 D T_1'$ (wobei $D = H^{-1}CK'^{-1}$) mit

$$S_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 & \dots & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_p, \quad T_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 & \dots & 0 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_q,$$

deren Drehwinkel so bestimmt werden, daß zwei Glieder von D_1 verschwinden.

M. P. Geppert.

Smith, C. D.: On the mathematics of simple correlation. Math. Mag. 32, 57—69 (1958).

Elementare (in der gewählten Bezeichnungsweise teilweise etwas undurchsichtige) Darlegung der altbekannten Zusammenhänge zwischen einfachem Korrelationskoeffizienten r und Korrelationsverhältnissen η , insbesondere der beiden. K. Pearsons Einführung des Korrelationsverhältnisses bzw. R. A. Fishers Varianzanalyse zugrunde liegenden, additiven Zerlegungen der Varianz von x_1 :

$$\sigma_1^2 = S_1^2 + \sigma_e^2 = \sigma_1^2 (1 - r^2) + \sigma_1^2 r^2 = S_m^2 + \sigma_m^2 = \sigma_1^2 (1 - \eta^2) + \sigma_1^2 \eta^2$$

in Varianz um und Varianz auf Regressionsgerade bzw. -linie; ferner umständliche Beweise der Verschiebungssätze für Varianzen und Kovarianzen, der Invarianz von r gegen separate lineare Transformationen und anderer jedem Anfänger geläufiger Elemente der Korrelations- und Regressionstheorie. Das Bemühen um Gemeinverständlichkeit überwiegt stellenweise die sachliche Korrektheit der Formulierungen.

M. P. Geppert.

Fréchet, Maurice: A note on simple correlation. *Math. Mag.* **32**, 265—268 (1959).

Verf. ergänzt die Darstellung von Smith (vgl. vorstehendes Referat) durch Hinweis auf die begrifflichen Mängel des Korrelationskoeffizienten und — in geringerem Maße — des Korrelationsverhältnisses, sofern er bei nicht binormaler Verteilung als Maß der gegenseitigen Abhängigkeit von zwei Variablen dienen soll, und empfiehlt die ergänzende Verwendung von Ginis Zusammenhangsmaß.

M. P. Geppert.

Smith, C. D.: Some further notes on the theory of correlation. *Math. Mag.* **32**, 269—270 (1959).

In Erwidering auf Fréchets Anmerkungen (vgl. vorstehendes Referat) faßt Verf. die Hauptgesichtspunkte seiner früheren Ausführungen übersichtlich zusammen unter Hinweis auf die einschlägigen klassischen Werke von G. U. Yule und R. A. Fisher sowie auf H. L. Rietz.

M. P. Geppert.

Wiid, A. J. B.: On the moments and regression equations of the fourfold negative and fourfold negative factorial binomial distributions. *Proc. roy. Soc. Edinburgh, Sect. A* **65**, 29—34 (1958).

Eine Population sei simultan aufgegliedert nach zwei Alternativen E, \bar{E} bzw. F, \bar{F} im Verhältnis: $P_{11}(EF), P_{10}(E\bar{F}), P_{01}(\bar{E}F), P_{00}(\bar{E}\bar{F})$ mit $P_{11} + P_{10} + P_{01} + P_{00} = 1$. Während A. C. Aitken und H. T. Gonin (dies. Zbl. **13**, 214) für n -gliedrige Stichproben mit bzw. ohne Zurücklegen die Simultan-Verteilung der Anzahlen x und y der E bzw. F behandelten, untersucht Verf. die entsprechenden Pascal-Verteilungen, d. h. die Simultan-Verteilung von x, y , wenn mit oder ohne Zurücklegen gezogen wird bis zum Auftreten des $(m+1)$ -ten $\bar{E}\bar{F}$. Mit Hilfe der Faktorielle-Momente-Erzeugenden $\mathcal{L}[(1+\alpha)^x(1+\beta)^y]$ werden alle Momente 1. und 2. Ordnung und die (lineare) Regression von y bez. x (et vice versa) bestimmt.

M. P. Geppert.

Zorua, P.: Über die Faltung von Histogrammen. *Trabajos Estadíst.* **9**, 159—182, engl. Zusammenfassg. 182 (1958) [Spanisch].

Ein Histogramm (Frequenz-Polygon) kann aufgefaßt werden als spezielle Dichtefunktion einer stetigen stochastischen Variablen, indem $f(x) = 0$ für $x < 0$ und $x \geq N$, resp. $f(x) = h_i$ für $i-1 \leq x < i$, $i = 1, 2, \dots, N$, $h_i \geq 0$, $\sum h_i = 1$. Sind n Zufallsvariable $x_1 \dots x_n$ gegeben mit der Summenvariablen $X = \sum x_i$, und existieren die Dichtefunktionen $f_i(x_i)$, so wird die Dichtefunktion von X bekanntlich geliefert durch das Faltungsintegral der $f_i(x_i)$. Im Falle von Histogrammen lassen sich die Dichtefunktionen durch Linearkombinationen ausdrücken der Art $f(x) = \sum_j h_j [x - a_j]^{n_j}$, $[x - a]^n = (x - a)^n$ für $x \geq a$, resp. $= 0$ für $x < a$. Verf. führt die Faltung formelmäßig durch, vorerst für zwei, dann allgemein für mehrere Histogramme. Es werden Beispiele für Histogramme speziell einfacher Art angeführt. Dann werden die Formeln auf n -dimensionale Histogramme verallgemeinert.

Das Problem kann praktische Bedeutung haben. Gegeben sei z. B. durch ein Histogramm die Frequenz der Körpergewichte einer Personenmenge. Gefragt wird nach der Gewichtsfrequenz von Vierergruppen, die wahllos der Gesamtmenge entnommen werden. Dieses und ein weiteres Beispiel werden numerisch behandelt.

H. Jecklin.

Biomathematik. Versicherungsmathematik. Wirtschaftsmathematik:

Hayashi, Chikio: Note on sampling from a sociometric pattern. Ann. Inst. statist. Math. 9, 49—52 (1957).

In einer Population von N Individuen sei durch $e_{ij} = 1$ oder 0 (mit i. a. $e_{ij} \neq e_{ji}$) eine gerichtete Beziehung aller $N(N-1)$ Individuenpaare gegeben. Wird eine n -gliedrige zufällige Stichprobe ohne Zurücklegen entnommen, so ist der aus den bei diesen n Individuen beobachteten $n(n-1)$ e -Werten x_{kl} ($k \neq l$; $k, l = 1, \dots, n$)

gebildete Mittelwert $\bar{x} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k \neq l}^n x_{kl}$ erwartungstreuer Schätzer des Popula-

tionsparameters $I = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j}^N \sum_j^N$, und $\text{var } \bar{x}$ ergibt sich als Funktion der Populationsparameter:

$$N_i = \sum_{j \neq i} e_{ij}, \quad M_i = \sum_{j \neq i} e_{ji}, \quad S_{ij} = \sum_{g \neq i, j} e_{ig} e_{jg}, \quad \delta_{ij} = \sum_{g \neq i, j} e_{ig} e_{gj}.$$

Ähnliches gilt, wenn die n -gliedrige Stichprobe alle $n(N-1)$ e -Werte x_{kl} ($k = 1, \dots, \dots, n$; $l = 1, \dots, N$; $l \neq k$) enthält, für den Schätzer $\bar{x} = \frac{1}{n(N-1)} \sum_{k=1}^n \sum_{l \neq k}^N x_{kl}$

Der Gedankengang wird ausgedehnt auf in zwei Teilpopulationen zerfallende Populationen von $N = N_A + N_B$ Individuen, für die 2 $N_A N_B$ Zahlenwerte $g_{i_A j_B}$ und $g_{j_B i_A}$, die 1 oder 0 betragen, gegeben sind. Die Populationsparameter

$$O_{AB} = \frac{1}{N_A N_B} \sum_{i_A=1}^{N_A} \sum_{j_B=1}^{N_B} g_{i_A j_B}, \quad O_{BA} = \frac{1}{N_A N_B} \sum_{j_B=1}^{N_B} \sum_{i_A=1}^{N_A} g_{j_B i_A}$$

werden erwartungstreu geschätzt durch die entsprechenden Maßzahlen geschichteter ($n = n_A + n_B$)-gliedriger zufälliger Stichproben ohne Zurücklegen. — Die Resultate finden offensichtliche Anwendung bei soziologischen Untersuchungen.

M. P. Geppert.

Hoffman, Paul J.: Generating variables with arbitrary properties. Psychometrika 24, 265—267 (1959).

There are occasions in psychological research where it is desirable to have available sets of variables with arbitrary intercorrelations. A quite simple procedure is described for generating pairs of such variables.

Zusammenfassung.

MacLean, Angus G.: Properties of the item score matrix. Psychometrika 23, 47—53 (1958).

Stellt man N Probanden ($s = 1, \dots, N$) n Aufgaben ($i = 1, \dots, n$), die nur Lösung oder Nicht-Lösung zulassen, so bilden die Resultate eine $N \times n$ -Matrix (item-score-Matrix) $(X) = (X_{si})$ mit $X_{si} = 1$ bzw. 0, wenn Proband s Aufgabe i löst bzw. nicht. Verf. zeigt, wie sich aus ihr durch geeignete Matrizenmultiplikationen und Additionen alle bei der statistischen Auswertung solcher Beobachtungen interessierenden Größen bestimmen lassen. Dies gilt sowohl bei ungewogener als auch bei gewogener additiver Zusammenfassung der n Noten X_{si} des Probanden s zu seiner

Gesamtnote: $X_{SW} = \sum_{i=1}^n w_i X_{si}$.

M. P. Geppert.

Tucker, Ledyard R.: Determination of parameters of a functional relation by factor analysis. Psychometrika 23, 19—23 (1958).

Sind die Variablen x, y durch eine funktionale Beziehung der Form

$$y_{ji} = \sum_{m=1}^r f_m(x_j) F_m(p_i) = \sum a_{jm} s_{mi}$$

verknüpft, wo p_i den Individuum i kennzeichnenden Parameterwert und y_{ji} den für Individuum i und $x = x_j$ beobachtbaren y -Wert bedeutet, so lassen sich durch Anwendung faktoren-analytischer Technik für jedes feste j aus den beobachteten y_{ji} -Werten die Größen a_{jm}, s_{mi} schätzen. Das Verfahren wird an einigen, einfache Exponentialfunktionen enthaltenden Beispielen aus der psychologischen Testpraxis erläutert.

M. P. Geppert.

Moran, P. A. P.: The effect of selection in a haploid genetic population. Proc. Cambridge philos. Soc. 54, 463—467 (1958).

The problem of selection for a haploid population is much easier than for a diploid population. It is dealt with here by means of a very suggestive model where non-overlapping generations are no longer assumed. Instead, at each change of state one individual dies and one is born. The model is that of a Markov process with continuous time parameter. The finite population consists of M_1 individuals of type a_1 , M_2 of type a_2 ; $M_1 + M_2 = M$. The life time T of each individual is independently distributed in distribution $\lambda_i e^{-\lambda_i T} dt$, $i = 1, 2$. Inequality of λ_1 and λ_2 allows to introduce selection, dependent on the genotype; the probability of more than one individual dying between t and $t + dt$ is $O(dt^2)$. The newly born individual is chosen at random from the population of M_i individuals of types a_i and there is a probability α_i of an a_i -individual mutating to the other type. Let $P_{M_i}(t)$ the probability that the population has M_1 a_1 -individuals at time t . Then, by considering the various possibilities a system of differential equations is derived for $M_1 = 0, 1, \dots, M$. From this the stationary-state probabilities P_{M_i} may be found. On the other hand, in the corresponding Markov chain time is replaced by the number of birth-death events that have occurred. The probability P'_{M_i} of the stationary state for the chain is proportional to the P_{M_i} for the continuous process; the limiting distributions are therefore the same. For large M the limiting distribution of $X = M_1/M$ is found; this probability has a density proportional to $e^{sX} X^{\beta_2-2} (1-X)^{\beta_1-1}$, $\beta_i = M\alpha_i$, $\lambda_2/\lambda_1 = 1 + s/M$. An other form of selection is also investigated.

H. Geiringer.

Moran, P. A. P.: The distribution of gene frequency in a bisexual diploid population. Proc. Cambridge philos. Soc. 54, 468—474 (1958).

Considered is a finite bisexual diploid population, N_1 males, N_2 females, $N_1 + N_2 = N$. Of the males k_1 are of type aa , l_1 of type AA , $N_1 - k_1 - l_1$ of type Aa and similarly for the females with k_2 of type aa , etc. Again the usual hypothesis of non overlapping generations is replaced by the model where at each of successive discrete intervals one of the N individuals dies at random and is immediately replaced by an individual of the same sex. There is a probability α of an a -gene mutating to A and β of an A -gene mutating to a . The α, β are supposed small; as N_1 and N_2 tend to infinity $\gamma = \alpha/N$ and $\delta = \beta/N$ are kept fixed. — Taking mutation into account we find first the probabilities of the newly born individual being aa, aA or AA , viz. $p(aa), p(aA), p(AA)$ (of either sex) in terms of the $N_i, \alpha, \beta, k_i, l_i$. The process is a Markov chain each state defined by the four integers k_i, l_i , $0 \leq k_i + l_i \leq N_i$, $i = 1, 2$. The transition matrix is too complicated. The author would like to find the distribution of $X_{it} = k_i/N_i$, $Y_{it} = l_i/N_i$. It is proved that $X_{1t} - X_{2t}$ converge in probability to zero as $N_1 \rightarrow \infty, N_2 \rightarrow \infty$. Finally, the distribution of the proportion, viz.

$$\frac{(N_1 - k_1 - l_1) + 2k_1}{2N_1} + \frac{(N_2 - k_2 - l_2) + 2k_2}{2N_2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{N_1}{N} (X_{1t} - Y_{1t}) + \frac{1}{2} \frac{N_2}{N} (X_{2t} - Y_{2t})$$

is indeed determined as $N_1 \rightarrow \infty, N_2 \rightarrow \infty$.

H. Geiringer.

Carrier, N. H.: A note on the measurement of digital preference in age recordings. *J. Inst. Actuaries* 85, 71—85 (1959).

Die Arbeit befaßt sich mit der Frage, ob bei einer Erhebung über die Altersverteilung in einer Bevölkerung gewisse Endziffern bei den Altersangaben (auf ganze Jahre gerundet) eine Bevorzugung erfahren und wie gegebenenfalls diese Erscheinung numerisch erfaßt werden kann. Wie läßt sich z. B. überprüfen — und zwar nur auf Grund der Altersangaben, d. h. ohne auf Geburtenregister und dgl. zurückzugreifen — ob und wie weit die Befragten dazu neigen, nicht ihr tatsächliches Alter, sondern ihr auf eine gerade Zahl gerundetes Alter anzugeben? Verf. bespricht und verfeinert ein bereits bekanntes Verfahren von Myers, das unter gewissen Annahmen auf diese und ähnliche Fragen Antwort erteilen soll; er unterläßt es jedoch nicht, auch auf die bestehenden grundsätzlichen Schwierigkeiten bei der allgemeinen Lösung der Aufgabe hinzuweisen.

E. Zwinggi.

● **Moran, P. A. P.:** The theory of storage. (Methuen's Monographs on Applied Probability and Statistics.) London: Methuen & Co., Ltd.; New York: John Wiley & Sons, Inc. 1959. 111 p. 13 s. 6 d. net.

Das vorliegende Werk entwickelt die analytische Theorie der Lagerhaltung auf wahrscheinlichkeitstheoretischer Grundlage, wobei zwischen zwei Hauptmodellen unterschieden wird. Beim ersten Hauptmodell sind die Lagerentnahmen stochastischer Natur, während die Lagerergänzungen nach einer deterministischen Regel erfolgen (Beispiel: Warenlager eines Verkaufsbetriebes). Beim zweiten Hauptmodell hat umgekehrt die Lagerzufuhr stochastischen Charakter, während die Entnahmen deterministisch erfolgen (Beispiel: Stausee eines Elektrizitätswerkes). Bemerkenswert ist die nahe Verwandtschaft der behandelten Fragestellungen mit Problemen aus der Wartezeit- und Erneuerungstheorie sowie mit dem Ruinproblem der kollektiven Risikotheorie im Versicherungswesen. Zu begrüßen ist, daß die wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen (erzeugende Funktionen, Markoffsche Ketten, Reihenkorrelation) in einem einleitenden Kapitel zusammengestellt sind, und daß in zwei Schlußkapiteln die praktische Anwendung der entwickelten Theorie durch Monte-Carlo-Methoden, sowie die Programmierung optimaler Lagerhaltungen behandelt werden. Die anschauliche Darstellung des Stoffes läßt das vorliegende Werk insbesondere als Einführung in das Gebiet der Lagerhaltungstheorie geeignet erscheinen.

H. Ammeter.

Frisch, Ragnar: A complete scheme for computing all direct and cross demand elasticities in a model with many sectors. *Econometrica* 27, 177—196 (1959).

Es zeigt sich immer deutlicher, daß in der mathematischen Sozialökonomie den Elastizitätskoeffizienten eine besonders wichtige, geradezu zentrale Bedeutung zukommt. Diese theoretisch wohldefinierten Größen zeigen an, wie sich die Nachfrage vergrößert bzw. einschränkt bei Veränderungen der Preise oder des Angebots anderer Produktionsgüter und vermitteln damit wertvolle Hinweise für deren bestmögliche Auswahl. Die vorliegende Abhandlung bringt auf engem Raum eine allgemeine Übersicht über die in der Literatur bekannt gewordenen Konstruktionen und insbesondere auch für die sie beherrschenden mathematischen Relationen. — Die Aufstellung eines derartigen eleganten Formelsystems kann indessen wohl nur gestützt auf gewisse Voraussetzungen gelingen, die in der Praxis jedenfalls nicht restlos erfüllt sind. So muß insbesondere weitgehende Unabhängigkeit im Verhalten der einzelnen Variablen zu den übrigen gefordert werden. Es scheint aber, daß diese unerläßlichen vereinfachenden Annahmen auf die praktische Bedeutung der Formeln nicht besonders restriktiv einzuwirken vermögen. Jedenfalls hat — wie gezeigt wird — die praktische Auswertung an Hand eines größeren statistischen Materials — soweit dies auf Grund der mitgeteilten Zahlen beurteilt werden kann — zu durchaus plausiblen Ergebnissen geführt. — Im Anhang werden noch einige Betrachtungen

über den Zusammenhang zwischen den Existenzvoraussetzungen des Nutzen-Indikators und den Integrabilitätsbedingungen der Marginalwerte der Nutzenfunktion angestellt. *P. Nolfi.*

Lévi, Robert: Dispositif mécanique résolvant certains problèmes de recherche opérationnelle. C. r. Acad. Sci., Paris 245, 2166—2168 (1957).

Gedanken, wie man das Transportproblem durch eine mechanische Analogievorrichtung näherungsweise lösen kann. *J. Heinhold.*

● **Vazsonyi, Andrew:** Scientific programming in business and industry. New York: John Wiley & Sons, Inc., London: Chapman & Hall, Ltd. 1958. XIX, 474 p. \$ 13,50.

„In terms of business“ werden zahlreiche Beispiele mathematischer Modelle für wirtschaftliche Zusammenhänge, insbesondere Allocation-Modelle, sowie die Regressionsanalyse und die Monte-Carlo-Methode in groben Zügen geschildert und Anleitungen für ihre praktische Anwendung gegeben. *D. Bierlein.*

Brennan, Michael J.: A model of seasonal inventories. *Econometrica* 27, 228—244 (1959).

Es wird ein Lagerhaltungsmodell (inventory model) konstruiert, das von gegebenen Marktverhältnissen ausgeht und jahreszeitliche Schwankungen in der Lagerzufuhr berücksichtigt, wie sie hauptsächlich bei landwirtschaftlichen Produktionsgütern naturgegeben auftreten. Dabei wird der Einfluß der Lagerhaltungspolitik auf die künftige Marktentwicklung berücksichtigt, was umgekehrt Voraussagen über die künftige Entwicklung erlaubt. Das Modell wird praktisch angewendet auf die Lagerbestände von Butter, Käse und Eiern in den Vereinigten Staaten in den Jahren 1926—1935 und 1947—1954. Die vorausberechneten und die wirklichen Lagerbestände stimmen nahe überein. *H. Ammeter.*

Rosenblatt, David: On linear models and the graphs of Minkowski-Leontief matrices. *Econometrica* 25, 325—338 (1957).

Verf. bezeichnet $A = \|a_{ij}\|$ mit $a_{ij} \geq 0$, $\sum_j a_{ij} \leq 1$ als Minkowski-Leontief-Matrix; er setzt also nicht voraus, daß $a_{kk} < 1$ (bzw. $= 0$) ist und läßt Reihensummen 1 zu. Verf. charakterisiert graphentheoretisch die Lösungen von $x(I - A) = w$, $w \geq 0$, und interpretiert seine Entwicklungen ökonomisch. Die zu A gehörige Boolesche Relationen-Matrix mit $r_{ij} = 1$, wenn $a_{ij} > 0$, bzw. $r_{ij} = 0$, wenn $a_{ij} = 0$, sei R_A . Verf. beweist, daß $(I - A)^{-1}$ dann und nur dann existiert, wenn in dem Graph $G(R_A)$ von R_A entweder keine geschlossenen zyklischen Netze enthalten sind oder wenn es in jedem solchen Netz H einen Punkt gibt, der einer Reihe k mit Reihensumme 1 entspricht. (Zyklische Netze, d. h. Untergraphen H von G , in denen jeder Punkt von jedem anderen durch einen Zug orientierter Punktepaare aus H „erreichbar“ ist, heißen geschlossen, wenn 1. jedes zyklische Netz von G Untergraph von H ist, 2. jeder von H aus erreichbare Punkt von G zu H gehört). Wenn alle Reihensummen gleich 1 sind, dann liegt eine finite stochastische Matrix A^* vor. Verf. zeigt u. a., daß der angeführte Satz auch ausgesprochen werden kann: Wenn A eine „proper principal submatrix“ von A^* ist, existiert $(I - A)^{-1}$ dann und nur dann, wenn kein in $G(R_A)$ geschlossenes zyklisches Netz auch in $G(R_{A^*})$ geschlossen ist. D. h. $(I - A)^{-1}$ existiert für jede „proper principal submatrix“ A von A^* , wenn $G(R_{A^*})$ ein zyklisches Netz ist. *H. Härten.*

Briggs, F. E. A.: On problems of estimation in Leontief models. *Econometrica* 25, 444—455 (1957).

Wenn in einem Leontief-Modell $Y = B \hat{y}$ ist, Y = Transaktions-Matrix, B = Matrix der technologischen Koeffizienten, \hat{y} und B Matrizen von zufälligen Variablen, $Y = (B + \bar{E}) \hat{y}$, oder wenn B und \hat{y} fest sind, $Y = B \hat{y} + \bar{E}$ oder $\bar{Y} = B \hat{y}$, dann sind die Maximum-Likelihood-Schätzwerte (ML-Schätzwerte) und die least-square-estimates (kl.-Qu.-Schätzwerte) äquivalent. Wenn nur B fest ist,

$Y = B\hat{y}$, dann ist das stochastische geschlossene Modell unvollständig und Schätzung nicht möglich, während bei dem offenen Modell die ML-Schätzwerte und die kl.-Qu.-Schätzwerte erheblich differieren, was Verf. an einem Beispiel zeigt. Die ML-Schätzwerte berechnet er dabei nach einem Verfahren, welches er in einer noch unveröffentlichten Arbeit entwickelte. Die kl.-Qu.-Schätzwerte zeigen Verzerrung (bias) und Unterschätzung der Varianz.
H. Härten.

McKenzie, Lionel: An elementary analysis of the Leontief system. *Econometrica* 25, 456—462 (1957).

Verf. beweist mit elementaren Mitteln 1. verschiedene notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß ein Leontief-System eine einzige nichtnegative Lösung hat, 2. ein Dualitätstheorem für nicht normalisierte Leontief-Matrizen, 3. das Effizienz-Theorem, 4. das Substitutions-Theorem von Samuelson für generalisierte Leontief-Modelle.
H. Härten.

Blau, Julian H.: The existence of social welfare functions. *Econometrica* 25, 302—313 (1957).

Der Satz von Arrow [vgl. Inada, *Econometrica* 23, 396—399 (1955)], daß keine soziale Wohlfahrtsfunktion seinen Bedingungen 1 bis 5 genüge, ist, wie Verf. an einfachen Beispielen zeigt, ebenso wie diverse Variationen dieses Satzes falsch. Ferner zeigt Verf., daß die "Unanimity Rule for Preference" (URP), die Inada als Folge der Arrow-Bedingungen 2 und 4 ansah, unabhängig von 1 bis 5 ist. Er verschärft die von ihm als Quasi-Monotonie-Bedingung bezeichnete Bedingung 2 zur Monotonie-Bedingung 2' und zeigt, daß URP eine bessere „Souveränitätsbedingung der Bürger“ ist als 4 (welche zu weit geht). Das Unmöglichkeitstheorem von Arrow gilt, wenn 2 durch 2', 4 durch URP ersetzt und 1 verschärft wird. Beweis in Anlehnung an Arrow in zwei Schritten: 1. Neutralitätsbeweis, 2. Additivitätsnachweis für nichtdiktatorische Personenmengen. Mit 5 (daß kein Individuum diktatorisch ist) folgt aus dem Additivitätsnachweis, daß die Gesellschaft nicht diktatorisch ist — im Widerspruch zu URP.
H. Härten.

Strotz, Robert H.: The empirical implications of an utility tree. *Econometrica* 25, 269—280 (1957).

Einem Vorschlag von Leontief entsprechend (dies. Zbl. 30, 171) betrachtet Verf. „separable Nutzensfunktionen“, die sich in Nutzensfunktionen $V^j(q_1, \dots, q_i)$ für jeden Warenzweig A, B, \dots zerlegen lassen.

$$U = U \{ V^A(q_{a_1}, \dots, q_{a_n}), V^B(q_{b_1}, \dots, q_{b_\beta}), \dots, V^M(q_{m_1}, \dots, q_{m_\mu}) \}.$$

Er zeigt u. a., daß für zwei Waren j' und j'' desselben Zweiges und eine Ware i eines anderen Zweiges $\frac{\partial q_{j'}}{\partial p_i} / \frac{\partial q_{j''}}{\partial p_i} = \frac{\partial q_{j'}}{\partial Y} / \frac{\partial q_{j''}}{\partial Y}$ gilt, p_i = Preis von i , Y = Gesamteinkommen. Weiter definiert er Preisindizes P_j für jeden Warenzweig J und zeigt, daß der für den Zweig J auszugebende Teil von Y nur von diesen Indizes abhängt, $Y^J = f(P_A, P_B, \dots, P_M)$.
H. Härten.

Nolli, P.: Spieltheoretische Betrachtungen zur Stummen Mora. *Elemente Math.* 12, 127—129 (1957).

Auf Grund psychologischer Erwägungen erscheint es dem Verf. als zweifelhaft, ob die gemischte Strategie $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ bei der Stummen Mora (Strategien: Zeigen einer geraden oder einer ungeraden Anzahl von Fingern) rein gefühlsmäßig — ohne Zuhilfenahme eines Zufallsmechanismus oder von Zufallszahlen — realisiert werden kann. Durch eine Modifikation der Auszahlungsfunktion wird die Stumme Mora zu einem gerechten Spiel abgewandelt, für das die optimalen Strategien für jeden der beiden Spieler darin bestehen, die Zahl der Finger mit gleicher Frequenz zu zeigen.

D. Bierlein.

Nieto de Alba, U.: Ausarbeitung eines biometrischen Modells, seine statistische Deutung und versicherungsmathematische Anwendungen. *Trabajos Estadíst.* 8, 41—55 u. engl. Zusammenfassg. 55 (1957) [Spanisch].

Die Arbeit gibt einen Beitrag zum stochastischen Aufbau der Mathematik der Lebensversicherung, wobei sie sich namentlich an Untersuchungen von H. L. Seal (dies. Zbl. 31, 374; 41, 469) anlehnt. Bekanntlich ist bei einer geschlossenen biologischen Gesamtheit vom ursprünglichen Umfang N bei nur einer Ausscheideursache — letztere als Wahrscheinlichkeit betrachtet — die Überlebenswahrscheinlichkeit für eine Individuenzahl $N - y$, $y = 0, 1, 2, \dots, N$, für jeden Zeitpunkt des Abbaus durch eine Binomialverteilung gegeben. Verf. betrachtet speziell ein Modell mit zwei voneinander unabhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten, wobei dann für die Überlebenswahrscheinlichkeiten bestimmter Elementenzahlen in jedem Zeitpunkt des Abbaus eine Trinomialverteilung resultiert. Die den kontinuierlichen Abbau repräsentierende Differentialgleichung wird aufgestellt und gelöst. Nach statistischer Interpretation des Modells wird gezeigt, daß es zur Anwendung für versicherungsmathematische Belange geeignet ist, wobei insbesondere die Invaliditätsversicherung beigezogen wird, durch Darstellung der Aktiven- und Invaliden-Gesamtheiten.

H. Jecklin.

Geometrie.

● Lietzmann, W.: Experimentelle Geometrie. Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1959. 111 S. mit 132 Fig. DM 12,60.

Experimental geometry, according to the author, is concerned with constructions which go beyond the euclidean constructions with ruler and compasses. This text is not a systematic survey of such constructions, but rather a rambling walk through the field of common and uncommon uses of familiar and unfamiliar instruments, with a great number of digressions and detours into neighbouring fields. A rough idea of the material treated may be gained from the following chapter-by-chapter selection. A. Ruler and compasses: Constructions with ruler and compasses, the parallel ruler, the ordinary ruler using both edges, the setsquare and simple linkages, the compasses alone, proportional and three-leg compasses, etc. B. Folding and reflecting: Constructions by paperfolding, symmetry, the mirror-ruler, the prism-derivator. C. Geometry with scissors: Congruence by superposition, parqueting, equivalence of areas by dissection, topological connection defined by cuts, Moebius bands. D. String geometry: Straight lines and geodesics obtained by taut strings, string constructions of ellipse, parabola and hyperbola (in the last case the author misses a little instrument sent to the reviewer by B. H. Neumann about 30 years ago which consisted of a doubled thread led through a fine bore near the point of a pencil, the two ends of the thread being attached to the foci), involutes, tractrix, catenary and knots (we learn that an ordinary knot in a horse-hair will produce an angle of 108° !). E. Measurements: Applications of counting (the Galton board and the binomial), measurement of lengths, angles, plane and curved areas (the area of a sphere is determined by winding a string round a nail at the north pole until the northern hemisphere is covered; half the length of string will cover a circular disk of the same radius), and volumes. F. Dynamik geometry: Centre of gravity, projectiles, solids formed by sand on variously shaped pieces of cardboard, sport (we learn to determine the direction in which a cyclist has travelled from the curves traced by the two wheels), waves, Lissajou's pendulum, minimal surfaces represented by soap films. — This survey will indicate the value of the book as a source of information and illustration which will enliven the teaching and stimulate the interest of students.

F. A. Behrend.

Grundlagen. Nichteuclidische Geometrie:

Rosati, Luigi Antonio: Sui piani desarguesiani affini „non-ciclici“. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 22, 443—449 (1957).

L'A. dice che un piano proiettivo (irriducibile) P è desarguesiano affine „non-ciclico“, di rango n , quando P è finito di rango n , è desarguesiano, e ammette un gruppo non-ciclico G di collineazioni, di ordine $n^2 - 1$, transitivo sugli $n^2 - 1$ punti di P non appartenenti a una data retta u (che si può fissare come retta „all'infinito“) e distinti da un dato punto U , non su u (U si può scegliere come „origine“). Era già noto [R. C. Bose, J. Indian math. Soc., n. Ser. 6, 1—15 (1942)] che per ogni piano desarguesiano finito P esiste un gruppo ciclico di collineazioni dotato della proprietà di cui sopra; la presente Nota non solo dimostra l'esistenza di piani „non-ciclici“ finiti, ma li determina tutti, dimostrando che: Esiste corrispondenza biunivoca tra i piani desarguesiani affini „non-ciclici“ di rango n e i quasicorpi (destri) associativi propri di ordine n^2 (l'A. li chiama „pseudo-corpi del Dickson“: si tratta degli endliche Fastkörper classificati da H. Zassenhaus nel 1935 — v. questo Zbl. 11, 103). Tale corrispondenza biunivoca si ottiene associando, innanzitutto, agli n^2 punti propri $\xi = (x_1, x_2)$ di un piano desarguesiano P di rango $n = p^t$ gli n^2 elementi $\xi = x_1 + \gamma x_2$ di un gruppo abeliano elementare K di ordine $n^2 = p^{2t}$; allora, dall'esistenza in P di un gruppo di collineazioni G non ciclico e transitivo su tutti i punti propri diversi dall'origine si deduce l'esistenza di un gruppo non ciclico G di automorfismi di K semplicemente transitivo sugli elementi non nulli; e viceversa (dove il Teorema, giacchè l'esistenza di un G siffatto per K è condizione necessaria e sufficiente per la costruzione di un quasicorpo associativo proprio, vale a dire diverso da un campo di Galois, di ordine n^2 : v. L. Lombardo-Radice, questo Zbl. 53, 108). L'A. dimostra inoltre che il gruppo non ciclico G di collineazioni di P (quando esista) è transitivo anche su tutte le rette proprie del piano, escluse quelle del fascio di centro U ; dimostra infine che le collineazioni di G sono tutte omografie (conservano i birapporti, oltre che gli allineamenti) quando e solo quando il quasicorpo K associato al piano ha per ordine n^2 il quadrato di un numero primo, oppure è tale che il suo centro è un campo di Galois di ordine n .

L. Lombardo-Radice.

Longo, Carmelo: Teorema di Desargues ed omologie speciali in un piano grafico proiettivo. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 24, 410—415 (1958).

Un piano proiettivo si chiami $(V, u; a_1, C_1)$ -argusiano se in esso il teorema di Desargues dei triangoli omologici è verificato per un particolare insieme di triangoli prospettivi, e precisamente per quelli che: (a) hanno un dato centro (di prospettività) V ; (b) hanno una coppia di vertici corrispondenti, A_1 e A'_1 , posti su di una data retta a_1 (passante per V); (c) il punto d'incontro della coppia $A_2 A_3, A'_2 A'_3$ è un dato punto C_1 di una data retta u , sulla quale si trova l'intersezione anche di una seconda coppia di lati corrispondenti. Un piano proiettivo si chiami poi (con Reinhold Baer) (V, u) -transitivo (e risp. (v, u) -transitivo) se ammette tutte le omologie di centro V e asse u (risp. tutte le omologie aventi centro sulla v e asse u). — Nella presente Nota l'A. enuncia (n. 2) e dimostra (nn. 3, 4), con considerazioni strettamente geometriche, e cioè senza introdurre „coordinate di Hall“, i seguenti due teoremi: Teor. 1; Dati 3 punti allineati e distinti U, V, W , dalle ipotesi che il piano sia nello stesso tempo (I) $(V, UV; a_1, C_1 \equiv U)$ -argusiano e (II) $(V, UV; a_2, C_2 \equiv W)$ -argusiano, discende che esso è addirittura (V, UV) -transitivo. Teor. 2. Se un piano è (V, UV) -transitivo ed inoltre è (III) $(U, UV; a_1, C_1 \equiv V)$ -argusiano, allora esso è addirittura (UV, UV) -transitivo. — Nei nn. 5, 6 l'A. fa vedere come dai suoi Teoremi, con l'intermediario delle coordinate di Hall e della „condizione di Reidemeister“ (che può sostituire la (II) nel Teor. 1), si ricavano teoremi noti

che charakterizzano i piani su sistemi cartesiani e su quasicorpi destri [G. Pickert, *Projektive Ebenen* (questo Zbl. 66, 387), pp. 98—101], e come i Teor. 1 e 2 possano essere a loro volta dedotti da questi ultimi, per via algebrico-geometrische.

L. Lombardo-Radice.

Pickert, Günter: *Gemeinsame Kennzeichnung zweier projektiver Ebenen der Ordnung 9.* Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 23, H. Hasse zum 60. Geburtstag, 69—74 (1959).

Es handelt sich um eine Vervollständigung der Resultate von T. G. Ostrom (vgl. dies. Zbl. 79, 363; 80, 139; 83, 360). Damit wird eine Kennzeichnung der projektiven Ebene über dem vollständigen Fastkörper (vgl. z. B. dies. Zbl. 61, 144) aus 9 Elementen und der dazu dualen Ebene gewonnen. Sie sind nämlich die einzigen nichtdesarguesschen projektiven Ebenen, die gewisse spezielle Bedingungen erfüllen. Daraus folgt noch eine notwendige und hinreichende Bedingung, wann eine projektive Ebene desarguessch ist.

K. Čulik.

● **Sommerville, D. M. Y.:** *The elements of non-euclidean geometry.* Unabridged and unaltered republ. of the first ed. 1914. New York: Dover Publications, Inc. 1958. XVI, 274 p. \$ 1,50.

Eine noch immer gute und interessante Einführung in die nichteuklidische Geometrie. Die verschiedenen Aspekte dieses Zweiges der Geometrie werden vom elementaren Standpunkt aus beleuchtet.

J. C. H. Gerretsen.

Neumann, M.: *Sur la représentation de Poincaré de la géométrie de Lobacevski.* Lucrările ști. Inst. Ped. Timișoara, Mat.-Fiz. 1958, 83—100, français. und russ. Zusammenfassg. 100—102 (1959) [Rumänisch].

Verf. entwickelt ausführlich die Poincarésche Darstellung der hyperbolischen nichteuklidischen Geometrie. Er leitet elementargeometrische Eigenschaften zweier Kreissysteme ab, dergleichen für ein System von Punkten einer Geraden. Es ergeben sich ferner drei Fälle von Dualität zwischen Inzidenz und Orthogonalität.

M. Zacharias.

Martynenko, V. S.: *Über die Fälle der Übereinstimmung eines hyperbolischen Winkels der Lobatschewskischen Ebene mit seinem euklidischen Wert im Beltrami-schen Modell:* Ukrain. mat. Žurn. 11, 109—110 (1959) [Russisch].

Verf. vergleicht im Kleinschen, von ihm nach Beltrami benannten Modell die Größe eines hyperbolischen Winkels mit der seines Bildes und geht besonders auf den Fall der Gleichheit ein. Die Hilfsmittel sind elementar.

H. Lenz.

Algebraische Geometrie:

● **Hauser, Wilhelm und Werner Burau:** *Integrale algebraischer Funktionen und ebene algebraische Kurven.* Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1958. 103 S. mit 18 Abb. im Text und 12 farbigen Tafeln. Halblein. DM 9,20.

Eine ganz einfache und ansprechende Einführung in die Theorie der algebraischen Kurven. Allerhand grundlegende Begriffe, wie Geschlecht, Kurvenzweig, Schnittpunktmultiplizität usw. kommen zur Sprache. Konkrete Beispiele machen die Darstellung lebendig. An Vorkenntnissen werden nur ganz elementare Tatsachen der Algebra und der Infinitesimalrechnung vorausgesetzt. Die Ausstattung ist sehr gut.

J. C. H. Gerretsen.

Marchionna Tibiletti, Cesarina: *Un complemento al teorema d'esistenza di Riemann.* Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett., Rend., Sci. mat. fis. chim. geol., Ser. A 92, 240—249 (1958).

Es sei eine beliebige n -blättrige Riemannsche Fläche vom Geschlechte p durch ihre Verzweigungspunkte und ihre Monodromiegruppe gegeben. Verf. konstruiert darauf Funktionen, für die die dadurch dargestellten Kurven im Fernpunkt der

y -Achse einen mehrfachen Punkt mit getrennten Tangenten und sonst nur noch gewöhnliche Doppelpunkte haben. Für jede Gradzahl $\nu \geq \max(n, 2p + 2)$ existiert eine solche Funktion.

O.-H. Keller.

Marchionna, Ermanno: *Problemi d'esistenza e costruzione delle funzioni algebriche di una o più variabili.* Rend. Sem. mat. fis. Milano **27**, 17—44 (1958).

Bericht über einen Vortrag vor dem mathematisch-physikalischem Seminar an der Technischen Hochschule Mailand. Verf. bespricht die Fragen der Existenz und der Konstruktion von algebraischen Funktionen einer oder mehrerer Veränderlicher auf Riemannianen mit gegebener Verzweigung; er gibt dabei keine neuen Ergebnisse, sondern einen Überblick über die Erkenntnisse, die er selbst, Chisini und andere in den letzten Jahren gewonnen haben. Sein Vortrag ist so gehalten, daß man auch ohne spezielle Vorkenntnisse ohne große Mühe in die wesentlichen Fragen eingeführt wird, daß aber auch der Kenner noch davon lernen kann. Er beginnt mit den Sätzen von Riemann und Hurwitz über die Existenz von algebraischen Funktionen einer Veränderlichen oder allgemeiner von Funktionen des allgemeinen Punktes einer algebraischen Kurve, wenn die Verzweigungspunkte und die Monodromiegruppe gegeben sind. Im Falle zweier Veränderlicher kann die Verzweigungskurve willkürlich gegeben werden, bei der Modromiegruppe jedoch sind gewisse Relationen zu beachten, die die Verzweigungskurve der Gruppe aufprägt. Er gibt dazu eine eingehende topologische Analyse. Er führt alles ausführlich an einigen Beispielen durch. Dann bespricht Verf. die Frage der Eindeutigkeit; dabei führt er den Leser durch geschickte Beispiele vorsichtig dazu, die Frage so einzuengen, daß sie nicht trivialerweise verneint werden muß. Er bestimmt weiter das Geschlecht einer mehrfach überdeckten Ebene. Schließlich gibt er noch rein algebraische Methoden, um an die Frage der Existenz unter Vermeidung topologischer Hilfsmittel heranzukommen. Ein ausführliches Literaturverzeichnis von 48 Seiten gibt dem Leser die Möglichkeit, sich einen vollständigen Überblick über die bisherigen Erkenntnisse in jeder Teilfrage zu verschaffen.

O.-H. Keller.

Gröbner, Wolfgang: *Über die Parameterdarstellungen algebraischer Mannigfaltigkeiten mittels Liescher Reihen.* Math. Nachr. **18**, H. L. Schmid-Gedächtnisband 360—375 (1958).

Verf. knüpft an an die Differentialformen, die er in seiner „Modernen algebraischen Geometrie“ (dies. Zbl. **33**, 127) S. 115 eingeführt hat. Es sei \mathfrak{p} ein Primideal, $(p_1, \dots, p_r): \Phi$ eine Primbasis. Das Gleichungssystem $\sum_k \frac{\partial p_i}{\partial x_k} u_k = 0$ hat $d + 1$ linear unabhängige Lösungssysteme ϑ_{jk} ($j = 0, \dots, d$). Mit diesen setzt er die Differentialoperatoren $D_j = \sum \vartheta_{jk} \partial / \partial x_k$ an. Alle Formen $p \in \mathfrak{p}$ und nur diese genügen den Kongruenzen $D_j p \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. Diese Operatoren bilden einen Lieschen Ring. Man kann nun die Basis so wählen, daß je zwei Basisoperatoren vertauschbar werden. — Es seien nun t_1, \dots, t_d komplexe Veränderliche, die als Parameter eingeführt werden sollen. Verf. wählt den Differentialoperator $D = \sum_{i=1}^d t_i D_i$ und die Lieschen Reihen $X_k = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{D^\nu}{\nu!} x_k$. Diese X_k als Funktionen der t_i bei festem x_i sind dann eine Parameterdarstellung der algebraischen Mannigfaltigkeit, die zu \mathfrak{p} gehört. Die t_i sind dabei abelsche Integrale. Die verschiedenen Reihenentwicklungen um die verschiedenen Punkte der Mannigfaltigkeit sind dann analytische Fortsetzungen voneinander. — Damit ist eine wichtige Querverbindung zwischen dem idealtheoretischen Aufbau der algebraischen Geometrie mit den älteren analytischen Methoden hergestellt. Wir dürfen auf weitreichende Folgerungen gespannt sein. Die allgemeine Theorie der Lieschen Reihen, auf die sich Verf. stützt, bringt er in einer anderen Arbeit (s. dies. Zbl. **86**, 69).

O.-H. Keller.

Stein, E.: A theorem on generalized Segre varieties. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 16, 281—285 (1958).

L'A. considère les variétés de Veronese $V_n^{(h)}, V_n^{(k)}$ représentant les hypersurfaces d'ordre h, k d'un S_n et la correspondance induite entre les points de ces variétés, deux points homologues correspondant à un même point de S_n . Les couples de points homologues sont représentés par les points d'une variété de Veronese correspondant aux surfaces d'ordre $h+k$ de S_n .
L. Godeaux.

Reeve, J. E.: A note on fractional intersection multiplicities. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 7, 167—184 (1958).

Es mögen C_1 und C_2 zwei algebraische Zweige auf einem algebraischen Zweig S einer Fläche darstellen, die alle denselben Ursprung O haben. Dabei ist O ein isolierter singulärer Punkt von S . Es wird vorausgesetzt, daß S in einem Raum mit n komplexen Dimensionen enthalten ist. Es seien K_1, K_2 und M bzw. die Durchschnitte von C_1, C_2 und S mit dem Rand S^{2n-1} einer $2n$ -Zelle, die O enthält. K_1 und K_2 sind dann 1-Zykeln auf einer 3-dimensionalen orientierbaren Mannigfaltigkeit M . Wenn nun K_1, K_2 und M feste Orientierungen haben und einer der beiden Zykeln K_1 und K_2 homolog Null im Bereich der rationalen Zahlen ist, dann ist die Windungszahl $Lk(K_1, K_2)_M$ von K_1 und K_2 eine wohlbestimmte rationale Zahl ξ . Unter der (gebrochenen) Schnittpunktmultiplizität $(C_1, C_2)_S$ von C_1 und C_2 auf S wird die Zahl $|\xi|$ verstanden. Verf. berechnet diese Zahl im Falle von zwei Erzeugenden eines Kegels (im Falle eines quadratischen Kegels ist diese Zahl $\frac{1}{2}$). Es wird auch die Umgebung der Spitze eines Kegels studiert, und es werden die lokalen Homologie- und Homotopiegruppen berechnet.
J. C. H. Gerretsen.

Guggenheimer, H.: An n -dimensional analogue of the Cremona-Clebsch theorem. Bull. Amer. math. Soc. 65, 113—116 (1959).

Es seien M und M' die Ausnahmemannigfaltigkeiten einer Cremona-Transformation zwischen zwei projektiven Räumen n -ter Dimension. Es sei $\tau_{(r)}(M)$ der größte gemeinsame Teiler der Gradzahl der r -dimensionalen Komponenten des Schnittes von M mit einem allgemeinen linearen $(k+1)$ -dimensionalen Raum. Dann sind die Bettischen Zahlen aller Dimensionen und die Torsionszahlen aller (reell) geraden Dimensionen einander gleich. Bei den ungeraden Dimensionszahlen $2r-1$ treten $\tau_{(r)}(M)$ und $\tau_{(r)}(M')$ als Torsionszahlen auf und können auch verschieden sein. Der Beweis geschieht mit Hilfe exakter Folgen im Sinne der homologischen Algebra.
O.-H. Keller.

Guggenheimer, Heinrich: Complementi e commenti ad un teorema di Beniamino Segre. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 25, 453—456 (1959).

Es sei V ein kompakter topologischer Raum, M ein Unterraum, H_r die r -te Homologiegruppe. Die Folge

$$\dots H_{r+1}(V) \xrightarrow{p} H_{r+1}(V-M) \xrightarrow{\partial} H_r(M) \xrightarrow{i} H_r(V) \dots$$

ist exakt. Aus ihr beweist und verallgemeinert Verf. mit den Mitteln der homologischen Algebra eine Reihe von Ergebnissen von B. Segre (dies. Zbl. 79, 148). Weiter beweist er die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von Cremona und Clebsch: Die Hauptflächen einer Cremona-Transformation im R_n und die der inversen haben die gleichen Bettischen Zahlen.
O.-H. Keller.

Bottema, O.: Eine Cremona-Transformation 5. Grades in der Ebene. Simon Stevin 32, 61—67 (1958) [Holländisch].

In einer Ebene sind vier Punkte A_1, A_2, A_3 und O gegeben. Durch die folgende Konstruktion wird einem Punkt P ein Punkt P' zugeordnet: Man betrachte den Kegelschnitt K , der durch A_1, A_2 und A_3 geht und in P die Gerade OP berührt. Dann ist P' der Berührungspunkt der zweiten Tangente aus O an K . Verf. beweist,

daß hiermit eine birationale Abbildung definiert ist, die mit Hilfe der Gleichungen $y_1:y_2:y_3 = x_1/(-x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2):x_2/(x_2 x_3 - x_3 x_1 + x_1 x_2):x_3/(x_2 x_3 + x_3 x_1 - x_1 x_2)$ dargestellt werden kann, wenn man $A_1 A_2 A_3$ als Koordinatendreieck wählt und O als Einheitspunkt. Die Abbildung wird ausführlich diskutiert. *J. C. H. Gerretsen.*

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

● **Willmore, T. J.:** *An introduction to differential geometry.* Oxford: At the Clarendon Press 1959. X, 317 p. 35 s. net.

Das Buch gibt eine hervorragende Einführung in die wesentlichen Gedankengänge, Methoden und Theorien der klassischen und neueren (reellen) Differentialgeometrie für Studierende mittlerer Semester. Der klassischen Differentialgeometrie ist der 1. Teil gewidmet, der sich mit der Kurven- und Flächentheorie des dreidimensionalen euklidischen Raumes befaßt. Insbesondere werden ausführlich die inneren (metrischen) Eigenschaften der Flächen, vor allem die Theorie der geodätischen Linien, anschließend die äußeren Krümmungseigenschaften und schließlich die globale Flächentheorie (besonders schön die Theorie der vollständigen Flächen) behandelt. Der 2. Teil ist der Differentialgeometrie des n -dimensionalen Raumes gewidmet. Auf der Grundlage der Theorie der Vektorräume, insbesondere des Tensorkalküls und des Cartanschen Kalküls der äußeren Differentialformen wird die Geometrie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten (Zusammenhang, kovariante Ableitung) entwickelt und ausführlich die n -dimensionale Riemannsche Geometrie dargestellt. Die Einsicht in diese Gegenstände wird durch vielseitige Beleuchtung verstärkt, z. B. durch die ausgezeichnete Darlegung des Cartanschen Standpunktes und durch einen Ausblick auf die globale Riemannsche Geometrie. Das Buch schließt ab mit der Anwendung der tensoriellen und alternierenden Methoden auf die Flächentheorie des dreidimensionalen euklidischen Raumes. — Das auch didaktisch vorzügliche Werk ist überall um wirkliches Verständnis der Studierenden bemüht und stellt wohl eines der besten für die Hand des Studenten bestimmten Lehrbücher der Differentialgeometrie dar. Unterstreichen muß man die ständige Bemühung des Verf. um ausreichende Strenge der Darstellung. Es wird überdies nur wenig aus der Analysis, insbesondere der Theorie der Differentialgleichungen vorausgesetzt. Manche Gegenstände sind deshalb in Anhänge verwiesen. Zahlreiche Beispiele erläutern den Gang der Theorie, und viele bemerkenswerte Aufgaben gestatten, das Verständnis der einzelnen Kapitel zu prüfen. Ausführliche Literaturangaben verweisen auf weiterführende Schriften und Bücher. Im ganzen ein vielseitiges, hervorragend geschriebenes und auch sachlich in jeder Hinsicht ausgezeichnetes Werk, das eine sehr gute Übersicht über die klassischen und neueren Gegenstände der Differentialgeometrie vermittelt.

K. Strubecker.

Bruijn, P. J.: *Ein Satz über Loxodromen.* Simon Stevin 32, 159—161 (1958) [Holländisch].

Verf. beweist den folgenden Satz über sphärische Loxodromen: Wenn $1/\tau$ die Torsion der Kurve in einem Punkte bezeichnet, dann ist die totale Torsion $\int (1/\tau) ds$, berechnet entlang der ganzen Kurve, gleich π (oder $-\pi$ je nach der Windung der Kurve). Diese Zahl ist unabhängig vom Kugelhalbmesser und von dem Winkel, unter dem die Kurve die Meridiane trifft. Ausgenommen sind die singulären Fälle der Meridiane und der Breitenkreise.

J. C. H. Gerretsen.

Kallenberg, G. W. M.: *Einige Verallgemeinerungen des Satzes von P. J. Bruijn über Loxodromen.* Simon Stevin 32, 162—169 (1958) [Holländisch].

Verf. behandelt das Problem der vorstehend besprochenen Note mit weniger elementaren Hilfsmitteln. Dabei kommen auch einige Verallgemeinerungen zum Vorschein. Es stellt sich heraus, daß das Ergebnis auch für andere Kurven auf der Kugel

gültig ist und daß man ein ähnliches Problem für Loxodromen auf einer eiförmigen Umdrehungsfläche behandeln kann.
J. C. H. Gerretsen.

Grauner, H.: Eine Verallgemeinerung des Problems der Cesàrokurven. *Math. Ann.* **138**, 27—41 (1959).

Im begleitenden Dreiein einer beliebigen Raumkurve gibt es stets gewisse Geraden, die bei Bewegung des Dreieins längs der Kurve Torsen beschreiben. Cesàro fragte nach jenen Raumkurven, bei denen abgesehen von diesen Geraden noch andere im begleitenden Dreiein befestigte Geraden existieren, die gleichfalls Torsen erzeugen. Diese „Cesàro-Kurven“ sind im wesentlichen dadurch gekennzeichnet, daß zwischen ihrer Krümmung und Torsion eine quadratische Gleichung mit konstanten Koeffizienten und verschwindendem absoluten Glied besteht. Verf. erweitert diese Fragestellung auf in gleicher Weise erzeugte Strahlflächen von konstantem Drall. Er gelangt so im wesentlichen zur gleichen Kurvenklasse und gibt auch eine sorgfältige Diskussion der Fälle, in denen keine solchen zusätzlichen Geraden im begleitenden Dreiein existieren. Es sei bemerkt, daß der quadratische Strahlkomplex aller im bewegten Dreiein festen Geraden, die im Augenblick Strahlflächen gleichen Dralls beschreiben, für einen allgemeinen zwangsläufigen Bewegungsvorgang vom Ref. (vgl. dies. Zbl. **41**, 290) untersucht, als Bahntangentenkomplex einer Schraubung gedeutet und als Grenzfall eines tetraedralen Komplexes, genauer als Komplex der Segreschen Charakteristik $[(2, 2), (1, 1)]$ gekennzeichnet wurde.
H. R. Müller.

Fréchet, Maurice: Détermination des surfaces minima du type $a(x) + b(y) = c(z)$. *C. r. Acad. Sci. Paris* **244**, 145—147 (1957).

Verf. gibt eine Übersicht über alle Minimalflächen $\mathfrak{x} = \{x, y, z\}$, die sich in der Form $c(z) = a(x) + b(y)$ darstellen lassen. Alle auftretenden Typen lassen sich angeben mit Hilfe elementarer und elliptischer Funktionen.

K. P. Grottemeyer.

Fréchet, Maurice: Détermination des surfaces minima du type $a(x) + b(y) = c(z)$. *Rend. Circ. mat. Palermo*, II. Ser. **5**, 238—259 (1957).

Verf. liefert in dieser Arbeit, die mit einer Zusammenfassung in Esperanto versehen ist, die Beweise für die in der vorstehend referierten Note angegebene Übersicht. Durch ein formales Verfahren gelingt es Verf., die angegebene Funktionalgleichung für die Komponenten des Ortsvektors durch elementare Prozesse und Quadraturen zu lösen.

K. P. Grottemeyer.

Nitsche, Johannes C. C.: A uniqueness theorem of Bernstein's type for minimal surfaces in cylindrical coordinates. *J. Math. Mech.* **6**, 859—864 (1957).

Als Gegenstück zum Bernsteinschen Satz, wonach die Ebenen die einzigen Minimalflächen der Klasse C^2 sind, die auf der ganzen (x, y) -Ebene eine einwertige Projektion besitzen, beweist Verf. einen interessanten Satz, der die Katenoide in ähnlicher Weise kennzeichnet: Es sei eine Minimalfläche vorgelegt, die eine Darstellung $\mathfrak{x} = \{r(z, \varphi) \cos \varphi; r(z, \varphi) \sin \varphi; z\}$ in Zylinderkoordinaten besitzt. $r(z, \varphi) = r(z, \varphi + 2\pi)$ und r gehöre für alle (z, φ) zur Klasse C^2 . Sind dann alle Schnitte der Minimalfläche mit den Ebenen $z = \text{const.}$ konvex, dann ist die Minimalfläche notwendig ein Katenoid.

K. P. Grottemeyer.

Rembs, E.: Flächen mit demselben sphärischen Bild. *Monatsh. Math.* **63**, 209—213 (1959).

Während Verf. in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **81**, 380) nachwies, daß zwei durch parallele Normalen aufeinander bezogene Flächen mit in entsprechenden Punkten übereinstimmender Summe der Hauptkrümmungsradien in enger Beziehung zu den infinitesimalen Verbiegungen der Einheitskugel stehen, und diese Tatsache zum Beweis von Eindeutigkeitssätzen verwandte, wird in der vorliegenden Arbeit der Fall von zwei Flächen mit (entsprechend) übereinstimmender Gaußscher Krüm-

mung mit der Theorie der infinitesimalen Verbiegung in Zusammenhang gebracht. Im einzelnen wird gezeigt: Stimmen für zwei durch parallele Normalen aufeinander bezogene, dreimal stetig differenzierbare Flächen $\mathfrak{x}(u, v)$ und $\mathfrak{z}(u, v)$ des dreidimensionalen euklidischen Raums die Gaußschen Krümmungen in entsprechenden Punkten überein und ist die „Summenfläche“ $\mathfrak{y}(u, v) = \mathfrak{x}(u, v) + \mathfrak{z}(u, v)$ überall regulär, so ist die „Differenzfläche“ $\mathfrak{y}(u, v) = \mathfrak{x}(u, v) - \mathfrak{z}(u, v)$ der Drehriß bei einer infinitesimalen Verbiegung der Summenfläche. Wegen der Unverbiegbarkeit einer Eifläche läßt sich damit der bekannte, von Minkowski herrührende Satz über die (bis auf eine Translation) eindeutige Bestimmtheit einer Eifläche durch die Vorgabe ihrer Gaußschen Krümmung als Funktion der Normalenrichtung folgern; ebenso gibt Verf. entsprechende Resultate für berandete Flächenstücke an. *K. Leichtweiß.*

Rembs, Eduard: Infinitesimale Verbiegungen von Flächen in sich. *Math. Nachr.* **16**, 134—136 (1957).

Ist $\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{x} + t \mathfrak{z}$ eine infinitesimale Verbiegung der Fläche \mathfrak{x} , so gelten für die Größen $a = (\mathfrak{x}_u \mathfrak{z})$, $b = (\mathfrak{x}_v \mathfrak{z})$, $c = (\mathfrak{z} \mathfrak{z})$ die Differentialgleichungen

$$(1) \quad a_u = L_1(a, b, c), \quad b_v = L_2(a, b, c), \quad a_v + b_u = L_3(a, b, c),$$

wobei die L_i lineare Ausdrücke in den a, b, c darstellen. Handelt es sich um infinitesimale Verbiegungen von \mathfrak{x} in sich, so darf \mathfrak{z} keine Komponente in Richtung ξ haben; d. h. $c \equiv 0$ auf \mathfrak{x} . Verf. zeigt zunächst: Wenn es eine nichttriviale Lösung von (1) gibt, für die $c \equiv 0$ ist, dann ist \mathfrak{x} einer Rotationsfläche isometrisch. Weiter betrachtet Verf. dann ein solches Flächenstück, auf dem kein Punkt liegen soll, welcher einem Pol der isometrischen Rotationsfläche entspricht und beweist: Wenn am Rande $a = 0$ und $c = 0$ ist, dann gilt $a = 0$, $c = 0$ im ganzen Inneren. Zum Schluß wird bemerkt, daß man für Flächenstücke, die isometrisch einer Kugelkalotte sind, ohne die Voraussetzung $a = 0$ am Rande auskommen kann.

K. P. Grottemeyer.

Sun, Ché-shén (Khe-shen): Some problems on the infinitesimal deformation of surfaces. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **122**, 559—561 (1958) [Russisch].

As a sequel to a previous paper (this Zbl. **81**, 156) of the author, several theorems concerning the rigidity and applicability of an ovaloid are demonstrated in the cases of homogeneous and non-homogeneous bushing linkages (as to the definitions and notations see the paper above quoted). The following two are typical: 1. Let S be an ovaloid with a simple contour L . If L is not a circle, then in the case of the bushing linkages (1) $U \vec{v} = 0$ on L , with $\tau \not\equiv 0, \frac{1}{2}\pi$ and $\sin(\theta - \tau) \not\equiv 0$ (on L), the surface S always admits at least three non-trivial deformations. 2. If S is rigid in the case of homogeneous bushing linkages (1), then in the case of non-homogeneous bushing linkages (2) $U \vec{v} = \gamma$ on L , S will admit non-trivial infinitesimal deformations if and only if the function γ satisfies l^* integral conditions, where I. $l^* = 3m - 3$ for $m > 1$; II. $l^* = 2$ for $m = 1$, $\tau \equiv \frac{1}{2}\pi$ and parallel plane contours; III. $l^* = 1$ for $m = 1$, $\tau \not\equiv \frac{1}{2}\pi$ and parallel plane contours or $m = 0$, $\tau \equiv \frac{1}{2}\pi$. When $m = 0$, $\tau \not\equiv \frac{1}{2}\pi$ or $m = 1$ and the plane contours are not parallel, the ovaloid always admits infinitesimal deformations in the case of non-homogeneous bushing linkages (2) with an arbitrary right part. In the remaining part of the paper the author also derives some results for non-convex but closed surfaces of revolution.

Su Buchin.

Chern, Shiing-shen: A proof of the uniqueness of Minkowski's problem for convex surfaces. *Amer. J. Math.* **79**, 949—950 (1957).

Verf. liefert mit Hilfe einer Integralformel einen einfachen Beweis des bekannten Eindeutigkeitssatzes für das Minkowski-Problem. Besitzen zwei Eiflächen der Klasse C^2 , die durch parallele Normalen aufeinander abgebildet sind, in entsprechenden Punkten die gleiche Gaußsche Krümmung, so sind sie translationsgleich.

K. P. Grottemeyer.

Löbell, Frank: Zusammenhänge zwischen Vektoranalysis und Krümmungstheorie der Kurvenkongruenzen. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1958, 73—79 (1959).

Given a curve congruence Γ in an ordinary space; let e be the unit tangent vector field of curves of Γ , such that $e = \partial\tau/\partial\sigma$, where τ denotes the radius vector of a point and σ the curve-length of the field line. If we define two scalar functions $A = \frac{1}{2}(\mathfrak{U}_1 \partial e/\partial S_2 - \mathfrak{U}_2 \partial e/\partial S_1)$, $B = \frac{1}{2}(\mathfrak{U}_1 \partial e/\partial S_1 + \mathfrak{U}_2 \partial e/\partial S_2)$, where $\mathfrak{U}_1 = \partial\tau/\partial S_1$ and $\mathfrak{U}_2 = \partial\tau/\partial S_2$ are two fields of mutually orthogonal unit vectors which are perpendicular to e , then $\operatorname{div} e = 2B$, $\operatorname{rot} e = k\mathfrak{B} - 2Ae$, where k denotes the curvature of the congruence curve and \mathfrak{B} the binormal vector. The author newly derives these two formulae of Emde and by the help of them applies the well known integral theorems of Gauss and Stokes to the congruence. Thus certain relations between vector-analytical properties of a vector field and geometrical properties of the congruence of its field curves are obtained.
Su Buchin.

Schwarz, Ernst: Über Geflechte kongruenter Flächen. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München. 1958, 81—109 (1959).

H. Graf [S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1928, 205—245 (1928)] untersuchte die allgemeinsten (gewissen Eindeutigkeits- und Stetigkeitsbedingungen genügenden) Abbildungen ebener Bereiche auf einander, bei denen die Bilder aller Scharen von parallelen Geraden des einen Bereiches jeweils aus Kurven des Bildbereiches bestehen, die durch Parallelverschiebung in einer festen Richtung aus einander hervorgehen. Im Gegensatz zu diesen „Kurvensystemen“ werden die Bildkurven sämtlicher Geraden des Ausgangsbereichs als „Kurvengeflecht“ bezeichnet. — Verf. erweitert unter Verwendung der gleichen Methoden (Zurückführung auf Funktionalgleichungen und Lösung derselben) diese Untersuchungen auf den dreidimensionalen Raum, wobei an die Stelle der Kurvensysteme und Kurvengeflechte „ein- bzw. zweiparametrische Flächensysteme“ (als parallel verschiebbare Bilder von Ebenen, die zu einer festen Ebene bzw. Geraden des Ausgangsbereichs parallel sind), und „Flächengeflechte“ (als Bilder sämtlicher Ebenen des Ausgangsbereichs) treten. Es werden erst die allgemeinsten Flächengeflechte ermittelt, bei denen alle einparametrischen Flächensysteme Parallelverschiebungen in der gleichen festen Richtung zulassen. Unter diesen Geflechten werden dann diejenigen ausgesucht, die auch ein zweiparametrisches Flächensystem kongruenter und parallelgestellter Flächen enthalten. Schließlich nimmt Verf. noch die Forderung hinzu, daß diese Geflechte aus lauter kongruenten und parallelgestellten Flächen bestehen sollen.
H. R. Müller.

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Lerda, P. Attilio: Invarianti proiettivi di due elementi curvilinei spaziali di ordini due e quattro. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 14. 28—36 (1959).

Un E_2 e un E_4 possiedono 3 invarianti, uno dei quali è l'invariante di un E_2 e un E_3 già considerato dal Bompiani (questo Zbl. 13, 320): utilizzando, come il Bompiani, opportune cubiche sghembe e quadriche determinate dagli elementi considerati, l'A. interpreta i 3 invarianti in forma di birapporti.
P. Buzano.

Arghiriade, E.: Réseaux et congruences d'ordre supérieur. Acad. Republ. popul. Romine, Studii Cerc. mat. 9, 7—111, russ. und französ. Zusammenfassg. 102—111 (1958) [Rumänisch].

L'A. étudie les réseaux (x) définis par une équation aux dérivées partielles de la forme

$$(*) \quad \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q a_{ij} x^{ij} = 0, \quad \left(x^{ij} = \frac{\partial^{i+j} x}{\partial u^i \partial v^j}, \quad a_{ij} = a_{ij}(u, v), \quad a_{pq} \neq 0 \right)$$

qu'il appelle équation généralisée de Laplace d'ordre (p, q) . Ces réseaux généralisés

d'ordre (p, q) contiennent comme cas particuliers les réseaux classiques et les doubles systèmes conjugués d'espèce p étudiés par E. Bompiani [Rend. Circ. mat. Palermo, I. Ser. 46, 91—104 (1922)] et B. Segre [Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 44, 153—212 (1929)]. En considérant la matrice des points

$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} x^{00} & \dots & x^{0q} \\ x^{10} & \dots & x^{1q} \\ \dots & \dots & \dots \\ x^{p0} & \dots & x^{pq} \end{pmatrix}$$

on admet d'abord ce que l'A. appelle l'hypothèse réduite: les points de la matrice Σ_0 , à l'exception de x^{pq} , sont linéairement indépendants. Dans ce cas, les points de Σ_0 déterminent un espace linéaire, noté aussi Σ_0 , de dimension $pq + p + q - 1$ et qui est appelé l'espace laplacien fondamental du réseau défini par (*). On introduit ensuite le premier espace laplacien Σ_1^u , pris dans le sens de u et le premier espace laplacien Σ_1^v , pris dans le sens de v , qui sont les espaces linéaires définis par les points restants de Σ_0 après la suppression respectivement de sa dernière ligne ou de sa dernière colonne. À l'aide de l'espace Σ_1^u et par un procédé de C. Segre [Rend. Circ. mat. Palermo, I. Ser. 30, 87—121, 346—348 (1910)], on définit la suite des espaces laplaciens, dans le sens de u

$$(\Sigma_1^u, \Sigma_2^u, \dots, \Sigma_{p+1}^u) (\Sigma_{p+2}^u, \Sigma_{p+3}^u, \dots, \Sigma_{2p}^u),$$

chaque espace de cette suite étant l'espace singulier de l'espace précédent, pris dans le sens de u . Les espaces de cette suite sont appelés principaux (ceux de la première parenthèse) ou secondaires (ceux de la seconde parenthèse). Les espaces principaux existent toujours et d'un espace principal à celui qui le suit, la dimension diminue de q unités. Les espaces secondaires existent seulement si certaines conditions sont remplies. Des considérations semblables peuvent être faites en partant de l'espace Σ_1^v . La suite des espaces laplaciens dans le sens de u (ou de v) peut être singulière (elle contient alors deux espaces consécutifs de même dimension) ou non singulière (lorsqu'elle n'a pas la propriété précédente). Une suite non singulière est dite normale si les dimensions des espaces de la suite sont en progression arithmétique décroissante et un réseau d'ordre (p, q) est appelé normal si les suites des espaces laplaciens dans le sens de u et de v sont normales. De même, on appelle réseau S dans le sens de u (ou de v) tout réseau d'ordre (p, q) pour le quel les dimensions des espaces secondaires diminuent constamment d'une unité, ce qui arrive par exemple pour certains réseaux $(p, 1)$ et $(1, q)$ de Bompiani-Segre. L'A. étudie en détail les réseaux S et une classe particulière S_0 de réseaux S . On introduit ensuite ce que l'A. appelle l'hypothèse élargie dans le sens de u (ou de v): les points d'une certaine matrice sont linéairement indépendants. Pour les réseaux S dans le sens de u , d'ordre (p, q) , vérifiant l'hypothèse élargie dans le sens de u , l'A. met en évidence certaines propriétés géométriques, d'où l'on déduit des conséquences concernant l'intégration de l'équation (*) et de l'équation vérifiée par le dernier espace laplacien $x_1 = \Sigma_{2p}^u$ du réseau (x) . Si (x) est un réseau S dans le sens de u , d'ordre (p, q) , non particularisé (satisfaisant à une certaine condition d'inégalité) et si $x_1 = \Sigma_{2p}^u$ est son dernier espace laplacien, l'A. démontre que les points x et x_1 vérifient le système d'équations aux dérivées partielles de la forme

$$x^{0q} = \sum_{j=0}^{q-1} e_{00j} x^{0j} + \sum_{j=0}^{p-1} d_{j0} x_1^{j0}, \quad x_1^{p0} = \sum_{j=0}^{p-1} \varepsilon_{0j0} x_1^{j0} + \sum_{j=0}^{q-1} \delta_{0j} x^{0j}.$$

Dans ce cas, l'A. dit que la droite $x x_1$ décrit une congruence généralisée d'ordre (p, q) , dont x et x_1 sont les foyers et il étudie ces congruences. À la fin, on fait une application en considérant le type le plus simple des réseaux (p, q) qui ne sont pas des réseaux de Bompiani-Segre; ce sont les réseaux d'ordre $(2, 2)$. J. Elianu.

Arghiriade, E.: Réseaux et congruences du troisième ordre. Lucrările ști. Inst. Ped. Timișoara, Mat.-Fiz. 1958, 41—53, französ. und russ. Zusammenfassg. 53—54 (1959) [Rumänisch].

Les courbes u, v d'une surface S dans un espace projectif S_n forment un réseau du 3-ème ordre si le point $x(u, v)$ de la surface vérifie une equation $E = 0$ linéaire, homogène à dérivées partielles du 3-ème ordre. Dans le présent article un étudié deux cas: quand une seule des familles u et v , ou les deux sont composées de caractéristiques simples. Dans le premier cas on forme une suite d'espaces laplaciens, chaque espace étant l'espace singulier du précédent, suite qui se termine avec un S_1 . Si S_1 admet à son tour un espace singulier $S_0 \equiv x_1$ et si x_1 est stationnaire, l'équation $E = 0$ est réductible. Dans le cas contraire x_1 vérifie une equation $E_1 = 0$ dont l'intégration est équivalente à celle de $E = 0$. La même méthode est aussi employée dans le second cas.

Gh. Th. Gheorghiu.

Mayer, O.: Remarques sur les systèmes triplement conjugués. An. ști. Univ. Al. I. Cuza. Iași, n. Ser., Sect. I 3, 183—194, russ. und französ. Zusammenfassg. 194—195 (1957) [Rumänisch].

Dans un P_n projectif ($n \geq 3$), un système 3-conjugué ponctuel (p) $x = x(u^1, u^2, u^3)$ (x coordonnées homogènes dans P_n , rang $\|x, \partial_1 x, \partial_2 x, \partial_3 x\| = 4$) vérifie un système différentiel de la forme $\partial_{ij} x = a_i x + b_i \partial_j x + c_i \partial_k x$ (i, j, k permutations circulaires de 1, 2, 3). Un système 3-conjugué de droites (D) (plans (π)) est une variété décrite par les tangentes (plans tangents) d'un système 3-conjugué ponctuel avec la structure induite par celui-ci. (Darboux, Guichard). L'A. donne des conditions suffisantes afin qu'une variété de droites ou plans munie d'un système de coordonnées u^1, u^2, u^3 , soit un système 3-conjugué. P. ex., soit un complexe de plans ξ , déterminés par les points z_1, z_2, z_3 ; si ces points dépendent des paramètres u^1, u^2, u^3 , de manière que $z_i(u^i = \text{const}, u^j = \text{const})$ soient des courbes dont les tangentes passent par z_k , alors (u^1, u^2, u^3) est un système 3-conjugué, dont des foyers sont z_i . On donne aussi de telles conditions pour la relation d'incidence entre systèmes 3-conjugués. Un système 3-conjugué ponctuel (de plans) et un autre de droites en correspondance par égalité des paramètres, sont incidents, si les éléments correspondants sont incidents. Un système (p) et un autre (π) sont incidents si les tangentes au premier contiennent les foyers homologues de l'autre. Le problème (p, D) : étant donné un système ponctuel, trouver les systèmes incidents de droites, a, en general, des solutions dépendant de 3 fonctions arbitraires d'un argument (sauf si le système (p) contient une famille de plans et que les droites de (D) se trouvent dans ces plans; dans ce cas il y a des solutions dépendant d'une fonction arbitraire de deux arguments). Les problèmes analogues (D, π) , (π, p) se ramènent au précédent. Enfin, 6 théorèmes du type suivant: Deux systèmes (D) (D') proprement incidents avec (p) , sont aussi incidents avec un (π) .

M. Haimovici.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Goetz, A.: Invariante Riemannsche Metriken in homogenen Räumen. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 475—478 (1957).

Let the Lie group G act transitively on a manifold M . A Riemannian metric on M is invariant with respect to G if each operator of G leaves scalar products of tangent vectors to M unchanged. It is proved that M admits such an invariant metric if and only if there is a bounded neighborhood $U \ni 0$ in the Lie algebra of G such that $\text{ad}(H_{P_0})U \subset U$, where H_{P_0} is the isotropy subgroup of some point $P_0 \in M$ and ad is the adjoint representation.

T. Ganea.

Toponogov, V. A.: Riemannian spaces having their curvature bounded below by a positive number. Doklady Akad. Nauk SSSR 120, 719—721 (1958) [Russisch].

Verf. bezeichnet mit R_k^m m -dimensionale metrische Räume, deren Flächenkrümmung nicht kleiner als k ist. Es interessieren hauptsächlich die Fälle mit $k > 0$. Die Sätze, die Verf. über diese R_k^m beweist, betreffen Abschätzungen über die Winkel und Seitenlängen geodätischer Dreiecke (kurz Dreiecke genannt). Es wird gezeigt: 1. In R_k^m ist die Summe der Seiten eines Dreiecks nie $> 2\pi/\sqrt{k}$ und $= 2\pi/\sqrt{k}$ nur in dem trivialen Fall, daß alle Winkel $= \pi$ sind und das Dreieck aus einer geschlossenen geodätischen Linie besteht. 2. π/\sqrt{k} ist eine Längenschranke der Geodätischen in R_k^m ; wird sie erreicht, so ist R_k^m eine Sphäre vom Radius $1/\sqrt{k}$. 3. Wenn es in R_k^m ein Dreieck gibt, bei dem die Summe der Seitenlängen $= 2\pi/\sqrt{k}$ ist, so muß R_k^m gleichfalls die Sphäre vom Radius $1/\sqrt{k}$ sein. *W. Burau.*

Eisenhart, Luther P.: The Ricci principal direction vectors. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **45**, 1028—1031 (1959).

Verf. leitet eine Bedingung dafür ab, daß in einem Riemannschen Raum V_3 das Dreiein von Ricci-Hauptrichtungen eindeutig bestimmt ist. Im zweiten Teil der Arbeit gibt er eine hinreichende Bedingung dafür an, daß alle Kongruenzen der Ricci-Hauptrichtungen V_{n-1} -normal sind. Diese Bedingung lautet folgendermaßen

$$\nabla_\mu R_{\lambda\nu} = \frac{1}{2} \{g_{\mu\nu} \partial_\lambda R + g_{\mu\lambda} \partial_\nu R\},$$

wobei $g_{\lambda\mu}$ den Fundamentaltensor des Raumes V_n , $R_{\lambda\mu}$ den Ricci-Tensor, $R = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\nu}$, $\partial_\lambda R = \partial R / \partial x_\lambda$ und endlich ∇_μ die kovariante Ableitung (in bezug auf $g_{\lambda\nu}$) bedeutet.

S. Golab.

Yano, Kentaro: Harmonic and Killing tensor fields in Riemannian spaces with boundary. *J. math. Soc. Japan* **10**, 430—437 (1958).

Soit V_n une variété riemannienne de classe C^r ($r \geq 2$) et M une sousvariété ouverte de V_n , ayant la fermeture compacte et ayant pour frontière une variété B à $n-1$ dimensions de classe C^r . Soient $K_{\nu\mu\lambda k}$ et $K_{\mu\lambda}$ les tenseurs de courbure de Riemann et de Ricci de V_n et considérons la forme quadratique $F(v, v)$, définie, dans l'espace des tenseurs d'ordre p symétriques gauches, par la formule

$$F(v, v) = K_{\mu\lambda} v^{\mu\lambda_1 \dots \lambda_p} v^{\lambda\lambda_1 \dots \lambda_p} + \frac{1}{2}(p-1) K_{\nu\mu\lambda k} v^{\nu\mu\lambda_1 \dots \lambda_p} v^{\lambda k\lambda_1 \dots \lambda_p}.$$

L'A. démontre plusieurs théorèmes sur les tenseurs harmoniques de M , dont nous citerons: I. Si la forme $F(v, v)$ est définie positive (négative) et si la seconde forme fondamentale de B est nonpositive (nonnégative), alors tout tenseur harmonique (de Killing) d'ordre p ($1 \leq p \leq n-1$), tangent à B , est identiquement nul. II. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un tenseur symétrique gauche $v^{\lambda_1 \dots \lambda_p}$, tangent à B , soit harmonique, est qu'on ait

$$g^{\mu\lambda} \nabla_\mu \nabla_\lambda v^{k_1 \dots k_p} - \sum_{i=1}^p K_{\lambda}^{k_i} v^{k_1 \dots \lambda \dots k_p} - \sum_{j < i}^{1, \dots, p} K^{k_j k_i}{}_{\mu\nu} v^{k_1 \dots \mu \dots \lambda \dots k_p} = 0$$

dans M et $\nabla_{[\mu} v_{\lambda_1 \dots \lambda_p]} v^{\mu\lambda_1 \dots \lambda_p} N^\lambda = 0$ sur B , N^λ étant le vecteur normal à B . III. Si le tenseur v est normal à B , on doit remplacer la dernière condition, pour obtenir l'harmonicité, par $(\Delta_\lambda v^{\lambda_1 \dots \lambda_p}) v^{\mu\lambda_1 \dots \lambda_p} N_\mu = 0$ sur B . *C. Teleman.*

Sasaki, Shigeo: On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds. *Tohoku math. J., II. Ser.* **10**, 338—354 (1958).

Soit M^n une variété différentiable à n dimensions et $T(M^n)$ l'espace fibré des vecteurs tangents à M^n , avec la projection $\pi: T(M^n) \rightarrow M^n$. Soit $U(x^1, \dots, x^n)$ un voisinage de coordonnées de M^n et $(x^1, \dots, x^n, \dots, x^{2n})$ le système de coordonnées qu'on obtient dans $\pi^{-1}(U)$ en associant à chaque vecteur v , tangent à M^n en un point $x \in U$, les coordonnées x^1, \dots, x^n de x et les composantes $x^{n+i} = v^i$ de v par rapport au repère $\partial/\partial x^i$. L'A. indique des méthodes naturelles qui permettent d'associer à un champ tensoriel de M^n un champ tensoriel de $T(M^n)$. Si par exemple ξ est un champ vectoriel contravariant de M^n , ayant les composantes ξ^i , les quantités (1) $\bar{\xi}^i = \xi^i$, $\bar{\xi}^{n+i} = (\partial \xi^i / \partial x^j) x^{n+j}$ définissent un champ vectoriel dans $T(M^n)$.

De même, si g_{ij} est le tenseur fondamental d'une métrique riemannienne ds^2 de M^n , l'expression

$$(2) \quad d\sigma^2 = ds^2 + g_{ij} Dv^i Dv^j, \quad \left(Dv^i = dv^i - \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ j \ k \end{smallmatrix} \right\} v^j dx^k \right)$$

définit une métrique riemannienne dans $\pi^{-1}(U)$. Les métriques $d\sigma^2$ définies dans les voisinages $\pi^{-1}(U)$, associés à un recouvrement $\{U\}$ de M^n , transforment $T(M^n)$ en variété riemannienne, jouissant de plusieurs propriétés intéressantes, dont nous citons: 1. Le champ horizontal H , défini dans $T(M^n)$ par la connexion de Levi-Civita de M^n , est orthogonal aux fibres de $T(M^n)$. 2. Le champ $\xi^i = x^{n+i}$, $\xi^{n+i} = -\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ j \ k \end{smallmatrix} \right\} x^{n+j} x^{n+k}$ de $T(M^n)$ définit un groupe d'homéomorphismes différentiables de $T(M^n)$, dont les trajectoires sont des géodésiques. 3. La divergence du champ précédent est nulle. 4. Le vecteur (1) est à divergence nulle si et seulement si le vecteur ξ a la même propriété. 5. Toute isométrie de M^n s'étend à une isométrie de $T(M^n)$. 6. Une courbe intégrale C du champ H est une géodésique de $T(M^n)$ si et seulement si la projection $C = \pi \circ C$ est une géodésique de M^n . 7. Les fibres de $T(M^n)$ sont des sousvariétés totalement géodésiques de $T(M^n)$. C. Teleman.

Singer, I. M.: The geometric interpretation of a special connection. Pacific J. Math. 9, 585—590 (1959).

A direct geometric construction of a unique connection on a Kähler manifold is achieved by means of a reduction of the structure bundle. The whole construction is coordinate free and yields also a description of the curvature in terms of the Frölicher operator J [A. Frölicher, Math. Ann. 129, 50—95 (1955)].

H. Guggenheimer.

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

● Marchaud, M. André: La géométrie finie et ses richesses. (Les conférences du Palais de la Découverte. Sér. A, Nr. 236.) Paris: Université de Paris 1958. 23 p.

Es werden die Entwicklung, die untersuchten Fragen und die Resultate der sog. „Ordnungstheorie“ beschrieben (die Begriffe der Ordnung, der Klasse u. a. aus der algebraischen Geometrie werden auf allgemeinere topologische Gebilde übertragen, die häufig gewisse Konvexitätsbedingungen erfüllen). Im Anfange stammen die Resultate vor allem von C. Juel, später von Rosenthal, Haupt und von Verf. selbst.

K. Čulik.

Fabricius-Bjerre, Fr.: On linearly-monotone elementary curves. Nordisk mat. Tidsskrift 7, 27—35, engl. Zusammenfassung 56 (1959) [Dänisch].

Eine orientierte ebene Kurve heißt Elementarkurve, wenn sie aus endlich vielen konvexen Bögen zusammengesetzt ist; sie heißt linear-monoton, wenn für jede sie schneidende Gerade die Schnittpunkte auf der Geraden in derselben Reihenfolge aufeinanderfolgen wie auf der Kurve. Für solche Kurven werden mit elementaren Mitteln eine Reihe von Eigenschaften bewiesen, darunter als Hauptsatz: sie sind dadurch gekennzeichnet, daß durch jeden ihrer Punkte, der nicht Spitze oder Wendepunkt ist, mindestens eine von der Tangente verschiedene Gerade geht, die nur diesen einen Punkt mit der Kurve gemeinsam hat. Die Beziehung des Begriffs „linear-monoton“ zu „streng konvex“ [Barner, dies. Zbl. 71, 156; Haupt, Arch. der Math. 9, 110—116 (1958)] wird besprochen. Ferner werden Zusammenhänge zwischen der Anzahl der Schnittpunkte mit einer Geraden und der Anzahl der Tangenten und Wendepunkte angegeben.

H. Gericke.

Glaeser, Georges: Propriétés m fois continûment dérivables des ensembles fermés. C. r. Acad. Sci., Paris 245, 780—782 (1957).

Dans cette note l'A. définit le paratangent linéarisé d'ordre m (ptgl^m) d'un ensemble fermé F de R_n et il applique cette notion à l'étude de l'algèbre de Whitney $W^m(F)$

(pour la définition de $W^m(F)$ cf. G. Glaeser, dies. Zbl. 83, 50). Étudiant aussi le ptgl¹ il obtient, par l'itération d'une opération convenable, le ptgl¹ à partir du parafingent (ptg) de F , où ptg de F est la notion connue de la géométrie infinitésimale directe. *A. Mallios.*

Bakel'man, I. Ja. (I. J.): Non-regular surfaces of bounded external curvature. Doklady Akad. Nauk SSSR 119, 631—632 (1958) [Russisch].

Die vom Verf. betrachteten Flächen F brauchen nicht mehr glatt zu sein (d. h. Tangentialebenen zu besitzen); sie haben aber folgende Bedingungen zu erfüllen: 1. In jedem Punkt P muß ein von den Kontingenzebenen von P umhüllter Kegel vorhanden sein. 2. Um jeden Punkt P soll eine Umgebung vorhanden sein, in der die Fläche sich in der Form $z - f(x, y) = 0$ darstellt und wobei die Kontingenzebenen in Punkten dieser Umgebung nicht senkrecht zur (x, y) -Ebene stehen. Für solche Flächen ist dann lokal der positive Teil der äußeren Krümmung beschränkt (dieser Begriff im Sinne von Pogorelov gebraucht, s. Pogorelov, Flächen von beschränkter äußerer Krümmung, dies. Zbl. 74, 176). In der erweiterten Flächenklasse des Verf. sind jetzt auch allgemeine stetige konvexe Flächen enthalten sowie solche, die sich als Differenz konvexer Funktionen darstellen lassen. *W. Burau.*

Grünbaum, B.: Borsuk's partition conjecture in Minkowski planes. Bull. Res. Council Israel, Sect. F 7, 25—30 (1957).

Unter der „Jungischen Konstanten“ einer Minkowski-Ebene E mit symmetrischer Norm und dem „Eichkreis“ $S: \|x\| \leq 1$ versteht Verf. den Durchmesser J_S eines kleinsten „Kreises“ $\|x - x_0\| \leq \frac{1}{2} J_S$ ($x_0 = \text{fest} \in E$), durch welchen jede Punktmenge $K \subseteq E$ vom Durchmesser $\sup_{x, y \in K} \|x - y\| = 1$ (nach geeigneter Parallelverschiebung) überdeckt wird. Auf Grund eines Satzes von B. Sz.-Nagy (dies. Zbl. 57, 145) gilt genau dann $J_S = 1$, wenn S ein Parallelogramm ist, anderenfalls hat man $J_S > 1$. In der vorliegenden Arbeit wird nun gezeigt, daß ein in E gelegener Kreis vom Durchmesser J_S stets in der Vereinigung von drei geeigneten Kreisen mit Durchmessern ≤ 1 enthalten ist, was eine Verallgemeinerung eines Resultats von F. W. Levi (dies. Zbl. 66, 406) im Falle zentralsymmetrischer konvexer Bereiche darstellt. Durch Anwendung dieses Satzes und des erwähnten Satzes von Nagy findet Verf. weiter: Jede Punktmenge K einer Minkowski-Ebene E , deren Eichkreis kein Parallelogramm ist, kann durch drei Kreise überdeckt werden, deren Durchmesser jeweils kleiner als der Durchmesser von K ist. Daraus folgt speziell: Jede beschränkte Punktmenge einer Minkowski-Ebene mit $S \neq \text{Parallelogramm}$ ist Vereinigung dreier Untermengen kleineren Durchmessers, womit die gleichbedeutende, für den euklidischen Fall ($S = \text{Ellipse}$) von K. Borsuk (s. dies. Zbl. 6, 424, zweite Besprechung) ausgesprochene und später mehrfach bewiesene Vermutung nun auch für beliebige Minkowski-Ebenen mit symmetrischer Norm (mit Ausnahme des Falls: $S = \text{Parallelogramm}$) bestätigt wird [Anm. des Ref.: In der Behauptung von Lemma 3 befindet sich ein Druckfehler; es muß dort $\|x_3 - x_4\|$ statt $\|x_3 - x_2\|$ heißen].

K. Leichtweiß.

Grünbaum, B.: On some covering and intersection properties in Minkowski spaces. Pacific J. Math. 9, 487—494 (1959).

Unter der „Ausdehnungskonstanten“ E_S eines n -dimensionalen Minkowskiraumes X mit symmetrischer Norm und der „Eichkugel“ $S: \|x\| \leq 1$ wird im folgenden die (immer existierende!) kleinste nichtnegative Zahl μ mit derjenigen Eigenschaft verstanden, daß für jede Menge von „Kugeln“ $S_i: \|x - x_i\| \leq \alpha_i$ ($x_i = \text{fest} \in X$; $\alpha_i \geq 0$; $i \in I$) aus X mit $S_i \cap S_j \neq \emptyset$ für $i \neq j$ die μ -fach vergrößerten Kugeln $\mu S_i: \|x - x_i\| \leq \mu \alpha_i$ zusammen einen nichtleeren Durchschnitt besitzen. Entsprechend wird im Falle $\alpha_i = 1$ für alle $i \in I$ die „Jungische Konstante“ J_S von X definiert; es gilt stets $J_S \leq E_S$. Während nach Nachbin (dies. Zbl. 35, 354) $E_S = 1$ für die Gültigkeit des Hahn-Banachschen Ausdehnungssatzes für lineare Operatoren

mit dem Bildraum X kennzeichnend ist und dieser kleinstmögliche Wert von E_S genau dann auftritt, wenn $J_S = 1$ ist und S ein Parallelepipèd darstellt, bestimmt Verf. in vorliegender Arbeit die obere Grenze aller möglichen Werte von E_S und charakterisiert alle Minkowskiräume, für welche dieselbe angenommen wird. Er findet: $\sup_S E_S = \sup_S J_S = \frac{2n}{n+1}$; dabei gilt genau dann $E_S = \frac{2n}{n+1}$, wenn $J_S = \frac{2n}{n+1}$ ist, d. h. wenn S einen zentralsymmetrischen konvexen Körper der vom Ref. in einer früheren Arbeit [Math. Z. **62**, 37—49 (1955; dies. Zbl. **64**, 167), Satz 2] beschriebenen Art darstellt. Weiter berechnet sich für einen euklidischen Raum X ($S = \text{Ellipsoid}$) E_S zu $E_S = J_S = \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{1/2}$. Verf. zeigt schließlich an einem Beispiel, daß im allgemeinen E_S und J_S verschieden sind. K. Leichtweiß.

Grünbaum, B.: On a problem of S. Mazur. Bull. Res. Council Israel, Sect. F **7**, 133—135 (1958).

Die folgende Frage von Mazur wird durch einen eleganten indirekten Beweis negativ entschieden: Gibt es einen dreidimensionalen Minkowskiraum M_3 , so daß jeder zweidimensionale Minkowskiraum M_2 linear isometrisch zu einem Unterraum von M_3 ist? Oder in geometrischer Ausdrucksweise: Gibt es einen konvexen Mittelpunktskörper K , so daß jeder ebene konvexe Mittelpunktsschnitt zu einem ebenen Mittelpunktsschnitt von K affin ist? — Die allgemeinere Frage für M_N , M_n statt M_3 , M_2 ist etwa gleichzeitig von C. Bessaga negativ entschieden worden (dies. Zbl. **80**, 311). D. Laugwitz,

• **Eggleston, H. G.:** Convexity. (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics. Nr. 47). Cambridge: At the University Press 1958. VIII, 136 p. 21 s. net.

Die kleine ansprechende Monographie ist dem allgemeinen Konvexitätsbegriff gewidmet, wie er für die Anwendung auch in den verschiedensten Sachgebieten in Betracht fällt. Die hier einschlägigen Begriffe und Tatsachen werden für den n -dimensionalen euklidischen Raum entwickelt, wobei größtmögliche Anpassungsfähigkeit angestrebt wird. Es treten besonders die Züge der allgemeinen Konvexgeometrie hervor, während speziellere sich mit der engeren Theorie der konvexen Körper verbindende Probleme weniger Berücksichtigung finden. Wenn Verf. einleitend erwähnt, daß sowohl Einfachheit als auch Allgemeinheit für die Konvexität charakteristisch sind, so kann gesagt werden, daß gerade das vorliegende Buch diese These in besonders prägnanter Weise belegt. — Zunächst werden die Eigenschaften konvexer Mengen erörtert (1. Kap.), wobei viele an sich anschauliche Sachverhalte sauber geklärt und bewiesen sind. Man findet auch weniger bekannte Dinge, wie etwa einen hübschen Abschnitt über Dualität. Weiter werden die fesselnden Sätze der kombinatorischen Konvexgeometrie, also die Theoreme von Helly und Horn u. a. behandelt (2. Kap.). Es folgen auch Ausführungen über konvexe Funktionen, Distanz- und Stützfunktionen (3. Kap.). Einläßlich werden die Metrik und die Konvergenz bei konvexen Körpern und der Auswahlssatz von Blaschke verarbeitet (4. Kap.), stetige Funktionale und insbesondere das Volumen als Lebesguesches Maß(!) eingeführt. Ferner wird eine knappe Übersicht über die linearen und konkaven Scharen und über die Minkowskische Theorie der gemischten Volumina gegeben (5. Kap.) und ein kurzer Beweis des wichtigen Brunn-Minkowskischen Satzes eingebaut. Endlich werden noch speziellere Fragen, insbesondere solche bei Körpern konstanter Breite, behandelt, teilweise mit Beschränkung auf den ebenen Fall (6. u. 7. Kap.). — Verf. versäumte nicht, an passenden Stellen auf die möglichen Erweiterungen auf höhere Räume und ferner liegende Zusammenhänge innerhalb von Analysis und Geometrie hinzuweisen. — Jedem Kapitel ist ein kurzer Anmerkungs- teil mit Hinweisen auf Quellen und weitere Nachschlagemöglichkeiten im Fachschrifttum beigeordnet. Zweckmäßige Wahl der Bezeichnungen und moderne Formel-

technik gestalten das Buch angenehm lesbar und suggestiv, das trotz des an sich elementaren Stoffes deutlich merkbar einem höheren Standpunkt verpflichtet ist.
H. Hadwiger.

Vincensini, Paul: Sur un invariant de partition de l'ensemble des corps convexes de l'espace euclidien à n dimensions. C. r. Acad. Sci., Paris **245**, 132—133 (1957).

Es sei \mathfrak{C} die Klasse der mit regulärer Randfläche versehenen konvexen Körper des E^n und $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{C}$ bezeichne die Teilklasse der zentralsymmetrischen Körper. Jedem $C \in \mathfrak{C}$ ist ein $\hat{C} \in \mathfrak{C}$ als (vektorieller) Differenzkörper $\hat{C} = \{p - q \mid p, q \in C\}$ zugeordnet. Durch die mit $\hat{C} = \hat{C}_0$ definierten Äquivalenzrelation $C \sim C_0$ zerfällt \mathfrak{C} in Äquivalenzklassen. Verf. zeigt u. a.: Sind \mathfrak{K} und \mathfrak{K}' zwei derartige Klassen, so gibt es zu jedem Körperpaar $C, C_0 \in \mathfrak{K}$ ein passendes Körperpaar $C', C'_0 \in \mathfrak{K}'$ derart, daß für die Differenzkörper (nicht notwendig konvex) eine Homothetie $C - C_0 = a(C' - C'_0)$ besteht.
H. Hadwiger.

Heppes, Aladár: On characterisation of curves of constant width. Mat. Lapok **10**, 133—134, russ. und engl. Zusammenfassg. 135 (1959) [Ungarisch].

The author proves the following theorem: A closed convex plane curve is of constant width, if and only if, every chord of it is a greatest chord of one of the two arcs determined by its endpoints.
Englische Zusammenfassg.

Stein, Sherman K.: A continuous mapping defined by a convex curve (addendum). Math. Z. **70**, 465 (1959).

Elementarer Beweis mittels des maximalen einbeschriebenen Vierecks für Teil (c) einer früheren Note des Verf. (dies. Zbl. **79**, 164); wie in einer Bemerkung des Ref. (dies. Zbl. **85**, 168) für (a) und (b), so ergibt sich jetzt (c) auch für nicht notwendig streng konvexe Kurven mit Ecken. — Bem. d. Ref.: Das im Beweis nicht erfaßte Dreieck läßt sich direkt behandeln.
D. Laugwitz.

Fejes Tóth, László: Über einem Kreis ein- und umbeschriebene Vielecke. Mat. Lapok **10**, 23—25, russ. und deutsche Zusammenfassg. 25 (1959) [Ungarisch].

Es sei R ein regelmäßiges n -Eck vom Inkreis k und Umkreis K , s ein k umbeschriebenes, S ein K eingeschriebenes n -Eck, s^* der Durchschnitt von s und K und S^* die konvexe Hülle von S und k . Es wird gezeigt, daß $T(s^*) \geq T(R)$ und $L(S^*) \leq L(R)$, wo, T und L Flächeninhalt und Umfang bedeuten. Dagegen gelten die Ungleichungen $L(s^*) \geq L(R)$ und $T(S^*) \leq T(R)$ im allgemeinen nicht.
Deutsche Zusammenfassg.

Florian, August: Ungleichungen über Sternpolyeder. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **27**, 16—26 (1957).

Für die Oberfläche F eines in der Einheitskugel des gewöhnlichen Raumes liegenden konvexen Polyeders mit e Ecken, k Kanten und f Flächen gilt die von L. Fejes Tóth stammende Ungleichung

$$(*) \quad F \leq k \sin\left(\frac{\pi f}{k}\right) \left\{ 1 - \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi f}{2k}\right) \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi e}{2k}\right) \right\},$$

wobei Gleichheit für die fünf regulären Polyeder besteht (vgl. S. 154 des bekannten Buches, dies. Zbl. **52**, 184). Verf., der auch einen vollständigen Beweis für (*) erbrachte (vgl. dies. Zbl. **73**, 174), dehnt die Gültigkeit dieser Ungleichung in der vorliegenden Arbeit auf Sternpolyeder aus. Das Gleichheitszeichen gilt dann für die neun regulären Sternpolyeder. Die Anzahlen e , k und f sind für nichtkonvexe Polyeder auf die von Fejes Tóth angegebene Weise passend zu modifizieren, wie dies bei der Herleitung der analogen Ungleichungen für Sternpolyeder, die eine Einheitskugel enthalten, geschehen ist (vgl. dies. Zbl. **73**, 393). Der Nachweis von (*) ist noch an eine naheliegende Fußpunktsbedingung gebunden, die von den zugelassenen Sternpolyedern erfüllt sein muß. Ein Druckfehler in Formel (13) ist mit unserer Anschrift (*) korrigiert.
H. Hadwiger.

Fejes Tóth, L.: Über eine Punktverteilung auf der Kugel. Acta math. Acad. Sci. Hungar. **10**, 13—19, russ. Zusammenfassg. I (1959).

n (nicht notwendig verschiedene) Punkte auf der Einheitskugel seien paarweise durch kürzeste Großkreisbögen verbunden. Gesucht ist die maximale Gesamtlänge S_n dieser Bögen. Verf. vermutet $S_{2k} = \pi k^2$, $S_{2k+1} = \pi k(k+1)$, beweist diese Aussagen für $n \leq 6$ und klärt, für welche Punktverteilungen Gleichheit gilt. Ferner ist $(n-2)S_n \leq nS_{n-2}$ und $S_n \leq 0,3\pi n(n-1)$. Es folgen analoge Betrachtungen für die elliptische Ebene.

H. Lenz.

Heppes, A.: Mehrfache gitterförmige Kreislagerungen in der Ebene. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 10, 141—148, russ. Zusammenfassg. VIII (1959).

Es seien um die Gitterpunkte der Ebene kongruente Kreise beschrieben und jeder Punkt der Ebene liege in höchstens k solchen Kreisen. Es sei δ_k die obere Dichte einer solchen Kreislagerung und $d_k = \sup \delta_k$, erstreckt über alle möglichen gitterförmigen Lagerungen. Es ist bekannt, daß $d_1 = \pi/\sqrt{12}$. Verf. zeigt, daß $d_k = k d_1$ für $k < 5$ aber $d_k > k d_1$ für $k \geq 5$ ist. Daraus folgt u. a. daß für $k = 2, 3, 4$ die dichteste k -fache Kreislagerung nicht gitterförmig ist.

O.-H. Keller.

Hadwiger, H.: Normale Körper im euklidischen Raum und ihre topologischen und metrischen Eigenschaften. Math. Z. 71, 124—140 (1959).

Um einen nicht-pathologischen, aber andererseits gestaltlich hinreichend allgemeinen Begriff des Körpers im reellen n -dimensionalen Raum R_n zu erhalten, führt Verf. den Begriff der K -Parzelle ein. Ist K ein affines Koordinatensystem des R_n , so heißt eine kompakte Punktmenge P des R_n eine K -Parzelle, wenn P für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ von jedem i -dimensionalen, einer i -dimensionalen Koordinatenebene von K parallelen, linearen Teilraum R' in einer zusammenhängenden Punktmenge geschnitten wird. Normal heißt eine Punktmenge A des R_n , wenn es eine natürliche Zahl h gibt, so daß sich A bei jedem K als Vereinigung von höchstens h K -Parzellen darstellen läßt, wobei jeder Durchschnitt von irgend welchen dieser K -Parzellen selbst eine K -Parzelle ist („ K -Parzellierung“). Als Charakteristik von A bezüglich einer K -Parzellierung $\{P_1, \dots, P_m\}$ wird erklärt

$$\chi = \sum^1 \varepsilon(P_{v_1}) - \sum^2 \varepsilon(P_{v_1} \cap P_{v_2}) + \dots,$$

wobei $\varepsilon(Q) = 0$ oder 1 zu setzen ist, je nachdem Q leer ist oder nicht, und \sum^j über alle Indexkombinationen der j -ten Klasse läuft. Es zeigt sich, daß $\chi(A)$ unabhängig ist von der Parzellierung und von der Dimension n des Einbettungsraumes; $\chi(A)$ ist die Euler-Poincaré-Charakteristik des Nervs einer jeden K -Parzellierung von A . Für normale Körper A existiert das Integral vom Crofton-Typ $J_k = \int \chi(A \cap R') dR'$, wo dR' die kinematische Dichte der k -dimensionalen Teilräume R' des (euklidischen)

R_n bedeutet. $\frac{J_k}{c_k}$, wo $c_k = \binom{n}{k} \frac{\omega_{n-1} \cdots \omega_{n-k}}{\omega_1 \cdots \omega_k}$ und w_j der Inhalt der j -dimensionalen Einheitskugel ist, heißt das k -te Minkowskische Quermaß $W_k(A)$ von A . Es sind $W_0, n W_1, \dots, n W_{n-1}$ und $(1/\omega_n) W_n$ bzw. der Inhalt, die Oberfläche, ..., die Norm und die Charakteristik von A . Es gelten die für die konvexen Körper bekannten Aussagen über die Quermasse, u. a. die Croftonschen Schnittformeln der Integralgeometrie, auch die für normalen Körper.

G. Aumann.

Bach, Günter: Über die Größenverteilung von Kugelschnitten in durchsichtigen Schnitten endlicher Dicke. Mitt. math. Sem. Gießen 57, 33 S. (1959).

Behandlung des „Tomatensalat-Problems“, d. h. der Aufgabe, aus der Größenverteilung $g(r)$ von Kugelschnitten auf die Größenverteilung $G(r)$ der unzerschnittenen Kugeln zu schließen. Das für die Grenzfälle unendlich dünner Schnitte und einheitlicher Kugelgröße bereits gelöste Problem wird auf den Fall endlicher Schnittdicke und beliebiger Größenverteilungen erweitert. Die resultierende Integralgleichung wird für verschiedene spezielle Verteilungsfunktionen für $g(r)$ gelöst, die zur Annäherung der beobachteten Verteilungen geeignet sind.

F. Lenz.

Topologie:

Harbarth, Klaus: Über die Äquivalenz verschiedener Axiomensysteme für Limesräume. *Math. Nachr.* **17**, 261—272 (1959).

Es werden die üblichen Definitionen eines Limesraumes unter Zugrundelegung von Moore-Smith-Folgen, von Rastern und von Filtern in ihrer Beziehung zueinander untersucht. Es wird gezeigt, daß die verschiedenen Axiomensysteme in einem gewissen Sinne gleichwertig sind. F. Albrecht.

Papić, Pavle: Sur les espaces de Baire généralisés. *Periodicum math.-phys. astron.*, II. Ser. **14**, 7—12 (1959).

On considère des espaces B^r composé de ω -suites dont les termes appartiennent à un ensemble quelconque et métrisé de manière que pour deux ω -suites distinctes $x = \langle x_n \rangle$, $y = \langle y_n \rangle$ on pose $\rho(x, y) = n^{-1}$ où n est le premier indice vérifiant $x_n \neq y_n$. Tout espace distancié E contient une partie partout dense homéomorphe d'un sous-ensemble d'un B^r (Th. 1); E est une image continue d'un sous-ensemble d'un B^r (Th. 2). Les démonstrations sont basées sur ce lemme: Dans tout recouvrement d'un espace distancié on peut inscrire un recouvrement dont les membres sont deux à deux sans point intérieur commun. G. Kurepa.

Weston, J. D.: A generalization of Ascoli's theorem. *Mathematika*, London **6**, 19—24 (1959).

Soient X et Y deux espaces topologiques et Y^X l'ensemble de toutes les applications (continues ou non) de X dans Y , muni de la topologie engendrée par les ensembles $\{f: f(K) \subset G\}$, où $K \subset X$ parcourt les parties compactes (séparées ou non) de X et $G \subset Y$ les parties ouvertes de Y . L'A. démontre qu'un ensemble fermé $\mathfrak{F} \subset Y^X$ est compact si, quel que soit $x \in X$, la fermeture de $\mathfrak{F}(x) = \{f(x): f \in \mathfrak{F}\}$ est compact et si V étant un voisinage de $y \in Y$, il existe deux voisinages U de x et W de y tels que $f \in \mathfrak{F}$, $f(x) \in W$ impliquent $f(U) \subset V$. La démonstration utilise le théorème de Tychonoff; réciproquement, le théorème de Tychonoff et l'axiome du choix peuvent être déduits aisément du théorème démontré. Á. Császár.

Dieudonné, J.: Un critère de normalité pour les espaces produits. *Colloquium math.* **6**, dédié à C. Kuratowski, 29—32 (1958).

Der folgende Satz wird bewiesen: ist E ein parakompakter Raum, der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, und ist F ein normaler abzählbar kompakter Raum, so ist $E \times F$ normal. Einige verwandte Fragen werden diskutiert. M. Katětov.

Marik, Jan: On pseudo-compact spaces. *Proc. Japan Acad.* **35**, 120—121 (1959).

Let S be a topological space and Z the family of all sequences $\{f_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, where the $f_n(x)$ are real continuous functions on S such that $f_n(x) \rightarrow 0$ for each $x \in S$. Let Z_0, N, E, U be sub-sets of Z made up respectively by all bounded, non-increasing, equi-continuous, and uniformly convergent sequences $\{f_n\} \in Z$. Call $N_0 = N \cap Z_0$, $E_0 = E \cap Z_0$. The following theorem is proved: if some of the families E, E_0, N, N_0 is contained in U , then S is pseudo-compact; conversely if S is pseudo-compact then $U = E = E_0$, $U \cap N = N_0$. M. M. Peixoto.

Kac (Kats), G. I.: Functional closeness of completely regular spaces. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **120**, 953—955 (1958) [Russisch].

Es sei m eine Kardinalzahl derart, daß jeder diskrete Raum von einer Mächtigkeit $\leq m$ ein Q -Raum ist. Dann gilt folgende Behauptung: ist ein topologischer Raum R von einer Mächtigkeit $\leq m$ vollständig (d. h. mit einem vollständigen uniformen Raum homöomorph), so ist R ein Q -Raum. Korollar: jeder vollständige topologische Raum von einer (im weiteren Sinne) erreichbaren Mächtigkeit ist ein Q -Raum. M. Katětov.

Isiwata, Takesi: Some properties of F -spaces. Proc. Japan Acad. 35, 71—76 (1959).

Ein vollständig regulärer topologischer Raum X heißt ein F -Raum, wenn für jedes $f \in C(X)$ die Mengen $P(f) = \{x; f(x) > 0\}$ und $N(f) = \{x; f(x) < 0\}$ vollständig getrennt liegen. X hat die F_σ -Eigenschaft, wenn die abgeschlossene Hülle jeder F_σ -offenen Teilmenge von X offen ist. X hat die E_σ -Eigenschaft, wenn jede beschränkte stetige Funktion auf einer F_σ -offenen Teilmenge U sich auf ganz X stetig fortsetzen läßt. Es bedeute βX die Čechsche Kompaktifizierung von X . Folgende Bedingungen sind äquivalent: a) X hat die F_σ -Eigenschaft, b) jeder Teilraum Y von βX , der X als echte Teilmenge enthält, hat die F_σ -Eigenschaft, c) jede echte F_σ -offene Teilmenge von X hat die F_σ -Eigenschaft. Für die E_σ -Eigenschaft gilt das Entsprechende. X ist dann und nur dann ein F -Raum, wenn βX ein F -Raum ist oder wenn $P(f)$ ein F -Raum ist für alle $f \in C(X)$ mit $P(f) \neq X$. In einem F -Raum gibt es keine kompakten Teilmengen mit nur abzählbar vielen Elementen. Weitere Eigenschaften der F -Räume und Beispiele. G. Köthe.

Császár, A. et S. Mrówka: Sur la compactification des espaces de proximité. Fundamenta Math. 46, 195—207 (1959).

Ein System \mathcal{B} von Teilmengen eines Nachbarschaftsraumes R (Nachbarschaftsrelation δ) heiße eine Basis des Nachbarschaftsraumes („base de proximité“), wenn zu je zwei Mengen $A, B \subseteq R$ mit $A \delta B$ zwei Mengen $U, V \in \mathcal{B}$ mit den Eigenschaften $A \subseteq U, B \subseteq V, U \delta V$ existieren. Die kleinste Mächtigkeit einer solchen Basis heiße das Gewicht des Nachbarschaftsraumes („poids de proximité“). Die kleinste Mächtigkeit einer Basis (im üblichen Sinne) eines topologischen Raumes heiße das Gewicht des topologischen Raumes („poids topologique“). Verff. geben einen neuen Beweis des sog. Hauptsatzes über Nachbarschaftsräume, der besagt, daß zwischen den mit der Topologie eines vollständig regulären Raumes verträglichen Nachbarschaftsstrukturen und den kompakten Erweiterungen des Raumes eine eindeutige Entsprechung besteht, und beweisen zusätzlich: Das Gewicht dieser Nachbarschaftsstruktur ist dem topologischen Gewicht der entsprechenden kompakten Erweiterung gleich. Ein weiterer Abschnitt beschäftigt sich mit der Berechnung des Gewichtes metrisierbarer Nachbarschaftsstrukturen und gibt ein (dem entsprechenden Satz für uniforme Strukturen analoges) Kriterium für die Metrisierbarkeit einer Nachbarschaftsstruktur. G. Bruns.

Fomin, S. V.: On the connection between proximity spaces and the bicomact extensions of completely regular spaces. Doklady Akad. Nauk SSSR 121, 236—238 (1958); **Berichtigung.** Ibid. 128, 646 (1959) [Russisch].

Ein allgemeiner Berührungsraum ist eine Menge P mit einer symmetrischen Relation $X \delta Y, X \subset P, Y \subset P$, welche die folgenden Forderungen erfüllt: ist $A \delta C, B \delta C$, so ist $(A \cup B) \delta C$; ist $x \in P$, so ist $(x) \delta (x); \emptyset \delta P$. Es wird in einfacher Weise bewiesen, daß die beschränkten δ -stetigen komplexwertigen Funktionen auf P einen Ring bilden, der in bezug auf die gleichmäßige Konvergenz abgeschlossen ist (der Satz ist im wesentlichen bekannt, vgl. z. B. W. Richter, dies. Zbl. 35, 162). Aus diesem Ergebnis werden verschiedene Folgerungen abgeleitet, darunter auch der bekannte Satz über die eindeutige Korrespondenz zwischen den kompakten Erweiterungen eines gegebenen vollständig regulären Raumes R und denjenigen δ -Strukturen auf R , welche die gegebene Topologie von R erzeugen. M. Katětov.

Isbell, J. R.: On finite-dimensional uniform spaces. Pacific J. Math. 9, 107—121 (1959).

Ein uniformer Raum X heißt ein uniformer absoluter Retrakt (bzw. Umgebungsretrakt), falls es für jeden uniformen Raum $Y \supset X$ eine gleichmäßig stetige Abbildung f von Y (bzw. von einer gleichmäßigen Umgebung der Menge X in Y) auf X gibt derart, daß $f(x) = x$ für $x \in X$ gilt. Verf. beweist, daß jeder endlichdimensionale

uniforme Komplex (vgl. J. R. Isbell, dies. Zbl. 81, 168) ein uniformer absoluter Umgebungsretrakt ist. Andererseits wird bewiesen, daß kein uniformer absoluter Retrakt mit der Geraden homöomorph ist. Die Dimensionen δd und Δd eines uniformen Raumes werden untersucht (Δd , bzw. δd ist gleich dem kleinsten n mit der Eigenschaft, daß jede, bzw. jede endliche, gleichmäßige Überdeckung zu einer n -dimensionalen gleichmäßigen Überdeckung verfeinert werden kann). Es wird gezeigt, daß für jeden uniformen Raum entweder $\delta d = \Delta d$ oder $\Delta d = \infty$ gilt. Für jedes $n = 0, 1, \dots, \infty$ gibt es Räume mit $\delta d = n$, $\Delta d = \infty$; ein Beispiel wird angegeben, wo $\delta d = 0$, $\Delta d = \infty$ und außerdem der Raum abzählbar und (als topologischer Raum) diskret ist. Abschließend gibt Verf. einen bedeutend vereinfachten Beweis des Satzes von Smirnov (dies. Zbl. 72, 179) über die Charakterisierung der n -dimensionalen (im Sinne von δd) Untermengen vom E_n . *M. Katětov.*

Kodama, Yukihiro: On a problem of Alexandroff concerning the dimension of product spaces. I, II. J. math. Soc. Japan 10, 380—404 (1958); 11, 94—111 (1959).

Let X be a compact metric space with $\dim X = n$. In 1932 P. Alexandroff proposed the problem to determine a necessary and sufficient condition for X to satisfy the equality $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$ for every compact metric space Y . In this paper the author gives a solution to this problem. A sequence $\mathfrak{A} = \{q_1, q_2, \dots\}$ of positive integers is called a k -sequence if q_i divides q_{i+1} for each i and $q_i > 1$ for some i . Since there is a natural homomorphism $h(\mathfrak{A}, i): \mathbb{Z}/q_{i+1}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/q_i\mathbb{Z}$ (\mathbb{Z} = the additive group of all integers), $\{\mathbb{Z}/q_i\mathbb{Z}, h(\mathfrak{A}, i)\}$ defines an inverse system whose limit group is denoted by $\mathbb{Z}(\mathfrak{A})$. Then the author proves that the condition P "For every k -sequence \mathfrak{A} there exists a closed set $A(\mathfrak{A})$ of X such that the n -dimensional Čech homology group $H_n(X, A(\mathfrak{A}); \mathbb{Z}(\mathfrak{A}')) \neq 0$ " is a desired condition. The author has learned of Boltjanskij's solution (this Zbl. 37, 98), after the submission of this paper for publication, and proves the equivalence of the author's and Boltjanskij's solutions in the addendum of the paper. In Part II the author establishes a generalization of the above theorem: An n -dimensional locally compact, fully normal space X is dimensionally full-valued for the class of all locally compact fully normal spaces if and only if X has the property P . In the general case the author does not know whether Boltjanskij's property is equivalent to the author's property P .

K. Morita.

Nagata, Jun-iti: A generalization of a theorem of W. Hurewicz. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A 9, 37—38 (1958).

For a space R , let us denote by $\dim R$ and by $\text{ind dim } R$ the covering dimension of R and the large inductive dimension of R respectively. The reviewer proved, as a generalization of Hurewicz's theorem, that if F is a closed continuous mapping of a normal space X onto a normal space Y such that $F^{-1}(y)$ consists of at most $k + 1$ points for each point y of Y , then $\dim Y \leq \text{ind dim } X + k$. (cf. this Zbl. 71, 385). In this note the author establishes the following theorem: If F is a closed continuous mapping of a normal space X onto a perfectly normal space Y such that the boundary of $F^{-1}(y)$ consists of at most $k + 1$ points for each point y of Y ($k \geq 0$), then $\text{ind dim } Y \leq \text{ind dim } X + k$.

K. Morita.

Keldyš, Ljudmila: Nulldimensionale offene Abbildungen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 23, 165—184 (1959) [Russisch].

The authoress examines the null-dimensional dimension-raising open mappings f of compacts C and proves that, provided C and $f C$ are of dimension $< \infty$, one has (1) $f = \psi f_1$; here f_1 is irreducible (no proper closed set is mapped by f_1 onto the space) and ψ is an "equally non-dimension-raising mapping" (i. e., $\dim \psi X \leq \dim X$ for every open set X). Every open dimension-raising f known so far is of the foregoing type; one does not know whether every f is of the form (1). The authoress reproves her theorem (s. this Zbl. 55, 415) by which a one-dimensional continuum is mapped onto a square by means of an open null-dimensional mapping. One does not know

whether there exists an open null-dimensional mapping of a cube yielding a compact of higher dimensions. The paper is closely connected with some previous papers of the authoress (this Zbl. 42, 414; 77, 362; 78, 150).

G. Kurepa.

Nagami, Keiô: Finite-to-one closed mappings and dimension. I. Proc. Japan Acad. 34, 503—506 (1958).

Der folgende Satz wird bewiesen: sind R, S metrische Räume, f eine abgeschlossene Abbildung von R auf S , ist $\dim R \leq 0$ und bestehen alle $f^{-1}(y)$, $y \in S$, aus derselben endlichen Anzahl von Punkten, so ist auch $\dim S \leq 0$. Als Folgerungen ergeben sich (Beweise werden, mit einer Ausnahme, nicht gegeben) u. a. mehrere Sätze, die in den Arbeiten von K. Morita (dies. Zbl. 57, 390) und M. Katětov (dies. Zbl. 52, 396) enthalten sind.

M. Katětov.

Suzuki, Jingoro: Note on a theorem for dimension. Proc. Japan Acad. 35, 201—202 (1959).

Ein Satz von K. Nagami (vorsteh. Referat) wird wie folgt verallgemeinert: es sei X ein metrischer, Y ein topologischer Raum, f eine abgeschlossene stetige Abbildung von X auf Y ; enthält jede Menge $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, dieselbe endliche Anzahl von Punkten, so gilt $\dim X = \dim Y$.

M. Katětov.

Ponomarev, V. I.: Ein neuer Raum der abgeschlossenen Mengen und die mehrdeutigen stetigen Abbildungen der Bikompakten. Mat. Sbornik, n. Ser. 48 (90), 191—212 (1959) [Russisch].

In einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 78, 150) wurde bewiesen, daß eine stetige eindeutige Abbildung eines Bikompaktums X auf ein Bikompaktum Y dann und nur dann offen ist, wenn die Elemente der von ihr erzeugten Zerlegung eine abgeschlossene Menge im Raum 2^X der nichtleeren, abgeschlossenen Mengen von X bilden. Um die stetigen, auch mehrdeutigen Abbildungen der Bikompakta auf ähnliche Weise zu charakterisieren, wird die Menge der nichtleeren, abgeschlossenen Mengen eines T_1 -Raumes X folgendermaßen zu einem topologischen Raum κX erklärt: eine Umgebung von $F_0 \in \kappa X$ ist die Menge aller $F \in \kappa X$, die in einer beliebig gegebenen Umgebung von F_0 in X enthalten sind. Der Raum κX ist ein bikompakter und zusammenhängender T_0 -Raum. Ist X bikompakt, so besitzt jede stetige eindeutige Abbildung von κX in sich mindestens einen Fixpunkt. Bezeichnet D^τ das Produkt von τ Exemplaren des aus zwei isolierten Punkten bestehenden Raumes, so kann jeder T_0 -Raum, der eine Basis von einer Mächtigkeit $\leq \tau$ besitzt, in D^τ eingebettet werden. — Es werden die mehrdeutigen Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ untersucht, die jedem Punkt eine abgeschlossene Menge zuordnen und im Sinne von Cauchy stetig sind. Bezeichnet \bar{f} die entsprechende eindeutige Abbildung von X in κY , so ist die Stetigkeit von f derjenigen von \bar{f} äquivalent. Die Umkehrung f' der Abbildung f wird durch $f'(y) = \{x \in X \mid f(x) \ni y\}$ definiert. Ist f eine Abbildung eines Bikompaktums X auf ein Bikompaktum Y und sind alle Mengen $f(x)$, $f'(y)$, $x \in X$, $y \in Y$, abgeschlossen, so folgt aus der Abgeschlossenheit (oder Stetigkeit) einer der Abbildungen f, f' die Stetigkeit und Abgeschlossenheit beider Abbildungen. Die Abbildung f ist dann und nur dann stetig, wenn alle $f'(y)$ abgeschlossen sind und das Bild einer beliebigen, in X abgeschlossenen Menge bei der Abbildung \bar{f} in κY bikompakt ist. Es wird gezeigt, daß die im Sinne von Strother (dies. Zbl. 66, 410) stetigen Abbildungen Umkehrungen von offenen stetigen Abbildungen im hier definierten Sinne sind, wobei einige für stetige eindeutige Abbildungen bekannte Sätze für die Klasse dieser Abbildungen entsprechend erweitert werden.

F. Albrecht.

Deleanu, Aristide: Sur un théorème de point fixe. Comun. Acad. Republ. popul. Romîne 7, 839—844, russ. und französ. Zusammenfassung 843—844 (1957) [Rumänisch].

The well known theorem according to which every map $f: X \rightarrow X$ satisfying $\delta(f(x), f(y)) \leq \mu \delta(x, y)$, where $0 \leq \mu < 1$, has a unique fixed point is extended to

general metric complete spaces. The result is then applied to yield existence and unicity theorems for some differential and integral equations in topological vector spaces. T. Ganea.

Young, G. S.: A generalization of Bagemihl's theorem on ambiguous points. Michigan math. J. 5, 223—227 (1958).

Ist f eine Abbildung der Kreisscheibe $|z| < 1$ in die Zahlenkugel, so heißt ein Punkt p auf $|z| = 1$ ein „ambiguous point“ [a. p.] von f , wenn zwei Bögen A_1, A_2 existieren, die bis auf ihren gemeinsamen Endpunkt p in $|z| < 1$ liegen derart, daß die Grenzwerte von f längs A_1 und A_2 existieren und voneinander verschieden sind. Nach einem Satz von Bagemihl (dies. Zbl. 65, 66) kann es zu einer gegebenen (nicht notwendigerweise stetigen) Funktion f höchstens abzählbar viele a. p.'s geben. Andererseits wurden in späteren Noten von Bagemihl, Church und Piranian (dies. Zbl. 80, 84) Beispiele für Abbildungen dreidimensionaler Bereiche angegeben, für welche die Menge der (analog definierten) a. p.'s überabzählbar ist. Verf. zeigt, daß der genannte Satz von Bagemihl bei geeigneter Verallgemeinerung des Begriffes „a. p.“ auf Abbildungen von Sphären beliebiger Dimension ausgedehnt werden kann. — Definition: Ist D ein Gebiet im E^n , f eine Abbildung von D in einen topologischen Raum, so heißt eine abgeschlossene r -Zelle I auf dem Rande von D eine r -Zelle disjunkter cluster sets [r-Z. d. c. s.] für f , wenn folgendes gilt: Es existieren zwei abgeschlossene $(r+1)$ -Zellen $I \subset J_v \subset D \cup I$ ($v = 1, 2$), derart, daß die cluster sets von f auf I bezüglich J_1 und J_2 disjunkt sind. Satz: Es sei f eine Abbildung der offenen n -dimensionalen Vollkugel D in einen kompakten metrischen Raum M . Dann kann der Rand von D nicht über-abzählbar viele disjunkte $(n-2)$ -Zellen d. c. s. von f enthalten. Der Beweis stützt sich auf den Moore-Youngschen Satz über verallgemeinerte Trioden im E^n . P. Seibert.

James, I. M. and J. H. C. Whitehead: Homology with zero coefficients. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 9, 317—320 (1958).

Es werden mehrere Beispiele von Homologietheorien konstruiert, die für alle Raumpaare definiert sind, den Axiomen 1—7 von Eilenberg-Steenrod, „Foundations of Algebraic Topology“ (dies. Zbl. 47, 414), genügen und die Koeffizientengruppe 0 haben (d. h. $H_0(P) = 0$ für einen Punkt P). Nach dem Eindeutigkeitssatz folgt $H_n(X, A) = 0$ für alle n und jedes Paar (X, A) von endlichen simplizialen Komplexen, nicht dagegen für jedes Raumpaar überhaupt, wie die genannten Beispiele zeigen. D. Puppe.

Okamoto, Sigeru: An algebraic proof of a theorem of I. M. James concerning reduced product complexes. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A 6, 177—180 (1958).

I. M. James (this Zbl. 64, 415) has associated with any CW-complex A , with one zero-cell, a reduced product complex A_∞ , of importance since it is a complex and has the same homology as the space of loops, ΩA , on the suspension of A . James further observes that the Künneth formulae imply that $\sum_{r=1}^{\infty} H_r(A_\infty) = \sum_{l=1}^{\infty} G^l$, where $G^1 = \sum_{r=1}^{\infty} H_r(A)$, and $G^{l+1} = G^1 \otimes G^l + \text{ext}(G^1, G^{l-1})$. Here the algebra of chain complexes, implicit in James's proof, is made explicit and abstract, in terms of graded differential modules and what the author calls reduced product rings associated with such modules. W. H. Cockcroft.

Livesay, G. R.: Concerning real valued maps of the n -sphere. Proc. Amer. math. Soc. 8, 989—991 (1957).

Es bezeichne S^n die n -dimensionale Einheitssphäre des E^{n+1} , $r(x, y)$ die euklidische Distanz zweier Punkte $x, y \in E^{n+1}$ und $f(x)$ eine auf S^n definierte stetige reellwertige Funktion. Ferner bedeute p die durch Identifikation antipodischer Punkte

$-x \in S^n$ gegebene Abbildung von S^n in den n -dimensionalen projektiven Raum P^n . Verf. beweist: Wird mit $0 \leq d \leq 2$ die Punktmenge

$X_d = \{x \in S^n \mid \text{wobei ein } y \in S^n \text{ mit } r(x, y) = d \text{ und } f(x) = f(y) \text{ existiert}\}$ betrachtet, so trägt $p X_d$ einen nichttrivialen $(n-1)$ -dimensionalen Čech-Zyklus mod 2. Von verschiedenen möglichen Folgerungen sei erwähnt: Sind $f_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) n gerade stetige Funktionen auf der S^n , für die also $f_i(-x) = f_i(x)$ gilt, und sind $0 \leq d_i \leq 1$ ($i = 1, \dots, n$) vorgegeben, so existieren Punkte $x_0, x_1, \dots, x_n \in S^n$ so, daß $f_i(x_0) = f_i(x_i)$ und $r(x_0, x_i) = d_i$ gilt. H. Hadwiger.

James, I. M.: Embeddings of real projective spaces. Proc. Cambridge philos. Soc. 54, 555—557 (1958).

Let $D(m)$ be the least number q such that the real m -dimensional projective space can be mapped homeomorphically into the q -dimensional euclidean space. Trivially, $D(m) \leq D(m+1)$; H. Hopf proved (this Zbl. 23, 383) that $D(m) < 2m$ for odd m . $D(m) \leq 2m$ for even m , and $D(m) \geq m+2$; and it follows from a result of R. Thom (this Zbl. 49, 400; theorem III. 25) that $D(m) = 2m$ if m is a power of 2. The author adds the following result: let S^r be the r -sphere; a map $w: S^m \times S^n \rightarrow S^k$ is equivariant if $w(Tx, y) = Tw(x, y) = w(x, Ty)$ for all $x \in S^m$, $y \in S^n$ where T denotes the relevant antipodal transformation; and let $C(m, n)$ be the least value of k such that there exists an equivariant map of $S^m \times S^n$ into S^k ; then $D(m+n+1) \leq C(m, n) + D(m) + D(n) + 1$. F. A. Behrend.

Sherk, F. A.: The regular maps on a surface of genus three. Canadian J. Math. 11, 452—480 (1959).

Unter einer Karte (map) sei eine Gebietseinteilung einer Fläche verstanden. Die Karte heißt regulär vom Typ (p, q) , wenn alle Gebiete von p Kanten berandet sind und von jeder Ecke q Kanten ausgehen. Zu jeder regulären Karte vom Typ (p, q) gibt es eine duale vom Typ (q, p) . Die universellen Überlagerungen der regulären Karten ergeben reguläre Netze der euklidischen oder hyperbolischen Ebene; von diesen ausgehend erhält man die Automorphismengruppen der regulären Karten. Diese sind transitiv bezüglich der Ecken, Kanten und Gebiete. Zur „Gruppe der Karte“ gehören die Drehungen R , bzw. S , die ein Gebiet in sich überführen, bzw. eine Ecke fest lassen. Es ist $R^p = S^q = (SR)^2 = E$ (E bedeute die Identität). Dazu können als weitere Automorphismen Spiegelungen treten. — Sind N_0, N_1, N_2 die Anzahlen der Ecken, Kanten, Gebiete, so ist $g = 2N_1 = N_0 q = N_2 p$ die Ordnung der Gruppe der Karte. Besonders untersucht werden die Typen $(j \cdot p, q)$ bzw. $(j \cdot p, j \cdot q)$ mit $0 \leq (p-2)(q-2) < 4$, wobei R^p mit S vertauschbar, bzw. $R^p = S^q$ ist und j Teiler von $Q = \frac{4q}{4 - (p-2)(q-2)}$, bzw. von $\frac{p+q}{q} \cdot Q$ sein muß. Bei Flächen vom Geschlecht 3 ergibt die Eulersche Formel für $p \geq q$ 21 arithmetisch mögliche Fälle regulärer Karten. Bei Untersuchung der möglichen Automorphismengruppen bleiben davon 12, wozu noch die dualen Karten kommen. Die Typen (8, 4) und (8, 8) liefern je zwei verschiedene Karten. Die 12 Karten mit Angabe ihrer Gruppe sind in einer Tabelle zusammengestellt und ihre Netze gezeichnet. (In Tabelle V sind die Zahlen für N_0 und N_2 zu vertauschen.) — Für den Typ $(p, 3)$ wird eine systematische Aufstellung der 10 regulären Karten für beliebiges Geschlecht mit $N_2 \leq 6$ gebracht; ist $N > 6$, so wird jedes Gebiet von mindestens 5 verschiedenen Gebieten umgeben. H. Kühneth.

Izbicki, Herbert: Unendliche Graphen endlichen Grades mit vorgegebenen Eigenschaften. Monatsh. Math. 63, 298—301 (1959).

Verf. hat früher (dies. Zbl. 77, 171) bewiesen, daß es zu jeder endlichen Gruppe H und zu den natürlichen Zahlen n, χ, c mit $3 \leq n \leq 5$, $2 \leq \chi \leq n$, $1 \leq c \leq n$ unendlich viele reguläre Graphen n -ten Grades gibt mit der Farbenzahl χ , dem Zu-

sammenhang c und der Automorphismengruppe H , wobei kein Punkt und keine Kante bei allen Automorphismen fest bleibt. Hier wird an Beispielen gezeigt, daß es eine nicht abzählbare Menge unendlicher Graphen gibt, die obigen Bedingungen genügen. Das gilt bei unendlichen Graphen im Gegensatz zu endlichen auch für $\chi = 2$, $c = 1$.

H. Künneht.

Harary, Frank: On the group of a graph with respect to a subgraph. J. London math. Soc. **33**, 457—461 (1958).

A graph G is a finite set of points together with a set of unordered pairs of distinct points called lines. The group $\Gamma(G)$ of automorphisms of G is generalised in the following way. If H is a subgraph of G , then let $\Gamma(G, H)$ be the permutation group acting on all subgraphs of G , which are isomorphic to H , induced by the automorphisms of G . Two subgraphs of G are called similar if there exists an automorphism mapping one onto the other. In the same way there is defined the similarity of two sets of subgraphs, each of which contains exactly k distinct subgraphs isomorphic to H . Let c_k be the number of equivalence classes determined by this relation of similarity. With the known method of G. Pólya (this Zbl. **17**, 232) there is deduced (in the case of general G and H) the schema of the generating function for c_k followed by some examples of more special nature, one of which concerns the number of symmetry types of Boolean functions studied by G. Pólya (this Zbl. **24**, 1) and by D. Slepian (this Zbl. **51**, 248).

K. Čulík.

Berge, Claude: Two theorems in graph theory. Proc. nat. Acad. Sci. USA **43**, 842—844 (1957).

Let X resp. U be the set of vertices resp. edges of a finite unoriented graph G . A set $A \subset X$ is said to be internally stable (a cover), if there does not exist an edge joining two vertices of A (if every edge is adjacent to some vertex of A). Thus the complement of an internally stable set is a cover and conversely. A set $V \subset U$ is said to be a matching, if not two distinct edges of V are adjacent to the same vertex [see O. Ore; Duke math. J. **22**, 625—639 (1955)]. Maximal matching resp. minimal cover contains the maximal resp. minimal number of elements. If V is a matching of G , a chain of edges (i. e. D. Königs „Kantenzug“) is called alternating, if for any two of its adjacent edges one is strong (i. e. belongs to V) and the other weak (i. e. belongs to $U - V$). A vertex x , which is not adjacent to any strong edge, is called neutral and N denotes the set of all neutral vertices. Theorem 1: A matching V is maximal if and only if there does not exist an alternating chain connecting two (distinct) neutral vertices. The construction of a maximal matching follows by the fact, that if W is such a chain, $(V - W) \cup (W - V)$ is a matching too and contains more edges than V . In the proof of this theorem there are used some lemmas, one of which is due to T. Gallai (dies. Zbl. **40**, 259). Let an added (auxiliary) vertex a be joined to every neutral vertex (with regard to a given matching V) with an added edge called strong. If there exists an alternating chain from a to a vertex x , there will be oriented the last of its edges in direction to x . A vertex $x (\notin N)$ is called inaccessible, if it is not adjacent to any edge directed to x (instead of “to a directed edge”, from which follows, that a should be never inaccessible). A vertex x is called medium, if it is adjacent to some strong and to some weak edge, both directed to x (it may be $x \in N$, on contrary to author's definition). A vertex $x (\notin N)$ is called weak, if it is adjacent to some weak but not to any strong edge directed to x . Let I, M, W denote the sets of all inaccessible, medium, weak vertices resp. Theorem 2: Let C_Y (resp. C_Z) be a minimal cover for the subgraph generated by a connected component Y of M (resp. Z of I). If there does not exist an alternating chain connecting two (distinct) neutral vertices, the set $W \cup \bigcup_Y C_Y \cup \bigcup_Z C_Z$ is a minimal cover for G .

If M is not connected, one can find an example, for which this theorem is false.

K. Čulík.

Berge, Claude: Sur le couplage maximum d'un graphe. C. r. Acad. Sci., Paris **247**, 258—259 (1958).

Let X resp. U be the set of vertices resp. edges of a connected (unoriented) graph G and let $n = |X|$, where $|X|$ denotes the number of elements of X . Let U_x be the set of all edges adjacent to the vertex x . Let be given the integers $f(x)$ satisfying $0 \leq f(x) \leq |U_x|$ and a set $V \subset U$ such that $|V \cap U_x| \leq f(x)$ for all $x \in X$. A set V is called maximal, if it contains the maximal number of elements [in regard of $f(x)$]. An edge belonging to V resp. $U - V$ is said to be strong resp. weak. Let \bar{a} be a new vertex joined with every $x \in X$ by exactly $f(x) - |V \cap U_x|$ new edges called strong. The following theorem generalises some previous result of the author's and a result of R. Z. Norman and M. O. Rabin too [Amer. math. Soc., Notices **5**, 36 (1958)]: A set V is maximal [with regard to $f(x)$] if and only if there does not exist a chain [i. e. „Kantenzug“] connecting a with \bar{a} such that one of any two adjacent edges is strong and the other weak. If $f(x) \equiv 1$, V is a matching (see the preceding review). Let $\xi = \max_{S \subset X} [p_0(S) - |S|]$, where $p_0(S)$ is the number of connected components in the subgraph generated by the set $X - S$ containing an odd number of vertices. There is proved if V is a maximal matching, $|V| = \frac{1}{2}(n - \xi)$, and if $A \subset X$ is a maximal internally stable set, $|A| \leq \frac{1}{2}(n + \xi)$. At last there is rectified an error in the author's paper reviewed above. K. Čulík.

Roy, Bernard: Sur quelques propriétés des graphes fortement connexes. C. r. Acad. Sci., Paris **247**, 399—401 (1958).

A graph $G = (X, \Gamma)$, where X is a finite set of n vertices and Γ a mapping of X into 2^X , is said to be strong connected, if to all $x, x' \in X$ there exists a directed chain (i. e. „kontinuierlich gerichteter Kantenzug“) of directed edges (i. e. of ordered pairs (a, b) such that $b \in \Gamma(a)$, $a \in X$) from x to x' . If to every $x_i \in X$ corresponds an element $y_i \in Y$ for all i , there is defined a directed graph G' as follows: $X \cup Y$ is the set of its vertices ($X \cap Y = \emptyset$) and (x_i, y_j) is its edge just in the case, that (x_i, x_j) is an edge of G . Further let N be a network generated of G' by adding two new vertices $x_0 \neq z$ and new directed edges (x_0, x_i) and (y_i, z) for $i = 1, 2, \dots, n$. Let $c_i > 0$ be the (finite) capacities of the edges (x_0, x_i) and (y_i, z) , while all other edges have infinite capacities. There is proved the equivalence of the following three conditions: (1) There does not exist a subset $A \subset X$ such that $\Gamma(A) \not\subseteq A$. (2) Every vertex of G lies on some cycle. (3) It is possible to choose the capacities such that there exists a flow of N (the values of which are nonnegative integers) saturating the edges in a extremal way (the required capacities c_i are numbers of cycles meeting the vertex x_i in G). Further G is strongly connected if and only if there does not exist an $A \subset X$ such that $\Gamma(A) \not\subseteq A$. K. Čulík.

Elgot, Calvin C. and Jesse B. Wright: Series-parallel graphs and lattices. Duke math. J. **26**, 325—338 (1959).

By a graph G the authors mean a finite undirected graph, in which are marked two distinct vertices p_0 and p_1 called first and second terminal vertices. On the set N of vertices of G there is defined the chain relation C and the link relation L as follows: aCb (aLb) if a precedes (immediately precedes) b in some chain, i. e. in some way from p_0 to p_1 . If L is asymmetric, C is a partial-order relation satisfying some special conditions. A graph G is called admissible, if (1) for all vertices a, b joined by some edge either aLb or bLa (or both) and (2) there are no isolated vertices. Then G is admissible if and only if N is a field of the link relation L . In the usual way there is defined the series and parallel connection of two graphs and the class of series-parallel graphs is the smallest class containing unit graph (i. e. two vertices joined by a single edge) and closed in regard to operation of series and parallel

connection. The main result is as follows: A graph G is series-parallel if and only if G is admissible and L is asymmetric. An series-parallel lattice $(A, <)$ (where $<$ is irreflexive and transitive) is a finite lattice such that $a < b$, $b < a$, $b \leq a$ implies either $a \cup b \leq x$ or $a \cup b \geq x$. Then a series-parallel lattice satisfies the dual condition: $a < b$, $b < a$, $y \leq b$ implies either $a \cap b \leq y$ or $a \cap b \geq y$. There are studied the series-parallel lattices very detailedly. K. Čulík.

Theoretische Physik.

● Frenkel', Ja. I.: Sammlung ausgewählter Werke. Bd. 2: Wissenschaftliche Artikel. [Sobranie izbrannykh trudov. Tom 2: Naučnye stat'i.] Moskau-Leningrad: Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1958. 600 S., 2 Taf. R. 40,45 [Russisch].

Fortsetzung der Sammlung der Arbeiten von Frenkel' (1. Band s. dies. Zbl. 71, 414).

● Richards, Paul I.: Manual of mathematical physics. London-New York-Paris-Los Angeles: Pergamon Press Ltd. 1959. XI, 486 p. £ 5.10 s.

Dieses Buch ist ein ausgezeichnet gelungener Versuch, die bei dem heutigen Entwicklungsstande der Physik und ihrer mathematischen Methoden geradezu entmutigend erscheinende Aufgabe zu bewältigen, die Grundlagen der theoretischen Physik und der zu ihrer Formulierung verwendeten Mathematik in einem handlichen Bande von 486 Seiten darzustellen und dem Physiker ein Hilfsmittel bereitzustellen, dessen er sich bedienen kann, wenn es gilt, Erinnerungen aufzufrischen oder etwa bei ihm neu aus der Literatur entgegentreteende Überlegungen und deren Verankerung auf dem gegenwärtig als gesichert geltenden Fundament der Theorie sich zu vergegenwärtigen. Der erste Abschnitt behandelt in 6 Kapiteln auf 250 Seiten die Grundlagen der klassischen Physik sowie der Quantenmechanik, Relativitätstheorie und Statistik. Dabei wird sowohl auf eine klare Darstellung der fundamentalen Begriffe und der gedanklichen Zusammenhänge der Aussagen einer jeden Disziplin Wert gelegt, als auch, was besonders hervorzuheben ist und wodurch das Buch für den Theoretiker erst besonders wertvoll wird, darauf, daß der Leser in einer Weise informiert wird, die ihn in Stand setzt, das praktische Arbeiten eines Formalismus bei speziellen Fragestellungen zu übersehen. Während aus den der klassischen Physik gewidmeten Kapiteln vielleicht die Behandlung der linearen Netzwerke und die Grundlagen der Informationstheorie hervorzuheben wäre, enthält das quantenmechanische Kapitel die Grundlagen und wichtigsten Ergebnisse der Quantenelektrodynamik bis zu Erwähnung des Renormierungsproblems. Das „Statistische Physik“ überschriebene Kapitel enthält zur großen Überraschung des Ref. nicht nur die Theorie der statistischen Methoden und Aussagen, sondern zahlreiche Streiflichter auf aktuelle Probleme allgemeinerer Natur etwa der Festkörperphysik (Bändermodell, Leitfähigkeits- und Transporttheorie). Der zweite Teil des Buches enthält in 16 Kapiteln die Darstellung der wichtigsten Gebiete der Mathematik, sofern sie für die Physik von Bedeutung sind. Natürlich muß auf Beweise verzichtet werden, dennoch treten die theoretischen Zusammenhänge durchsichtig hervor. Obgleich auf Zusammenstellung von Formelmateriale, welches man reichhaltig in speziellen Tabellenwerken findet, weitgehend verzichtet wird, ist die Darstellung auch in diesem Abschnitt stark nach dem Gesichtspunkt praktischer Anwendbarkeit angelegt. Im ganzen ist das Buch mit E. Madelungs „Mathematischen Hilfsmitteln des Physikers“ vergleichbar, welches sich jedoch im physikalischen Teil mehr auf die Grundlagen beschränkt und im mathematischen Teil Tabellen und Formelsammlungen stärker hervortreten läßt, so daß man mit Gewinn beide Werke einander ergänzend benutzen wird.

H. Stolz.

Mechanik:

Četaev, N. G.: On the extension of the optical-mechanical analogy. PMM J. appl. Math. Mech. **22**, 678—681 (1959), Übersetz. von Priklad. Mat. Mech. **22**, 487—489 (1958).

Die bekannte Hamiltonsche Analogie zwischen Mechanik und Optik wird etwas erweitert. Ein holonomes, dynamisches System n -ten Freiheitsgrades in den generellen Koordinaten q_1, q_2, \dots, q_n habe die Potentialfunktion $U(q)$ und die kinetische Energie $T = \frac{1}{2} \sum g_{ik} p_i p_k$, wo die p_v die generellen Impulse bedeuten. Die Hamilton-Jakobische partielle Differentialgleichung lautet dann $\sum g_{ik} (\partial V / \partial q_i) (\partial V / \partial q_k) = 2(U + h)$ mit h als Energiekonstanten. Bedeutet $\Phi(-ht + V)$ eine zweimal differenzierbare Funktion, so stellt die Gleichung

$$2(U + h)h^{-2}(\partial^2 \Phi / \partial t^2) = \sum \partial(g_{ik} \partial \Phi / \partial q_k) / \partial q_i$$

das Analogon zur Hamilton-Jakobigleichung in der Cauchy'schen Optik dar. Auf diese Analogie wird hingewiesen.

E. Hardtwig.

Kirgetov, V. I.: On transpositional relations in mechanics. PMM J. appl. Math. Mech. **22**, 682—693 (1959), Übersetz. von Priklad. Mat. Mech. **22**, 490—498 (1958).

Die Bewegungsgleichungen holonomer Systeme können aus dem Hamiltonschen Prinzip hergeleitet werden. Ob auch nicht-holonyme Systeme sich aus diesem Prinzip ableiten lassen, ist seit H. Hertz bezweifelt und wiederholt untersucht worden. Bei den holomenen Systemen hängt die Ableitbarkeit aus dem Hamiltonprinzip an der Gültigkeit der Vertauschungsrelationen $d\delta x = \delta dx$, $d\delta y = \delta dy$, $d\delta z = \delta dz$. Gelten entsprechende Relationen auch dann, wenn ein System N -ten Freiheitsgrades in den generellen Koordinaten q_1, q_2, \dots, q_N den m nichtholomenen Bedingungen

$$\dot{q}_v + \sum_{\tau=1}^{N-m} a_{v,m+\tau} \dot{q}_{m+\tau} + a_v = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, m)$$

unterworfen ist? Verf. zeigt nun: 1. Wenn die Variationen jeder kinematisch zulässigen Bewegung des Systems alle möglichen Vertauschungsrelationen erfüllen, dann ist das System der m nicht-holomen Bindungsgleichungen vollständig integrierbar. 2. Unter gewissen plausiblen Voraussetzungen sind die Operationen δ und $d(\)/dt$ für die letzten $N - m$ generellen Koordinaten vertauschbar, hinsichtlich der ersten m Koordinaten aber gilt der Satz, daß die Relationen $\delta \dot{q}_{s+1} = d\dot{q}_{s+1}/dt$ ($i = 1, 2, \dots, m - s$) immer dann und nur dann erfüllt sind, wenn zwischen den Koeffizienten a bestimmte partielle Differentialgleichungen I. Ordnung erfüllt sind.

E. Hardtwig.

● Cazin, Michel: Exercices de mécanique pour les classes de préparation aux grandes écoles. (Traité de physique théorique et de physique mathématique. 10.) Paris: Gauthier-Villars, Éditeur-Imprimeur-Libraire 1959. 70 p. 600.— Fr.

Ce petit livre fait partie d'une série d'ouvrages réunis par M. J. L. Destouches sous le titre général de „Traité de Physique théorique et de Physique mathématique“. Dans cette série a paru précédemment un „Cours de Mécanique“ fait par le même auteur en collaboration avec N. Dequoy et c'est sans doute à l'illustration de ce cours que le présent recueil d'exercices est destiné. Les applications et problèmes traités se rapportent d'une part à la cinématique (cinématique du point et du solide, théorie du mouvement relatif, mouvement plan) et d'autre part, à la dynamique du point matériel (les forces et champs de force, dynamique du point matériel libre et du point matériel lié à une courbe ou une surface polies). Les exercices sont bien choisis et traités avec élégance à l'aide d'un appareil mathématique réduit. Ils peuvent être compris aisément par un lecteur ayant passé une année à l'Université. Il faut toutefois regretter la présentation très peu claire de la table des matières qui rend malaisé le choix de telle ou telle catégorie d'exercices.

N. Forbat.

● Naumov, A. L.: Theoretische Mechanik. Teil 2: Mechanik des unfreien Systems. Der absolut starre Körper. [Teoretičeskaja mehanika. Čast' 2: Mehanika nesvobodnoj sistemy. Absolutno tvordoe telo.] Kiev: Verlag der Staatlichen T. G. Ševčenko-Universität 1958. 318 S. R. 8.10 [Russisch].

(Teil 1s. dies. Zbl. 77, 173). — Der zweite Teil des Buches behandelt die Mechanik der nichtfreien materiellen Systeme und der starren Körper. Er folgt denselben Richtlinien wie im ersten Teil. Der Stoff ist klassisch mit Ausnahme einiger Paragraphen die sich auf Anwendungen der klassischen Theorie in der Relativitätstheorie und in der Quantenmechanik beziehen, nämlich: Kanonische Gleichungen der Quantenmechanik; Satz von Ehrenfest (§ 33); Das Prinzip von Ostrogradsky-Hamilton in der Relativitätstheorie (§ 39); Das Prinzip von Euler-Lagrange in der Quantenoptik; Das Fermat'sche Prinzip des kleinsten Lichtweges (§ 40); Quantentheoretische Methode zur Untersuchung der Bewegung eines harmonischen Oszillators mit einem Freiheitsgrad (§ 50). Der Begriff der idealen Bindungen wird auf Grund des Energieerhaltungssatzes als Grenzwert der realen Bindung abstrahiert. Auf diese Art und Weise wird nach Verf. eine volle Erklärung des physikalischen Wesens des Prinzips von d'Alembert und des Prinzips der virtuellen Arbeit ermöglicht. Nach den beiden einführenden Kapiteln über die grundsätzlichen Begriffe und Definitionen und über Beispiele unfreier Systeme, wie auch über Systeme mit idealen Bindungen führt Verf. die verallgemeinerten Koordinaten ein, mit denen er nur die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Ordnung aufbaut. Er wendet sie an, indem er das physikalische, das sphärische, das konische und das elliptische Pendel betrachtet. Die Variationsprinzipien (als Extremalsätze) der Mechanik sind ausführlich betrachtet: das Prinzip der stationären Wirkung von Ostrogradsky-Hamilton; das Prinzip der kleinsten Wirkung von Euler-Lagrange; das Gaußsche Prinzip des kleinsten Zwanges. Ziemlich ausführlich ist auch die Theorie der kleinen Schwingungen nebst allerlei Anwendungen entwickelt. Aus dem Kapitel „Mechanik der starren Körper“ sind besonders die gyroskopischen Bewegungen untersucht worden. Es wird auch die Theorie des Stoßes gelegentlich betrachtet, dagegen nicht die Gleichungen der nicht-holonomen Systeme, die heute sehr aktuell geworden sind; die Theorie der kleinen Schwingungen ist nur auf Grund des Satzes von Lejeune-Dirichlet, nicht aber der Stabilitätstheorie von Ljapunov behandelt. — Das Buch ist knapp und präzise geschrieben. Es ist den Studierenden der Physik nützlich. *Bl. Dolaptschiew.*

Broman, Arne: A mechanical problem by H. Whitney. Nordisk mat. Tidskrift 6, 78—82, 95—96 (1958).

The following problem, described by Courant and Robbins (What is Mathematics? New York 1941, pp. 319—321) is solved: A carriage, moveable on a straight fixed horizontal rail, performs a prescribed motion: $s = f(t)$, $0 \leq t \leq T$, with $\dot{s} = 0$ at $t = 0$ and $t = T$. A rod is fixed by means of a frictionless hinge at its lower end to the carriage, such that it can rotate in the vertical plane containing the rail. At $t = 0$ the inclination Φ of the rod to the horizontal is α , while $\Phi = \beta$ when $t = T$. Is it possible to choose α such that $\beta = \frac{1}{2}\pi$? Courant and Robbins (loc. cit.) give an affirmative answer on the assumption that β is a continuous function of α . The author re-establishes this result by means of a thorough discussion of the equation of motion, having assumed that \dot{f} is continuous. *H. Rund.*

Fáy, L.: Ein Verminderungsverfahren für den mittleren Fehler bei Trägheitsnavigation. Z. angew. Math. Mech. 39, 326—327 (1959).

Krbek, F. v.: Ausführungen zur Ergodentheorie. Wiss. Z. Univ. Greifswald math.-naturw. R. 9 (1959/60), 1—4 (1959).

Einführende Betrachtungen über die kanonischen Gleichungen der Mechanik. Bahnen im Phasenraum und Ergodentheorie. *H. Günzler.*

Mozniker (Moznicker), R. A.: Effect of a uniform magnetic field on the natural vibrations of mechanical systems. *Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR* 1959, 847—851 russ. und engl. Zusammenfassg. 851—852 (1959) [Ukrainisch].

An investigation of the effect of a uniform magnetic field on the natural vibrations of mechanical systems has shown it to be quite significant in a number of cases. Simple formulae have been developed for the determination of the natural frequency, taking into consideration the effect of the magnetic field. Experimental results are in good agreement with the results obtained in this study. Engl. Zusammenfassg.

Grindei, I.: Sur l'équivalence des systèmes mécaniques non holonomes. *An. şti. Univ. „Al. I. Cuza“ Iaşi. n. Ser., Sect. I* 3, 197—205, russ. Zusammenfassg. 205 (1957).

L'A. s'occupe des systèmes mécaniques à liaisons non holonomes générales de la forme (1) $B_{\alpha i} \ddot{x}^i + B_{\alpha 0} = 0$, où les coefficients B dépendent de la position (x^i), de la vitesse et du temps. En partant du principe de la moindre contrainte de Gauss, il arrive au système (2) $\tau_i = Q_i + \lambda_{\sigma} B_{\sigma i}$ où τ_i est le binome de Lagrange. En éliminant \ddot{x}^i entre (1) et (2), on arrive à un système d'équations qui définit les λ_{σ} en fonction de \dot{x}^i, \dot{x}^j, t . Les équations (2) deviennent ainsi les équations du mouvement d'un système holonome avec les forces $Q_i + \lambda_{\sigma} B_{\sigma i}$. Ce résultat généralise un théorème du à Agostinelli pour les systèmes mécaniques non holonomes à liaisons linéaires dans les vitesses et scléronomes (ce Zbl. 71, 393). Dans la deuxième partie du travail, l'A. montre comment on peut étendre aux systèmes non holonomes généralisés certains résultats qu'on connaît sur l'équivalence des systèmes mécaniques holonomes scléronomes. *M. Haimovici.*

Bressan, Aldo: Sulle sollecitazioni lagrangiane, dipendenti anche dall'atto di moto, e derivanti da un potenziale generalizzato. *Rend. Sem. mat. Univ. Padova* 28, 263—279 (1958).

Vorgelegt ist ein holonomes System von N Freiheitsgraden q_1, \dots, q_N , das N generellen, eingepprägten Kräften $Q_h(q|\dot{q}|t)$ unterworfen ist. Wie müssen diese Kräfte beschaffen sein, damit sich das System von einer Lagrange-funktion $L(q|\dot{q}|t) = T + V(q|\dot{q}|t)$ ableiten lasse? Mit der Beantwortung dieser Frage befaßt sich die Arbeit. Sei $V(q|\dot{q}|t) = \sum \alpha_h(q|t) \dot{q}_h + U(q|t)$ die „verallgemeinerte Potential-funktion“, so müssen die Q_h von der Form sein

$$Q_h(q|\dot{q}|t) = -d(\partial V/\partial \dot{q}_h)/dt + \partial V/\partial q_h, \quad (h = 1, 2, \dots, N).$$

Anders formuliert: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die $Q(q|\dot{q}|t)$ ein verallgemeinertes Potential $V(q|\dot{q}|t)$ gestatten, lautet

$$Q_h(q|\dot{q}|t) = -\sum_k^N \left(\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_h} - \frac{\partial \alpha_h}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial U}{\partial q_h} - \frac{\partial \alpha_h}{\partial t} \quad (h = 1, 2, \dots, N),$$

wo die α_h und U allein von den q_1, q_2, \dots, q_N und t abhängen. Mit dem Ausdruck $T = \frac{1}{2} \sum \tau_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k + \sum \tau_h \dot{q}_h + \tau$ für die kinetische Energie lautet die Lagrange-funktion dann $L = \frac{1}{2} \sum \tau_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k + \sum \gamma_h \dot{q}_h + \delta$, wo nun $\gamma_h = \tau_h + \alpha_h$, ($h = 1, \dots, N$) und $\delta = \tau + U$ bedeuten. Ein weiterer Satz befaßt sich mit den Impulsintegralen: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein System der oben beschriebenen Art Impulsintegrale hinsichtlich der q_1, q_2, \dots, q_m besitze, besteht darin, daß die τ_{hk} und die γ_h, δ von diesen Variablen nicht abhängen. Von diesen Sätzen ausgehend, werden weiterhin Systeme betrachtet, in denen die eingepprägten Kräfte von der Potenz Null sind. *E. Hardtwig.*

Brunštejn, R. E. und A. E. Kobrinskij: Periodische Bewegungen eines Systems, das eine kleine Kugel im Hohlraum enthält. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk, Mech. Mašinostr.* 1959, Nr. 1, 10—21 (1959) [Russisch].

Eine Masse M bewegt sich geradlinig unter dem Einfluß der Kraft $P \cos \omega t$. In einem rechtwinkligen Hohlraum von M befindet sich eine Kugel mit der Masse m . Untersucht werden periodische Bewegungen, bei denen in der Zeit $2\pi\omega^{-1}(2n+1)$,

$n = 0, 1, 2, \dots$, genau zwei Zusammenstöße von M und m erfolgen (einer links und einer rechts). Zunächst wird mit elementaren Mitteln festgestellt, daß höchstens $2n$ verschiedene Bewegungen dieser Art denkbar sind. Um nachzuweisen, welche Bewegungen tatsächlich möglich sind, wird am linearisierten System eine Stabilitätsprüfung durchgeführt, die unbefriedigend verläuft, da sämtliche Wurzeln β_i der erhaltenen charakteristischen Gleichung dem Betrage nach ≥ 1 sind. Daß im Fall $|\beta_i| = 1$ tatsächlich stabile periodische Lösungen vorliegen, wird durch einen Hinweis auf Experimente belegt. Zum Schluß wird der Fall vollkommen unelastischer Zusammenstöße kurz erörtert. P. Sagirow.

Fried, Burton D.: General formulation of powered flight trajectory optimization problems. *J. appl. Phys.* 29, 1203—1209 (1958).

Für den Entwurf von unbemannten Flugkörpern, die große Strecken fliegen sollen, ist es wichtig, die günstigste Flugbahn und den günstigsten zeitlichen Schubverlauf der Raketentriebwerke zu finden. Diese Aufgabe läßt sich grundsätzlich mit bekannten Mitteln der Variationsrechnung behandeln; doch bietet die Lösung der Aufgabe in geschlossener Form Schwierigkeiten. Sie wurde z. B. für den Fall gefunden, daß die aerodynamischen, auf den Flugkörper wirkenden Kräfte vernachlässigbar klein sind und daß die auf den Flugkörper wirkende Gravitationsbeschleunigung während der Brenndauer des Raketentriebwerkes als konstant angesehen werden kann. In der vorliegenden Arbeit werden diese Annahmen insofern fallengelassen, als die Veränderung der Gravitationsbeschleunigung mit der Entfernung von der Erdoberfläche berücksichtigt wird und für den Teil der Flugbahn nach Brennschluß des Raketentriebwerkes die auftretenden aerodynamischen Kräfte als Funktion der Geschwindigkeit und des Ortes in die Rechnung eingeführt werden. Die sich hierbei ergebenden Lösungsmöglichkeiten der Aufgabe werden diskutiert. G. Bock.

Kalinovič (Kalinovich), V. N.: On the circulation of an object on the earth's surface. *Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR* 1959, 837—841. russ. und engl. Zusammenfassg. 841 (1959) [Ukrainisch].

Formulae are derived for the change in the northern and eastern components of the linear velocity of an object moving along a circle on the Earth's surface. It is shown that the formulae $V \cos \omega t$ and $V \sin \omega t$, which are ordinarily applied to describe this form of motion are inaccurate, being the first approximation of the formulae derived in the article. It is further demonstrated that with large radii of circulation the application of the usually applied formulae may lead to considerable errors in the determination of the northern and eastern components of the linear velocity of the object. The motion taking place in conformity with the formulae $V \cos \omega t$ and $V \sin \omega t$ is not circulation, but a motion along some closed curve inscribed in a spherical zone. Engl. Zusammenfassung.

Liu, V. C.: Theory of flight of the sounding rocket. *J. appl. Mech.* 26, 127—129 (1959).

Für die Erforschung der oberen Atmosphäre werden Flugkörper mit Raketenantrieben verwendet, die mit Meßköpfen ausgerüstet sind. Um möglichst große Flughöhen zu erreichen, steigen die Flugkörper annähernd senkrecht zur Erdoberfläche auf. Die Berechnung der Flugbahn solcher Flugkörper wird vorläufig meist mit Hilfe einer schrittweisen Integration durchgeführt, die zeitraubend ist. Um eine geschlossene Lösung zu erhalten, setzt Verf. die Abhängigkeit des Luftwiderstandes des Flugkörpers von der Mach-Zahl in einer solchen Form an, daß sich die Differentialgleichung der Bewegung integrieren läßt. Zur Erleichterung der Bahnrechnung gibt Verf. einige Hilfskurvenblätter. G. Bock.

Kotova, L. N.: A linearized estimate of the error involved in the numerical integration of the simultaneous differential equations of the fundamental problem of external ballistics. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 121, 418—421 (1958) [Russisch].

Verf. zitiert eine noch nicht publizierte Fehlerabschätzung von S. M. Lozinskij für Systeme simultaner Differentialgleichungen erster Ordnung und wendet diese an für die Fundamentalgleichungen der Ballistik $\dot{u} = -c G(v) H(y) u$, $\dot{w} =$

$= -c G(v) H(y) w - g, \dot{x} = u, \dot{y} = w, v^2 = u^2 + w^2, c = \text{Konstante} \neq 0, G(v) \text{ und } H(y) \text{ gegebene Funktionen.}$ Die Formel der Fehlerabschätzung wird für diesen Fall vollständig aufgeschrieben. Für $H(y) = e^{-\lambda y}$ und $G(v) = F(v)/v, F(v)$ die Widerstandsfunktion der Luft nach zwei Gesetzen, unter welchen das „Gesetz vom Jahre 1943“ sehr genau sein sollte, werden einige numerische Resultate gegeben.

E. M. Bruins.

Onicescu, O.: Die Mechanik des starren Körpers. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Méc. appl. 3, 179—184 (1958).

L'A. a pour but d'établir sous forme hamiltonienne les équations du mouvement d'un solide libre. Il introduit à cet effet, à côté des coordonnées cartésiennes du centre de masse, des coordonnées angulaires et des quasi-coordonnées. Les équations du mouvement s'obtiennent par l'annulation de la différentielle extérieure d'une forme de Pfaff attachée au solide. Le coefficient de δt dans cette forme de Pfaff est une „fonction d'état“ H des momentoides correspondants et des quasi-coordonnées qui est ensuite construite par l'A. Cette méthode lui permet de traiter également les cas où le solide est dans un champ de force et est soumis à les liaisons. L'A. emploie dans son travail un langage qui semble impliquer que sa méthode serait conforme à la mécanique de la relativité restreinte. On sait les difficultés que l'on rencontre lorsque l'on veut interpréter, dans l'Univers de Minkowski, la notion de mouvement d'un solide indéformable. C'est pourquoi le recenseur ne voudrait pas le suivre sur ce terrain.

N. Forbat.

Magnus, K.: Der schwere symmetrische Kreisel in kardanischer Lagerung. Ingenieur-Arch. 28, Festschrift Rich. Grammel, 184—198 (1959).

Die Bewegung des kardanisch gelagerten, schweren, symmetrischen Kreisels ohne Lagerteilung wird in den Eulerschen Winkeln ψ, ϑ, φ auf Quadraturen zurückgeführt, falls die Drehachse des äußeren Kardanrings lotrecht steht und die Figuren-, Knoten- sowie Querachse Trägheitshauptachsen des inneren Kardanringes sind. Als Hauptgleichung ergibt sich für $u \equiv \cos \vartheta$ ($\vartheta =$ Winkel zwischen den Kardanringen) die Differentialgleichung

$$(du/dt)^2 = U(u) \equiv (1 - u^2) [(k_4 - k_3 u) - (k_2 - k_1 u)^2 / (k_5 - k_6 u^2)],$$

wobei die Festwerte k_i durch die Masse und die Drehmassen des Kreisels, die Drehmassen der Kardanringe, den Abstand des Schwerpunkts vom Stützpunkt sowie durch den Anfangsdrehstoß bestimmt sind. Da die Kreiselfunktion $U(u)$ gebrochen-rational ist, sind die Integrale nicht in vertafelten Funktionen ausdrückbar. Numerische Beispiele sowie Versuchsergebnisse zeigen einige Bewegungstypen sowie den Einfluß der Drehmassen der Kardanringe (Auswanderungserscheinungen, Umkehr der Präzessionsrichtung u. a.). Auch reguläre Präzessionen sind möglich; ein gesenkter Kreisel kann stets deren zwei mit entgegengesetztem Drehsinn ausführen, während der gehobene Kreisel nur dann zwei (gleichläufige) Präzessionen vollziehen kann, wenn eine gewisse Ungleichung erfüllt ist. Die Stabilität der lotrechten Stellung der Figurenachse ergibt sich nach der Methode der kleinen Schwingungen. Stabilitätsbedingung und Präzessionsgleichung hängen auch hier miteinander zusammen. Schließlich liefert das Phasenporträt $\dot{\vartheta}(\vartheta), \dot{\varphi}(\vartheta)$ eine sehr anschauliche Übersicht über die Gesamtheit der Kreiselbewegungen mit Einschluß der Stabilitätsverhältnisse.

K. Zoller.

Metelieyn, I. I.: Kreiselsysteme mit nichtidealen Kopplungen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk, Mech. Mašinostr. 1959, Nr. 1, 3—9 (1959) [Russisch].

Unter nichtidealen Kopplungen werden Kopplungskräfte infolge der Coulombschen Reibung in den Lagern von Kreiseln oder ihrer Aufhängevorrichtungen verstanden. Die allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art werden unter Berücksichtigung dieser Reibungskräfte aufgestellt, und es werden einige allgemeine Folgerungen daraus gezogen. Dabei müssen die Fälle der ruhenden und der gleitenden

Reibung gesondert behandelt werden. Es zeigt sich allgemein — und wird am Beispiel eines Kreisels mit zwei Freiheitsgraden veranschaulicht — daß Coulombsche Reibungen zu Reaktionsmomenten führen können, die, wie die Reibungen einer zähen Flüssigkeit, der Drehgeschwindigkeit proportional sind. Dieser Effekt erklärt sich aus der Tatsache, daß die Reibungskräfte dem Normaldruck, dieser aber über die Kreiselkräfte der Präzessionsgeschwindigkeit proportional sind. Bei Zusammenwirken von Gewichts- und Kreiselkräften sind jedoch auch kompliziertere Abhängigkeiten der Reibungsmomente möglich.

K. Magnus.

Weidenhammer, F.: Erzwungene Präzession des symmetrischen Kreisels bei lotrechter Erschütterung. Z. angew. Math. Mech. 38, 480—483 (1958).

Bei entsprechendem Anfangsdrehstoß führt ein schwerer, symmetrischer Kiesel mit konstanter Eigendrehgeschwindigkeit ω_e bei hochfrequenter lotrechter Wechselverschiebung $u = u_0 \cos \omega t$ seines Stützpunktes eine Bewegung aus, deren Eulersche Winkel in 1. Näherung durch

$\vartheta = \vartheta_0 - \varepsilon \sin \vartheta_0 \cos \omega t + O(\varepsilon^2)$, $\psi = \text{const} + \omega_{p0} t - \varepsilon (\omega_{p1}/\omega) \sin \vartheta_0 \sin \omega t + O(\varepsilon^2)$ gegeben sind. Hier ist der aus der Kreiselmasse m , dem Abstand s des Schwerpunkts vom Stützpunkt, der äquatorialen Drehmasse A und der Verschiebeamplitude u_0 gebildete Parameter $\varepsilon \equiv m s u_0 / A \ll 1$. Die Bewegung besteht also im wesentlichen aus einer regulären Präzession $(\vartheta_0, \omega_{p0})$ um die Lotlinie, der sich eine kleine harmonische Störbewegung überlagert. Die Präzessionsparameter genügen der Beziehung

$$(C - A) \omega_{p0}^2 \cos \vartheta_0 + C \omega_e \omega_{p0} + m g s (1 + m s u_0^2 \omega^2 \cos \vartheta_0 / 2 g A) = 0,$$

d. h. der Präzessionswinkel ϑ_0 ist infolge der Erschütterung ausgewandert ($C =$ axiale Drehmasse).

K. Zoller.

Francia, Giovanni: Le vibrazioni autoeccitate nell'attrito radente. Univ. Genova, Pubbl. Ist. Mat. Nr. 64, 19 p. (1959).

L'A. étudie au point de vue théorique et expérimental les vibrations entretenues (oscillations de relaxation) d'un patin en contact avec une roue circulaire tournant à vitesse angulaire constante autour de son axe de symétrie fixe. Le patin est rappelé dans sa position d'équilibre par un ressort linéaire, subit une force de résistance visqueuse proportionnelle à sa vitesse absolue et, à cause de son contact avec le périmètre de la roue, également une force de frottement de glissement que l'A. suppose d'abord constante. On examine les divers cas qui peuvent se présenter suivant que la vitesse du patin reste ou ne reste pas constamment inférieure à celle de la roue à son périmètre. On montre aussi que la loi du mouvement du patin dépend en outre du signe, à l'instant où la vitesse relative est nulle, de la différence entre la somme de la force de rappel du ressort et de la force de résistance visqueuse d'une part et la force de frottement au repos d'autre part. De la discussion faite, on déduit la condition de stabilité dynamique du patin. L'A. rend compte enfin de résultats expérimentaux, obtenus à l'aide de photographies ultra-rapides, dans le cas d'un corps entraîné sur un sol horizontal et dans celui des vibrations auto-excitées des instruments à arc. Il montre également que le cas où la force de frottement est fonction linéaire de la vitesse relative se ramène aisément à celui qu'il étudie.

N. Forbat.

Müller, H.: Eine Bemerkung zur Frage der Verwendung Lagrangescher Koordinaten in der Physik nichtlinearer Schwingungen. Experientia 14, 166—167 (1958).

Die Bewegung einer frei schwingenden Seite wird in Lagrangeschen Koordinaten durch zwei nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschrieben: $F[x, y] = 0$, $G[x, y] = 0$. Für kleine Schwingungen folgt hieraus durch Linearisierung die übliche Wellengleichung $H[y] = 0$. Ist $\bar{y}(x, t)$ eine Lösung von $H = 0$, und berechnet man zu diesem y die Bogenlänge s als Funktion von x und t , so erhält man durch Einsetzen $G[x, y] = H[y] - \zeta(x, t)$. Das Verhalten der gemäß $H = 0$

frei schwingenden Seite stimmt also in einer gewissen Näherung — die naturgemäß über die lineare Näherung hinausgeht — mit dem Verhalten einer angeregt schwingenden Seite überein, deren unangeregte Schwingung durch $F = 0$, $G = 0$ beschrieben wird.

C. Heinz.

• **Weigand, A.:** Einführung in die Berechnung mechanischer Schwingungen. Bd. II. Berlin: VEB Verlag Technik 1958. 176 S.

(Band I: Berlin 1955) — Dieses Lehrbuch gibt für den interessierten Ingenieur zahlreiche Anregungen für die Berechnung gekoppelter Schwingungen. Alle Schwingungen werden als linear vorausgesetzt. Zunächst betrachtet Verf. Schwingungen von zwei Freiheitsgraden, später allgemeinere Bewegungen von n Freiheitsgraden. Weitgehend wird die komplexe Rechnung benutzt. Verf. greift einzelne Fragestellungen heraus und führt diese bis zur numerischen Lösung. Zur Frage der Einschaltprobleme werden einige Elemente der Laplacetransformation entwickelt.

W. Haacke.

Evangelisti, Giuseppe: Funzioni di trasferimento e caratteristiche di stabilità delle addizioni idroelettriche. I, II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 24, 679—685; 25, 52—64 (1958).

Betrachtet wird der Regelkreis Freistrahlturbine — elektrischer Generator. Es wird angenommen, daß Führungsgröße (die vorgeschriebene Drehzahl) und Störgröße (Schwankungen im Verbrauchernetz) bekannte Funktionen der Zeit sind. Im ersten Beitrag berechnet Verf. unter recht allgemeinen Voraussetzungen die Übertragungsfunktion, welche den Zusammenhang zwischen Düsenöffnung und Leistung beschreibt. Der erhaltene Ausdruck ist sehr kompliziert und für nähere Untersuchungen ungeeignet. Deswegen werden im zweiten Beitrag vereinfachende Voraussetzungen getroffen (Vernachlässigung von Zeitkonstanten usw.) und dann einige Sonderfälle auf Stabilitätsverhalten geprüft.

P. Sagirow.

Stewartson, K.: On the stability of a spinning top containing liquid. With an appendix by G. N. Ward. J. Fluid Mechanics 5, 577—589, Appendix. Ibid. 589—592 (1959).

Es wird die Stabilität eines schweren Kreisels untersucht, der in seinem Innern einen zylindrischen, teilweise mit Flüssigkeit gefüllten Hohlraum besitzt. Die unter zahlreichen Vernachlässigungen durchgeführten Berechnungen zeigen, daß eine doppelt unendliche Zahl von instabilen Bereichen existiert, die als Resonanzen der verschiedenen Eigenschwingungen der Flüssigkeit mit der Nutationschwingung des leeren Kreisels gedeutet werden. Für den wichtigsten Instabilitätsbereich werden die Grenzen angegeben. Versuche von Ward bestätigen zwar die Lage dieses Bereichs, zeigen aber, daß seine Breite über dreimal größer ist, als von der Theorie vorausgesagt wurde. Die möglichen Deutungen für diese Diskrepanz werden besprochen.

K. Magnus.

Appeltauer, Iosif und Decebal Anestesescu: Energetische Betrachtungen in der Baumechanik. Bul. şti. tehn. Inst. politehn. Timişoara, n. Ser. 2 (16), Nr. 2, 215—226, deutsche und russ. Zusammenfassg. 226 (1957) [Rumänisch].

In der vorliegenden Arbeit leitet man das Kräfte-, Formänderungs- und Kräfte-Formänderungsverfahren zur statischen und dynamischen Berechnung der ebenen Stabwerke, wie auch zum Stabilitätsnachweis mittels energetischer Betrachtungen ab. Die aus dem Hamiltonschen Prinzip erhaltenen Prinzipien der virtuellen Verrückungen und virtuellen Kräfte erlangen in der Baumechanik die Form der Mohrschen Arbeitsgleichung. Die praktisch wichtige Gegenseitigkeit der Verschiebungskräfte erweist sich als allgemeingültig, falls nur die virtuellen Verrückungen folgerichtig erteilt werden.

Zusammenfassg. der Autoren.

Meyer zur Capellen, W.: Die zyklischen Kurven und die Kurbelschleife. Forsch. Gebiete Ingenieurwesen 24, 178—186 (1958).

Der Geschwindigkeitsverlauf eines Bahnpunktes der durch Abrollen eines Rades auf einem anderen erzeugten Zykloiden läßt sich durch einen polaren Hodographen darstellen. Dieser wiederum kann durch eine Kurbelschleife nachgebildet werden,

was zur Ermittlung der Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Krümmungen und Bogenlängen aus der kinematischen Erzeugung heraus benutzt wird. So ergibt sich z. B. aus der Geschwindigkeit des Bahnpunktes sein zurückgelegter Weg als Bogenlänge. Es zeigt sich, daß der Ballsche Punkt mit dem Wendepol und dem Beschleunigungspol zusammenfällt. Die doppelte Erzeugung der zyklischen Kurven wird berücksichtigt. Für Evolventen läßt sich die gleiche Behandlungsweise anwenden, weil der Hodograph in seinem Verlauf der aus der Kurbelschleife entwickelten Schubschleife entspricht.

A. Hückler.

Meyer zur Capellen, W.: Die zweidimensionale Fourieranalyse spezieller Koppelkurven. Z. angew. Math. Mech. 39, 31—40 (1959).

Geschlossene Kurven (Bahnen) können durch eine zweidimensionale Fourieranalyse dargestellt werden. Der Vektor eines Bahnpunktes hat dann die Form $\delta = \delta_0 + \sum_{m=1,2,\dots} \delta_m$: Der feste Ortsvektor δ_0 ist der Mittelpunkt der Grundschiebungsellipse, die durch elliptische Schwingungen höherer Frequenz zur Koppelkurve überlagert wird. Die Bestimmung der Fourierkoeffizienten wird über die kartesischen Komponenten der Koppelkurve durchgeführt, wobei nur der cosinus und der sinus des Koppelwinkels harmonisch analysiert zu werden braucht. Von Sonderfällen abgesehen ist die Koeffizientenbestimmung schwierig, wird jedoch mit Instrumenten vereinfacht. Die gefundenen Koeffizienten bilden sich aus der Form und den Abmessungen der Getriebe. Als einfache Sonderfälle werden die gegenläufige und die gleichläufige Antiparallelkurbel durchgerechnet. Die Koppelkurven der ersten ergeben sich mit einer Ellipse als Grundschiebung und Kreisschwingungen als Oberschwingungen. Bei der gleichläufigen Antiparallelkurbel stellen als Grund- und Oberschwingungen nur Kreisschwingungen die Koppelkurve dar, also höhere Radkurven, näherungsweise zyklische Kurven.

A. Hückler.

Hirschhorn, J.: The synthesis of a four-bar mechanism for prescribed extreme values of the angular velocity of the driven link. J. appl. Mech. 25, 349—351 (1958).

Die früher vom Verf. mitgeteilte Komponenten-Methode in kartesischen Koordinaten [J. appl. Mech. 24, 22—24 (1957)] wird auf Kurbelschwinke und Doppelkurbel angewendet: Konstante Winkelgeschwindigkeit des Abtriebsgliedes, Minimum und Maximum der Winkelgeschwindigkeit des Abtriebsgliedes und die Gestellänge sind gegeben. Es ergibt sich zur Bemessung der übrigen Glieder eine kubische Gleichung zweier Unbekannten, den Winkelgeschwindigkeiten der Koppel in den beiden ausgezeichneten Lagen. Für ein eindeutiges Ergebnis wird ein Kriterium zur Annahme der einen Unbekannten gegeben.

A. Hückler.

Keler, M. L.: Analyse und Synthese der Raumkurbelgetriebe mittels Raumliniengeometrie und dualer Größen. Forsch. Gebiete Ingenieurwes. 25, 26—32, 55—63 (1959).

Nach Einführung in die Algebra dualer Größen und Übertragung der Liniengeometrie in die duale Ebene zeigt Verf. die Anwendung auf die Analyse und Synthese sphärischer und allgemeiner Raumgetriebe.

W. Meyer zur Capellen.

Elastizität. Plastizität:

Clavuot, Christian und Hans Ziegler: Über einige Verfestigungsregeln. Ingenieur-Arch. 28, Festschrift Rich. Grammel, 13—26 (1959).

The strain-hardening function in stress-space proposed by Prager to account for the uni-axial Bauschinger effect and based on either the von Mises or the Tresca yield-condition is discussed in its various implication and for different states of stress and of strain. A modification of this condition is proposed which, however, does not produce significantly different results. The implications of the von Mises versus the Tresca yield-condition in formulating the hardening rule are discussed and critically evaluated.

A. M. Freudenthal.

Hill, R.: Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time. *J. Mech. Phys. Solids* **7**, 209—225 (1959).

Für die Spannungen s_{ij} und Verschiebungsgeschwindigkeiten v_i eines zu jedem Zeitpunkt t durch seine Begrenzungen und Werkstoffeigenschaften gegebenen Körpers gelte das Stoffgesetz (1) $\dot{s}_{ij} = f_{ij}(s_{kl}, \partial v_k / \partial x_l)$, wo die f_{ij} vom ersten Grade homogen in den $\partial v_k / \partial x_l$ sind und von deren „Vorgeschichte“ abhängen dürfen ($\dot{} = d/dt$). Δ bezeichne die Differenz zweier nach (1) gekoppelter Wertesysteme s, v . Gilt dann

$$(2) \quad \int \Delta \dot{s}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta v_j) dV > 0$$

(Volumenintegral über den Körper) für alle v_j , die gegebenen Randbedingungen genügen, so ist die Lösung \dot{s}_{ij}, v_j des Problems eindeutig. Gilt stets $\int \dot{s}_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dV > 0$, so ist sie statisch stabil (Ljapunoff). Stabilität bedingt Eindeutigkeit. Gilt $f_{ij} = \partial E / \partial (\partial v_j / \partial x_i)$, und ist die Potentialfunktion E im Sinne der Variationsrechnung konvex, so folgt (2). Für allgemeine quadratische E wird nach Art der Störungsrechnung die „Umgebung“ eines Materialparameters μ_0 untersucht, bei dem sich die Lösung verzweigt. — Entgegen der Behauptung des Verf. (S. 211, Z. 6) ist der Beweis von (2) nur unter Voraussetzung raumfester kartesischer Koordinaten richtig, was zur Annahme eines Stoffgesetzes (1) nur für kleine Verzerrungen berechtigt. Auf Grund späteren Vergleiches raumfester und körperfester Bezugssysteme zieht Verf. allerdings den Schluß, seine Ansätze seien im wesentlichen unbeeinflusst von der Koordinatenwahl.

H. Lippmann.

Olszak, W. and P. Perzyna: Variational theorems in general viscoelasticity. *Ingenieur-Arch.* **28**, Festschrift Rich. Grammel, 246—250 (1959).

Variational principles for anisotropic linear visco-elastic media are formulated with the aid of operational matrices, following the procedure developed by Biot for isotropic media.

A. M. Freudenthal.

● Martinola, Marzio: La détermination purement optique des constantes E, ν, G des matières isotropes transparentes. Contribution à l'étude des plaques minces fléchies d'épaisseur brusquement variable. (Publications du laboratoire de photoélasticité. No. 7.) Zürich: Éditions Leemann 1959. 70 p. SFr. 10,—.

Bei der Übertragung der an einem Modell erhaltenen spannungsoptischen Ergebnisse auf die sogenannte Hauptausführung (natürliches Bauelement) bzw. zum Vergleich dieser experimentellen Ergebnisse mit theoretischen Lösungen ist die Kenntnis der elastischen Materialgrößen von besonderer Wichtigkeit. Dies dürfte der Grund dafür sein, in Anlehnung an die im Photoelastischen Laboratorium der ETH. in Zürich benutzten Meßmethoden einige Verfahren zur Bestimmung von E, ν, G auszuarbeiten. Zunächst gibt Verf. einen Überblick über bisher vielfach benutzte Methoden. Hier finden z. B. Erwähnung: 1. Die gerade bei Glasstäben früher verwendete Methode nach A. König, welcher die Winkeldrehung mittels Spiegel bei der Biegung eines Balkens gemessen hatte; 2. die von A. Cornu angegebene Methode, bei der aus den Richtungen der Asymptoten eines Interferenzstreifensystems die Poissonsche Konstante ν bestimmt wurde und 3. die vielen Methoden, die auf die Messungen von Längs- und Querdehnung bei einem einachsigen Spannungszustand zurückgehen. Weiterhin gibt es mehrere dynamische Verfahren, die darauf zurückgehen, aus den Ausbreitungsgeschwindigkeiten elastischer Wellen die obigen Materialgrößen zu bestimmen. Eine elegante Methode ist weiter von Ch. Schäfer und L. Bergmann angegeben worden. Hier bestimmt man diese Größen aus der Lichtbeugung in einem Ultraschallfeld. Im 1. Teil dieser Arbeit wird auf die entwickelten optischen Verfahren eingegangen. Sie beruhen alle darauf, mittels einer geeigneten Interferenzanordnung, z. B. des im Photoelastischen Laboratorium der ETH. in Zürich oft benutzten Mach-Zehnder-Interferometers, Phasendifferenzen zu messen.

Diese ergibt sich durch die Veränderung der Phase der polarisierten Lichtwellen bei der Belastung einer Versuchsprobe. (Die optische Doppelbrechung wird hier im allgemeinen nicht gemessen!) Folgende Möglichkeiten werden aufgezeigt: 1. Ein Druckstab wird einmal in Luft und zum anderen in eine Flüssigkeit (Öl) eingebettet. Man mißt hier die Phasenänderung eines in Richtung der Stabachse linear polarisierten Lichtstrahles beim Durchgang senkrecht zur Stabachse beim Einbetten in Silikonöl. Aus den Meßdaten läßt sich ν/E berechnen. 2. Bestimmung des Drehwinkels eines bei reiner Biegung beanspruchten Balkenelementes aus der Messung der Phasenänderung bei einer Belastung. Aus dem Drehwinkel läßt sich sofort der Elastizitätsmodul errechnen. 3. Hier wird ebenfalls der Drehwinkel eines tordierten Flachstabes aus der Messung der Phasendifferenz bestimmt, die sich beim Anbringen eines Torsionsmomentes ergibt. Hier wird der Schubmodul G bestimmt. Die Phasendifferenzen ergeben sich aus der Tatsache, daß bei der Drehung der Balkenelemente eine Schrägdurchstrahlung stattfindet, wobei sich dann die optische Weglänge gegenüber derjenigen bei senkrechter Inzidenz ändert. — Die elastischen Materialgrößen wurden mit großer Genauigkeit für die Kunststoffe „Allite“ CR 39 und Araldit B bestimmt. Der 2. Teil hat als Inhalt einmal die Berechnung der durch eine Unstetigkeit der Plattenhöhe hervorgerufenen Änderung der Bieugungsmomente und zum anderen die experimentelle Überprüfung des abgeleiteten Sachverhaltes. Durch die Änderung der Plattenhöhe teilt sich die Platte in Zonen mit verschiedener Bieugungssteifigkeit auf, und es treten neben den Bieugungsspannungen noch Längskräfte, die also die Mittelebenen der einzelnen Zonen verformen, auf. Außerdem werden durch diese Längskräfte zusätzliche Momente hervorgerufen. Als Fälle wurden untersucht: 1. Am Rande frei drehbar gestützte Kreisplatte sowohl unter zentraler Last wie unter gleichmäßiger (nur vom Radius abhängiger) Belastung, deren Plattenhöhe innerhalb eines konzentrischen Kreises stärker war als in der Randzone. 2. Eine quadratische Platte, die nur an zwei gegenüberliegenden Rändern frei drehbar gestützt war. Die Änderung der Plattenhöhe erfolgte längs zu den Auflagerseiten paralleler Geraden. Die spannungsoptische Bestimmung der Längskräfte erfolgte jeweils an einer Platte aus „Allite“ CR 39 und die der Bieugungsmomente an Zweischichtenplatten aus „Allite“ CR 39 und Glas. Auf die Meßanordnungen wird hier nicht im einzelnen eingegangen, sondern auf die angegebene Literatur verwiesen. Korrigiert man nun die nach der Kirchhoffschen Theorie erhaltenen Ergebnisse im Hinblick auf die Wirkung der Längskräfte und verfährt in gleicher Weise mit den experimentellen Ergebnissen, so führen die einzelnen Korrekturen zu einer praktischen Übereinstimmung der einzelnen resultierenden Bieugungsmomente in den beiden Zonen.

H. Schwieger.

Chastenet de Géry, Jérôme: Une représentation intrinsèque simple du tenseur d'énergie de déformation (cas anisotrope) par des opérateurs linéaires de l'espace à trois dimensions. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 1765—1768 (1959).

Bei der Deformation eines elastischen Körpers werden die Vektoren des gewöhnlichen Raumes vermöge eines linearen, hermiteschen Operators \mathcal{L} wieder in Vektoren übergeführt. Die Operatoren dieser Art (Affinoren) bilden in ihrer Gesamtheit einen 6-dimensionalen Vektorraum, dessen Metrik durch die „Spur“ bestimmt ist, die ihrerseits ein skalares Produkt zweier Operatoren \mathcal{L}' und \mathcal{L}'' definiert. Die Dichte der Deformationsenergie ist im Falle der linearisierten Elastizitätstheorie eine quadratische Funktion des Operators \mathcal{L} , die homogen ist, wenn der Anfangszustand mit dem natürlichen zusammenfällt. In der Bezeichnungsweise von Brillouin ist $\alpha = \sum_{ij, hk} A^{ij, nk} e_{ij} e_{nk}$ der Ausdruck für die Energiedichte, wo die $A^{ij, hk}$ in den Indexpaaren i, j und h, k symmetrisch sind. Gezeigt wird, daß der Ausdruck für die Energiedichte sich vermöge der genannten Metrik sehr einfach durch die Komponenten eines gemischten, hermiteschen Tensors darstellen läßt. Diese neue

Form der Darstellung der Energiedichte hat den Vorteil, allein auf innere Eigenschaften des Mediums gegründet und damit von jeder Basisdarstellung und der Beziehungen zum gewöhnlichen, dreidimensionalen Raum frei zu sein. *E. Hardtwig.*

Drucker, D. C. and R. T. Shield: Bounds on minimum weight design. *Quart. appl. Math.* **15**, 269—281 (1957).

Die Aufgabe, ein Konstruktionsglied so zu dimensionieren, daß an allen Punkten die gleiche exakte Sicherheit gegenüber dem Bruch gewährleistet ist, setzt als Grenzfall die Kenntnis jener Konstruktionsform voraus, bei welcher die inneren Spannungen mit den äußeren Kräften gerade im Gleichgewicht stehen und gleichzeitig eine vorgegebene Fließbedingung erfüllen. Eine solche Konstruktion liefert bei homogenem Material mit dem geringsten Volumen zugleich das geringste Gewicht. In vorliegender Arbeit wird gezeigt, wie sich die Größe des Mindestvolumens durch zwei Theoreme in obere und untere Schranken einschließen läßt. Das erste Theorem sagt aus: Wenn sich ein Spannungsfeld finden läßt, welches im Inneren den Gleichgewichts- und an der Oberfläche den Randbedingungen genügt, aber nirgends den durch die Fließbedingung gekennzeichneten Grenzfall erreicht, dann erfolgt kein Bruch. Das zugehörige Volumen ist sicher größer als das Mindestvolumen. Ein Geschwindigkeitsfeld wird kinematisch zulässig genannt, wenn es einem möglichen plastischen Fließvorgang entspricht. Das zweite Theorem sagt: Läßt sich ein kinematisch zulässiges Geschwindigkeitsfeld angeben, für welches der zugehörige Dissipationsbetrag gleich oder kleiner ist als der Arbeitsbetrag der äußeren Kräfte, so ist der Bruch bereits eingeleitet. Das dieser Bedingung entsprechende Körpervolumen ist sicher kleiner als das Mindestvolumen. Das sich hieraus ergebende Verfahren wird an Spezialfällen näher erläutert, insbesondere im Falle der rotierenden Scheibe und der Sandwichplatte. *H. Neuber.*

Hoff, N. J.: The idealized column. *Ingenieur Arch.* **28**, Festschrift Rich. Grammel, 89—98 (1959).

A review of the basic concepts of elastic, plastic, and creep buckling is given in the paper. Ideal *I* section column is defined and applied to illustrate and explain the quantities of greatest interest in non-elastic buckling. Reduced modulus theory and Shanley's theory are compared. Stress reversal in a flange of the ideal *I* column is studied. Concepts of creep buckling are presented and a method of evaluation of critical values of deformation amplitudes is proposed. References are made to other papers of the same author where similar questions have been discussed.

A. Sawczuk.

Il'in (Ilyin), L. A.: Calculation of closed rotors of centrifugal blowers. *Dopovid Akad. Nauk Ukraïn. RSR* **1959**, 842—846, russ. und engl. Zusammenfassg. 846 (1959) [Ukrainisch].

A method is outlined for calculating closed rotors (impellers) of centrifugal blowers with radial vanes as a constructively orthotropic disk, lacking a plane of symmetry, in the elastic stage of the work of the material. The method is based on the hypothesis of the invariability of the linear elements parallel to the axis of rotation. The method takes into account the action of tension and bending. The covering disk, like the primary one, is taken into consideration on determining the elastic characteristics of the constructively orthotropic disk in its entirety. The problem is reduced to that of a system of two linear differential equations of the fourth order. Numerical methods are suggested for its solution, in view of the complexity of configuration of the impeller elements. *Engl. Zusammenfassg.*

Kaliski, S. and J. Kurlandzki: Cauchy's problem for a transversally isotropic elastic body. *Arch. Mech. stosow.* **10**, 825—838, russ. Zusammenfass. 838 (1958).

L'A. étudie le problème de Cauchy pour un corps élastique à isotropie transverse, c'est à dire il s'occupe des équations du mouvement; on connaît le déplacement et la vitesse du déplacement au moment initial. On utilise certaines fonctions de déplacement qui vérifient certaines équations aux dérivées partielles; on intègre ces équations à l'aide de la méthode de Fourier. À la solution générale des équations

homogènes, on ajoute la solution du système non-homogène, à conditions initiales nulles. La forme finale des composantes du vecteur déplacement est donnée.

P. P. Teodorescu.

Mewes, Ernst: Hilfsschaubilder für Bewegungsrechnungen, insbesondere zur Bestimmung der Lasten an Leitwerken im inkompressiblen Bereich. *Z. Flugwiss.* 6, 203—206 (1958).

Für die Festigkeitsberechnungen der Höhen- und Seitenleitwerke von Flugzeugen ist es erwünscht, die Kräfte zu kennen, die bei plötzlichen Steuerbewegungen an diesen Bauteilen auftreten. Um zu einem einfachen Berechnungsverfahren zu kommen, betrachtet Verf. das Flugzeug sowohl bei Betätigung des Höhenruders, als auch bei Betätigung des Seitenruders als einen Körper mit einem Freiheitsgrad. Als Ruderschaltverlauf wählt er einen linearen Anstieg des Ruderausschlages mit der Zeit bis zu einem maximalen Ausschlag, der dann konstant gehalten wird. In seiner Arbeit gibt Verf. eine Reihe von Diagrammen, aus denen man den Bewegungsablauf in diesen Fällen rasch finden kann.

G. Bock.

Rongved, Leif and J. T. Frasier: Displacement discontinuity in the elastic half-space. *J. appl. Mech.* 25, 125—128 (1958).

Der Spannungs- und Verschiebungszustand infolge einer Unstetigkeit des Verschiebungsvektors auf einer Ebene innerhalb eines isotrop-elastischen Halbraumes wurde vom ersten Verf. bereits in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 78, 384) mit Hilfe von Integralen über die Unstetigkeitsfläche durch Spannungsfunktionen dargestellt. In vorliegender Arbeit wird die Richtung der Verschiebung unter einem beliebigen Winkel zur Unstetigkeitsfläche angenommen. Für den Fall eines konstanten Verschiebungssprunges über eine parallel zur Randebene orientierte Rechteckfläche werden geschlossene Ausdrücke angegeben.

H. Neuber.

Wegner, Udo: Ein Beitrag zu den Stabilitätskriterien der Elastizitätstheorie. *Ingenieur-Arch.* 28, Festschrift Rich. Grammel, 357—359 (1959).

Es wird eine interessante Möglichkeit angedeutet, dem „dynamischen“ und dem „energetischen“ Kriterium für die Stabilität eines elastischen Körpers ein drittes an die Seite zu stellen, das mit der Theorie der Wellenflächen in Beziehung steht. Der Übergang vom Grundzustand zum Nachbarzustand findet in gewisser Hinsicht ein Analogon in dem kinematischen Vorgang, der das Verhalten der Partikel beim Durchdringen einer Wellenfläche beschreibt. Die Arbeit stellt nur eine kurze Einführung in die Grundidee dar. Näheres soll in einer weiteren Veröffentlichung folgen.

A. Pflüger.

Wolf, H.: Zur Bestimmung von Spannungsgefälle und Gefällekenwert bei gekerbten Bauteilen. *Forsch. Gebiete Ingenieurwes.* 25, 63—66 (1959).

Nachdem die spannungsoptische Methode bei der Bestimmung von Kerbspannungen (Kerbfaktoren) wertvolle Dienste geleistet hat, wird vom Verf. gezeigt, daß man auch mit diesem Verfahren den bei gekerbten Bauteilen wichtigen Gefällekenwert ermitteln kann. Unter dem Gefällekenwert versteht man die Größe $\theta = \varrho \chi^*$, wo ϱ der Krümmungsradius der Kerbrundung und χ^* das auf die Spannungsspitze bezogene Hauptspannungsgefälle in Richtung senkrecht zum Kerbrand bedeuten. Gleichermaßen ergibt sich ein Gefällekenwert für die Hauptspannungsdifferenz, die spannungsoptisch ermittelt werden kann. Zwischen beiden Kennwerten besteht ein einfacher Zusammenhang, der sich sofort aus den Lamé-Maxwellschen Gleichgewichtsbeziehungen ableiten läßt. Für einen gekerbten Flachstab wurden die θ -Werte bei Zug- und Biegebbeanspruchung in Abhängigkeit von verschiedenen Kerbparametern angenähert berechnet. Die spannungsoptisch ermittelten Kennwerte stimmten gut mit den berechneten überein, wobei die Unterschiede im ungünstigsten Falle 5% betrugen. Die abgeleiteten Zusammenhänge gelten nur für elastische Verformungszustände.

H. Schwieger.

Altenbach, Johannes und Karl-Friedrich Garz: Der elastisch eingespannte Druckstab und seine Anwendung zur Ermittlung von Knicklängen für Stabsysteme. Wiss. Z. Hochschule Schwermaschinenbau Magdeburg. 3, 19—27 (1959).

Der Leser kann sich zunächst nur schwer vorstellen, daß ein Aufsatz über den Eulerschen Knickstab konstanten Querschnitts im elastischen Bereich irgendwelche Dinge enthalten kann, die nicht seit langem bekannt sind. Verff. verstehen es aber in der Tat, durch Einführung elastisch nachgiebiger Randeinspannungen mit entsprechenden Federkonstanten eine neue, zweckmäßige Zusammenstellung des gesamten Problemkreises zu finden, bei der alle bisher untersuchten Lagerungsarten als Sonderfälle erscheinen. Es entsteht eine für praktische Rechnungen recht brauchbare Darstellung, die sich auch zur Lösung gewisser Knickprobleme von Rahmenkonstruktionen eignet, wie im 2. Teil der Arbeit gezeigt wird. *A. Pflüger.*

Capra, Vincenzo: Equilibrio di un'asta incastrata in regime di fluage. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 17, 277—303 (1958).

On considère le problème d'une barre encastree d'un côté et soumise à une charge de l'autre, dont les sections normales à l'axe longitudinale seraient susceptibles de fluage. On établit d'abord l'équation intégral-différentielle du phénomène, $\frac{EI}{\varrho} = -Py - EP \int_0^t y \varepsilon_0'(t) dt$, où $\frac{1}{\varrho}$ est la courbure de l'axe longitudinal, y est l'abscisse mesurée parallèlement à la paroi, à partir du bout libre et $\varepsilon_0(t)$ une fonction qui caractérise le fluage. On transforme cette équation en une équation intégrale, qu'on intègre par approximations successives. On élabore ensuite un procédé numérique pour obtenir une solution approchée à l'aide de polynômes d'interpolation. On en démontre la convergence dans le cas où on utilise les formules d'interpolation de Lagrange avec les abscisses de Čebyšev. Le travail se conclut par un exemple numérique. *M. Haimovici.*

Guillot, Roger: Flambement des arcs et des poutres à inertie variable. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 701—704 (1958).

Für das Durchschlagproblem des eben gekrümmten, an den Enden frei drehbar oder eingespannt gelagerten Stabes, belastet durch Kräfte in der Krümmungsebene und senkrecht zur Verbindungslinie der Auflager, wird eine Näherungslösung angegeben, welche für veränderlichen Stabquerschnitt anwendbar ist. Ist der Kehrwert des Trägheitsmomentes des Stabquerschnittes eine Funktion n -ten Grades, so kann die Lösung durch hypergeometrische Funktionen dargestellt werden. Für konstantes Trägheitsmoment ergibt sich gegenüber dem exakten Werte ein Fehler von 4%.

H. Neuber.

Hult, J. A. H.: Elastic-plastic torsion of sharply notched bars. J. Mech. Phys. Solids 6, 79—82 (1957).

Da es bei der Ermittlung des plastisierten Gebietes nur auf die nähere Umgebung des Korbgrundes ankommt, dessen Krümmungsradius Null gesetzt wird, lassen sich die Spannungsfunktionen im elastischen Bereich (konforme Abbildung) und im plastischen Bereich (Böschungsfäche, begrenzt durch den Schubspannungsgrenzwert) leicht angeben. *H. Neuber.*

Hult, Jan: Creep buckling of plane frameworks. Tekn. Högskol. Handl. Nr. 136, 31 p. (1959).

Die Kriechknickung eines Stabes bei einem dem Nortonschen Gesetz folgenden Material wird an Hand eines elementaren Federmodells diskutiert. Dazu kommt die Untersuchung des Unterschiedes zwischen einem elastisch bestimmbaren und einem unbestimmbaren Fall. Es werden zwei Materialien mit verschiedenen Kriechgleichungen nacheinander betrachtet; zuerst untersucht man ein linear kriechendes Material (Nortonscher Exponent $n = 1$), dann ein nichtlinear kriechendes Material mit $n > 1$. Es wird weiter gezeigt, daß bei einem linear kriechenden Mate-

rial Knickerscheinungen in Rahmenwerken in einer ähnlichen Weise gelöst werden, wie im Falle der elastischen Knickung. Die Lösung kann in Formeln dargestellt werden, die den üblichen (in den elastischen Stabilitätsproblemen erscheinenden) Ausdrücken nahe kommen. Nichtlineare Probleme der Kriechknickung von Rahmenwerken werden mittels vereinfachter Modelle untersucht, in denen verformbare Stäbe durch steife Balken mit lokalen Kriechgelenken ersetzt worden sind. Als Beispiel wird ein rechteckiger Rahmen angeführt. *J. Naleszkiewicz.*

Koiter, W. T.: An elementary solution of two stress concentration problems in the neighbourhood of a hole. *Quart. appl. Math.* **15**, 303—308 (1957).

Es wird zunächst ein zugbeanspruchter Stab mit Rechteckquerschnitt betrachtet, welcher eine zylindrische Bohrung enthält, deren Durchmesser der Stabbreite gleich kommt. Die auf der Balkenvorstellung aufgebaute Ableitung zielt auf die Ermittlung des zugehörigen Grenzwertes des Kerbfaktors hin und liefert den Wert 2,0. — Fast die gleiche Rechnung wurde bereits durch C. Weber (dies. Zbl. **26**, 278) durchgeführt, wobei sich das gleiche Ergebnis ergab, das auch vom Ref. in seinem Buche „Kerbspannungslehre“, 2. Aufl., S. 70, (dies. Zbl. **81**, 392), sowie in den Formzahlnormogrammen verwendet wurde (Bem. d. Ref.). — Verf. behandelt ferner das zugehörige rotationssymmetrische Problem (zylindrischer Stab mit kugelförmigem Hohlraum) und erhält einen von der Poissonschen Zahl abhängigen Kerbfaktor mit Werten zwischen 1,2 und 1,5. *H. Neuber.*

Kraus, L.: Die Integralgleichungen der Kippung gerader Träger mit dünnwandigen, offenen und doppelsymmetrischen Profilen. *Ingenieur-Arch.* **26**, 1—11 (1958).

Werden an Stelle der bei Kipperscheinungen geltenden linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten Integralgleichungen aufgestellt, so bieten sich besonders dann rechnerische Vorteile, wenn das betreffende Problem nicht in geschlossener Form lösbar ist. Bei leicht integrierbaren Kernen liefert die Erhard-Schmidtsche Ungleichung eine untere, das dem Energiesatz der Dynamik entsprechende Integral eine obere Schranke für den Eigenwert. Sonst wird ein spezielles Matrizen-Eigenwert-Verfahren empfohlen, wobei die jeweilige Integralgleichung als lineares homogenes Gleichungssystem der Stützstellen aufgefaßt wird. Zwei Beispiele werden sowohl exakt, als auch nach der Näherungsmethode durchgerechnet und lassen die Genauigkeit des Verfahrens erkennen. *H. Neuber.*

Martin, A. I.: On a formula for the torsional rigidity of thin-symmetrical sections. *J. Math. Physics* **36**, 20—25 (1957).

Für die ursprünglich auf dem Seifenhautgleichnis beruhende Näherungsformel von Griffith und Taylor für die Drillsteifigkeit von Stäben mit symmetrischem dünnwandigen Profil wird eine Herleitung gegeben, welche von der Saint Venantschen Torsionstheorie ausgeht und an ein Verfahren von Diaz und Weinstein (dies. Zbl. **35**, 115) anknüpft. Dabei ergibt sich eine genauere Formel. *H. Neuber.*

Sankaranarayanan, R. and P. G. Hodge jr.: On the use of linearized yield conditions for combined stresses in beams. *J. Mech. Phys. Solids* **7**, 22—36 (1958).

The interaction curve for simultaneous bending and torsion of rigid-plastic beams is replaced by piece-wise linear approximation. If the potential flow law is accepted, the proposed approximation leads to separation of stress and deformation rates in equations of limit analysis, and also enables obtaining closed form solutions of load carrying capacities. The proposed method is applied to two examples, namely plastic bending of an angle bent and load carrying capacity of a square grid; these are worked out in a very systematic manner for arbitrary T_0/M_0 -ratio of yield torque in pure torsion to yield moment in pure bending (e. g. for an arbitrary cross-section shape of a structural element). *A. Sawczuk.*

Savin, G. N. and O. A. Gorosko (Goroshko): Parameters of a naturally twisted thread. *Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR* 1959, 828—832, russ. und engl. Zusammenfassg. 832 (1959) [Ukrainisch].

To describe the property of real ropes to untwist on longitudinal tension, a model of such ropes — a naturally twisted thread — is introduced. The principal parameters of the model are: EF and B — longitudinal and torsional rigidity of the thread respectively — and k , the coefficient of untwisting. The elastic parameters are determined by three formulae obtained from the equation for the static equilibrium of the thread. Engl. Zusammenfassg.

Wittmeyer, H.: Torsionseigenfrequenzen eines Stabes veränderlichen Querschnitts mit einseitiger Einspannung oder etwas davon abweichenden Randbedingungen. *Forsch. Gebiete Ingenieurwes.* 24, 37—49 (1958).

Erweiterung eines bereits veröffentlichten Verfahrens zur Berechnung der Torsionseigenfrequenzen von Stäben mit veränderlichem Querschnitt, welches auf der Formulierung als kanonisches Variationsproblem beruht, wobei eine Transformation verwendet wird, welche die Berechnung der Eigenwerte erleichtert (dies. Zbl. 48, 186). Insbesondere werden die Frequenzänderungen berechnet, welche durch Berücksichtigung von Zusatzmassen und Zusatzfederungen an beiden Stäben entstehen. Die Genauigkeit des Verfahrens und der angegebenen Näherungsformeln wird an Hand von numerischen Beispielen erläutert. *H. Neuber.*

● **Frolov, V. M.:** Anwendung der Methode der korrigierenden Funktion in Berechnungen der Deformationen von Konsolplatten. [Primenenie metoda korrekturnjuščej funkcii v rasčetach deformacij konsol'nych plastin]. (Arbeiten des Zentralen Aero-hydro-dynamischen Žukovskij Instituts Nr. 705.) Moskau: Staatsverlag für Verteidigungsindustrie 1957. 35 S. R. 1,60 [Russisch].

In this paper the bending of a rectangular and triangular cantilever plate, having one edge clamped and others free, is investigated. Assuming that the cross sections parallel to the clamped edge are distorted and using the Kantorovič variational method, the author derives the solution in the form of the sum of two functions $w_0(x, y) + f_1(x)\varphi_1(y)$. The "Beam" function w_0 is obtained using the same assumptions of deformation which are applied in the problem of the bending and torsion of beams, and the function $f_1(x)\varphi_1(y)$ represents the correction to the "Beam" solution. The results obtained are compared with those of other authors and with experiments. Many numerical results are given in graphical form. *V. Bogunović.*

Barta, Toma: Die Anwendung des Momentenverteilungsverfahrens zur Berechnung der Rotationsschalen. *Bull. ști. tehn. Inst. politehn. Timișoara, n. Ser.* 2 (16), Nr. 2, 227—234, deutsche und russ. Zusammenfassg. 234 (1957) [Rumänisch].

Es wird die Anwendung des Momentenverteilungsverfahrens zur Berechnung von dreh-symmetrisch belasteten zusammengesetzten Rotationsschalen bzw. Platten und Ringen dargestellt. Mittels des Kraftgrößenverfahrens werden die allgemeinen Ausdrücke der Festwerte entwickelt und daraus für die Rotationsschale mit beliebiger Meridiankurve sowie für die am Rand gestützte oder auf starrer Unterlage aufliegende Kreisplatte und den Kreisring die betreffenden Werte abgeleitet. Zwei Rechenbeispiele, der zylindrische Behälter mit ebenem und der mit kugelförmigem Stützboden, ergänzen die theoretischen Darlegungen.

Zusammenfassg. des Autors.

Bassali, W. A.: Transverse bending of infinite and semi-infinite thin elastic plates. II. *Bull. Calcutta math. Soc.* 49, 119—127 (1957).

The complex variable method is used to obtain the solution of infinite and semi-infinite thin plates with an inner circular boundary subjected to general boundary conditions, with the outer edge free and loaded over a circle. The loading includes as a special case any linearly varying load over the circle. The limiting cases in which the circular boundary degenerates to a straight line and the radius of the loaded circle tends to zero are also considered. *V. Bogunović.*

Chang, Fo-van: Bending of the clamped edged anisotropic rectangular plates. *Sci. Sinica* 7, 716—729 (1958).

Die Arbeit ergänzt die bisher bekannten Lösungsergebnisse der Biegetheorie rechteckiger orthotroper Platten (siehe z. B. Girkmann: „Flächentragwerke“, dies. Zbl. 71, 394) für die Fälle gleichmäßig verteilter Last und Einzellast in Plattenmitte bei eingespannten Plattenrändern. Zur Lösung wird das Naviersche Lösungsverfahren mit Hilfe eines unendlichen Doppelsinusreihenansatzes für die Durchbiegung der Platte verwendet. Bedingungsgleichungen für die Koeffizienten der ebenfalls in Reihenform geschriebenen Einspannmomente der Platte werden angegeben. Für das Beispiel einer orthotropen quadratischen Sperrholzplatte werden die Bedingungsgleichungen unter Beschränkung der Rechnung auf acht Koeffizienten aufgelöst und die in der Mitte der Plattenränder auftretenden maximalen Einspannmomente für die beiden genannten Belastungsfälle ermittelt. Das Verfahren zeigt gute Konvergenz.

W. Thielemann.

Gerard, George and Arthur C. Gilbert: A critical strain approach to creep buckling of plates and shells. J. Aero-Space Sci. 25, 429—434 (1958).

Es werden Knickversuche an Hohlzylindern aus Aluminium beschrieben, die bei etwa 340° C auf Druck oder Torsion beansprucht werden. Die Proben für die Druckversuche hatten folgende Abmessungen: Länge 25 bis 50 mm, Innendurchmesser 27 mm, Wandstärke 0,75 bis 1,5 mm. Die Torsionsproben hatten denselben Innendurchmesser und dieselbe Wandstärke; sie waren etwa 130 mm lang. Nach einer bestimmten (kritischen) Belastungsdauer t_{kr} steigen die Dehnungen bei hinreichend großer Belastung rasch an und führen zum Ausbeulen der Probe. Die für $t = t_{kr}$ auftretenden kritischen Dehnungen bzw. Winkeländerungen stimmen bis auf etwa 5% mit denen überein, die man aus der Theorie der Schalenknickung im plastischen Bereich erhält.

A. Weigand.

Graffi, Franca: Soluzione tensoriale generale delle equazioni indefinite di equilibrio per una membrana. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur. VIII. Ser. 26, 189—196 (1959).

The linearized equations of equilibrium of a perfectly flexible membrane are of the form $S_{ik}^{,k} = 0$ where the covariant derivatives are taken with respect to the given generic surface. The author finds a general symmetric tensor field S_{ik} satisfying the above set of equations.

R. Stojanovitch.

Heinen, R.: Beitrag zur Berechnung von Einflußflächen schiefwinkliger Platten. Ingenieur-Arch. 26, 268—287 (1958).

Einem von Schultz-Grunow (dies. Zbl. 50, 401) angegebenen Verfahren folgend ermittelt Verf. die Einflußflächen der allseitig eingespannten Parallelogrammplatte mit gleichen Seiten und den Eckwinkeln von 60° und 120°. Die zugehörigen Greenschen Funktionen bestehen aus einem im Aufpunkt singulären Integral, welches leicht angegeben werden kann, und regulären Anteilen, mit deren Hilfe die Randbedingungen zu erfüllen sind. Mit Hilfe der konformen Abbildung des Parallelogrammes auf einen Kreis, sowie unter weitgehender Ausnützung der Symmetriebedingungen erhält Verf. eine Reihe brauchbarer Funktionen, deren Koeffizienten durch punktweise Erfüllung der Randbedingungen errechnet werden. Die Einflußfunktionen für die Durchbiegung und die beiden Biegemomente werden sowohl in Tabellenform, als auch in perspektivischer Darstellung angegeben.

H. Neuber.

Hieke, Max: Ein Beitrag zur exzentrisch belasteten Kreismembran. Z. angew. Math. Mech. 39, 180—192 (1959).

Eine am Rand eingespannte Kreismembran wird zur Zeit $t = 0$ durch eine konstante Flächenlast, die exzentrisch angreift, zu Schwingungen erregt. Unter ausgiebiger Verwendung funktionentheoretischer Hilfsmittel gelingt es, die Auslenkung der Membran durch Ausdrücke darzustellen, in denen unendliche Reihen und Doppelreihen vorkommen. Schließlich wird auch noch die Lösung für eine zur

Zeit $t = 0$ einsetzende harmonisch mit der Zeit veränderliche Belastung ermittelt. Angaben über die Güte der Konvergenz der auftretenden Reihen und über die numerische Durchführung des Verfahrens werden nicht gemacht. *A. Weigand.*

Hodge jr., P. G. and S. V. Nardo: Carrying capacity of an elastic-plastic cylindrical shell with linear strain-hardening. *J. appl. Mech.* 25, 79—85 (1958).

Nach Ansicht der Verff. reichen für die Bestimmung der Tragfähigkeit dünnwandiger Kreiszyinderschalen unter Innendruck bekannte, auf dem starr-plastischen Gedankenmodell beruhende Verfahren aus. Tritt aber eine erhebliche axiale Druckkraft auf, so ändert sich die elastische Radialverschiebung wesentlich, und die elastischen Dehnungsanteile lassen sich gegenüber den plastischen nicht mehr vernachlässigen. In vorliegender Arbeit wird auch der Verfestigung Rechnung getragen. Das in drei Arbeiten des ersten Verf. bereits als brauchbar erwiesene Prinzip des Minimums der potentiellen Energie dient zur angenäherten Ermittlung der erforderlichen Gleichungen. Ein numerisches Beispiel zeigt, daß die Traglast beträchtlich kleiner sein kann, als der starr-plastischen Berechnung entsprechen würde.

H. Neuber.

Jackson, Charles E. and John E. Wherry: A comparison of theoretical and experimental loads on the B-47 resulting from discrete vertical gusts. *J. Aero-Space Sci.* 26, 33—45 (1959).

Moderne Großflugzeuge mit Flügeln größerer Spannweite und relativ geringer Flügeldicke erfahren unter der Wirkung von Vertikalböenbelastungen Beanspruchungen der Flügel, die infolge dynamischer Effekte beträchtlich über der Belastung liegen können, die bei der entsprechenden statisch wirkenden Belastung auftreten würden. Eine Anzahl theoretischer Arbeiten ist bekannt, in denen Methoden zur Untersuchung dieses Problems angegeben werden. Verff. vergleichen an dem Beispiel des Flugzeugmusters B-47 Ergebnisse, die mit Hilfe dieser theoretischen Methoden errechnet werden können, mit Ergebnissen von Beschleunigungs- und Beanspruchungsmessungen, die in Flugversuchen gefunden wurden. Die Rechnung berücksichtigt die Tatsache, daß bei den Flugversuchen durch Fliegen in geeignetem Gelände diskrete Böen mit relativ geringem Vertikalgeschwindigkeitsanstieg angetroffen wurden. Der Vergleich der Ergebnisse zeigte, daß es für das Baumuster B-47 unzulässig wäre, die Beanspruchung der Tragflügel ohne Berücksichtigung der dynamischen Effekte zu ermitteln, da die dynamischen Effekte die Beanspruchungen bis auf den doppelten Wert erhöhen können. Es ergab sich weiter, daß die z. Z. vorhandenen Methoden geeignet sind, das Problem mit ausreichender Genauigkeit zu behandeln. Im Anhang wird eine von der Firma Boeing entwickelte Methode zur rechnerischen Behandlung des dynamischen Böenbelastungsproblems ausführlich beschrieben. *W. Thielemann.*

Johnson, M. W. and E. Reissner: On the foundations of the theory of thin elastic shells. *J. Math. Physics* 37, 371—392 (1959).

Für einen sehr speziellen Sonderfall (die Kreiszyinderschale konstanter Dicke, die kleine und axialsymmetrische Verformungen erleidet) löst die vorliegende Arbeit ein sehr allgemeines Problem: wie ergeben sich die üblichen Schalengleichungen aus den allgemeinen Gleichungen der Elastizitätstheorie; wie wirken sich insbesondere die Korrekturen aus, die herrühren von a) der „endlichen“ Dicke der Schale (Parameter $\lambda = h/2a$, Dicke/Innendurchmesser), b) der Schubnachgiebigkeit, c) der Quernachgiebigkeit ($\epsilon_r = \sigma_r/E \neq 0$). — Mit Hilfe des charakteristischen Längenparameters $\sqrt{h/a}$ gelingt es den Verff., die Grundgleichungen in einer solchen Weise dimensionslos zu machen, daß nach Potenzen von λ entwickelt werden kann, und die schrittweise Interpretation führt schließlich auf die Bestimmung der drei Einflußzahlen, die in der einsinnig unendlichen Schale Winkel und Radialverschiebung an der Stelle 0 mit Querkraft und Moment eben dort verbinden. Im Ergebnis er-

scheint als „nullte“ Lösung die der elementaren Theorie; die mit λ proportionale Korrektur enthält drei Summanden — die drei Korrekturen a), b), c), die alle von derselben Größenordnung sind. Es wird also bestätigt, was man seit früheren Arbeiten von Reißner und Kromm (dies. Zbl. 52, 207) weiß: die (von Flügge zum ersten Mal exakt durchgeführte) Korrektur a) täuscht eine höhere Genauigkeit vor, als sie ihrem Wesen nach liefern kann; wenn man schon korrigiert, muß man b) und c) mitnehmen. — Zahlenbeispiel. K. Marguerre.

Kaliski, Sylwester: The dynamic non-steady axially symmetric problem of a cylinder. Arch. Mech. stosow. 10, 793—809, russ. Zusammenfassg. 809—810 (1958)

Es wird das axialsymmetrische elastokinetische Problem des Kreiszylinders mit festen Rändern untersucht, der durch einen im Innern des Zylinders angreifenden Impuls (Dirac-Funktion) zu Schwingungen erregt wird. Das Problem wird auf ein System von linearen Integralgleichungen für die Reaktionskräfte an den Zylinder-rändern zurückgeführt, aus dem durch Laplace-Transformationen ein zugeordnetes für die Transformatierten der Reaktionskräfte entsteht. Durch Entwicklung der gesuchten Größen nach gewissen Orthogonalfunktionen entsteht ein unendliches lineares Gleichungssystem, von dem gezeigt wird, daß es wegen der speziellen Form der Matrix vollständig regulär ist, falls die Poissonsche Zahl $\nu < 0,4$ ist. Auf die Rücktransformation der Laplace-Transformatierten wird nicht näher eingegangen, auch nicht auf die numerische Durchführung des Verfahrens. A. Weigand.

Laurent, Pierre, Tràn-Xuân-Thoai und Georg Altmeyer: Beitrag zur lückenlosen Bestimmung des Eigenspannungszustandes in metallischen Hohlzylindern. Forsch. Gebiete Ingenieurwes. 25, 44—54 (1959).

Durch plastisches Verformen, durch Gefügeumwandlungen bedingte Volumenänderungen, durch ungleichmäßige Temperaturverteilung usw. können Eigenspannungen in metallischen Werkstücken entstehen. An metallischen Voll- und Hohlzylindern lassen sich diese Eigenspannungen durch Anwendung des Ausbohr- und Abdrehverfahrens bestimmen. Hierbei wird im ersten Falle ein Zylinder schichtweise ausgebohrt, und die am Außenmantel auftretenden Formänderungen werden gemessen. Bei der Schichtabtragung werden Spannungen ausgelöst, die eine Änderung des Verformungs- und Spannungszustandes im Restkörper hervorrufen. Beim Abdrehverfahren, welches sich nur für Hohlzylinder eignet, werden die nach dem Abdrehen einer Schicht sich ergebenden Formänderungen an der Bohrungswand gemessen. Da man die Zerspannung nur bis zu einer bestimmten Wandstärke (ca. 4 mm) vornehmen kann, müssen die erhaltenen Formänderungskurven bis zum jeweiligen Rand extrapoliert werden, was naturgemäß zu größeren Fehlern Anlaß geben kann. Aus diesem Grunde benutzt man neuerdings das kombinierte Ausbohr- und Abdrehverfahren, wobei also zwei gleiche Werkstücke für die Versuche nötig sind. Die vorliegende Arbeit zielte darauf ab festzustellen, inwieweit sich der räumliche Eigenspannungszustand durch die rasche Abkühlung von verschiedenen Temperaturen aus ändert. Die für die Berechnung der Eigenspannungen aus den Formänderungswerten benutzten Formeln von G. Sachs wurden einleitend von Verff. exakt abgeleitet. An verschiedenen Hohlzylindern aus Stahl ($C_K 11$), Messing (Ms 58) und Kupfer wurden nach dem kombinierten Verfahren dann die Eigenspannungszustände bei unterschiedlichen Abschreckbehandlungen bestimmt. Die Eigenspannungen in den Messing- und Kupferzylindern sind dabei kleiner als diejenigen in den Stahlzylindern. Diese Unterschiede sind durch die kleineren Elastizitätsmoduln, die besseren Wärmeleitfähigkeiten und durch andere abweichende physikalische Eigenschaften von Messing und Kupfer gegenüber Stahl begründet. Verff. haben weiterhin die Bestimmungsmethoden dahingehend erweitert, daß die für die Messung benutzten Dehnungmeßstreifen, welche die Dehnungen in Längsrichtung des Hohlzylinders und in tangentialer Richtung an der Innen- oder Außenwand messen, nach Beendigung des Ausbohrens oder des Abdrehens einzeln aus den Restzylindern herausge-

schnitten werden. Auf diese Weise werden auch die Verformungen (Grenzwerte bei vollständiger Zerspannung) an den Rändern erhalten und können die Eigenspannungen über die verbleibende Wandstärke durch Interpolation erhalten werden. Die Ergebnisse des kombinierten Verfahrens und der einzelnen Verfahren unter gleichzeitiger Verwendung der ausgeschnittenen Dehnungsmeßstreifen zeigten eine befriedigende Übereinstimmung. Ferner ergab sich, daß die Höhe der vor dem Abschrecken angewendeten Glühtemperaturen praktisch keinen Einfluß auf die Eigenspannungen hatte.

H. Schwieger.

Nowiński, Jerzy: States of stress in an orthotropic thick-walled tube surrounded by an elastic medium (the Galerkin problem for an orthotropic material). Arch. Mech. stosow. **9**, 217—225, russ. Zusammenfassg. 226 (1957).

Das sogenannte Galerkinsche Problem besteht in der Bestimmung der Spannungsverteilung in einer isotropen, dickwandigen Röhre, die von einem Winklerschen Medium umgeben ist und für die ein innerer Druck oder eine gleichförmige Temperaturverteilung vorgegeben ist. Das Problem läßt sich auf den Fall verallgemeinern, daß die Röhre orthotrop und einer beliebigen Temperaturverteilung ausgesetzt ist. Diese Verallgemeinerung wird vom Verf. unter der Voraussetzung behandelt, daß der Druck verschwindet und die Temperaturverteilung ohne Einfluß auf die elastischen Eigenschaften des Mediums ist. Es werden nur die beiden folgenden Grenzfälle diskutiert: a) Die Röhre ist frei von axialer Expansion, b) Die Röhre kann sich in axialer Richtung beliebig ausdehnen. Abschließend ein numerisches Beispiel.

E. Hardtwig.

Reissner, Eric: Finite twisting and bending of thin rectangular elastic plates. J. appl. Mech. **34**, 391—396 (1957).

An exact solution is obtained of the nonlinear equations for finite deflections of thin elastic plates, for a rectangular plate acted upon by twisting moments T and bending moments M simultaneously applied to two opposite edges of the plate. The principal results of the paper are relations between the moments T and M , on the one hand, and the angle of twist per unit of length θ , and the curvature k of the plate, on the other hand. These relations which are of the form $T = T(\theta, k)$ and $M = M(\theta, k)$ generalize previously known relations for the special cases for which either $k = 0$ or $\theta = 0$. A numerical evaluation of the functions $T(\theta, k)$ and $M(\theta, k)$ reveals the existence of a characteristic jump phenomenon. (From author's summary).

V. Bogunović.

Rüdiger, D.: Zur Theorie elastischer Schalen. Ingenieur-Arch. **28**, Festschrift Rich. Grammel, 281—288 (1959).

Die übliche Theorie elastischer Schalen geht von der Voraussetzung aus, daß alle Punkte, die vor der Formänderung auf einer Normalen zur Schalenmittelfläche liegen, sich auch nach dieser auf einer Normalen zur verformten Mittelfläche befinden (Bernoullische Hypothese). Es ist wiederholt vermutet worden, daß diese Voraussetzung zu einer Inkonsistenz in den Grundgleichungen der Schalentheorie führt. Es treten nämlich im Elastizitätsgesetz Glieder auf, die von derselben Größenordnung sind wie die vernachlässigte Querkraftverformung. In der vorliegenden Arbeit wird versucht, eine allgemeine Theorie der Schalen unter Berücksichtigung der Querkraftverformung zu entwickeln und den Nachweis zu führen, daß diese Inkonsistenz in der bekannten Theorie tatsächlich besteht. Unter Verwendung der aufgestellten Theorie werden dann alle Terme von der Größenordnung der Querkraftverformung konsequent vernachlässigt und ein System von Schalengleichungen aufgestellt, das in sich widerspruchsfrei zu sein scheint.

W. Zerna.

Saleme, E. M.: Stress distribution around a circular inclusion in a semi-infinite elastic plate. J. appl. Mech. **25**, 129—135 (1958).

Es wird eine Lösung für die Spannungsfunktion einer zugbeanspruchten Scheibe mit geradlinigem, parallel zur Zugrichtung orientiertem Rand angegeben, wobei ein kreisförmiges Loch mit anderem elastischen Material ausgefüllt ist. Unter der Voraussetzung völliger Haftung der Materialien am Lochrand werden unendliche Reihen entwickelt, welche die Bedingung des lastfreien geradlinigen Randes bereits erfüllen und deren Koeffizienten sich aus den vier Bedingungen am Lochrand errechnen. Die Grenzübergänge zur Halbscheibe mit freiem Kreisloch sowie zur allseitig unendlich ausgedehnten Scheibe führen zur Übereinstimmung mit bekannten Lösungen — Ein Diagramm zeigt die maximalen Spannungen in Abhängigkeit vom Verhältnis der E -Moduln. H. Neuber.

Scherer, A.: Einflußflächen einer Dreiecksplatte mit Aufpunkt am freien Rand. Ingenieur-Arch. 25, 255—272. (1957).

Nach einer Einführung in die Singularitätenmethode und die Herleitung der Fundamentalintegrale für die Schnittkrafteinflußflächen wird für den am freien Rand liegenden Aufpunkt das Fundamentalintegral der Biegeeinflußfläche aufgestellt. Dann wird das Verfahren von F. Schultz-Grunow zur Ermittlung von Einflußflächen umfangsgelagerter Platten bei von Rand zu Rand wechselnden Lagerungsbedingungen gezeigt und insbesondere numerisch die Biege- und Momenteneinflußfläche einer Platte von der Form eines gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks mit eingespannten Katheten, freier Hypothenuse und dem Aufpunkt in der Mitte der letzteren ermittelt. Dazu muß die konforme Abbildung des Dreiecks auf den Einheitskreis durchgeführt werden. Es zeigt sich, daß man für Platten mit freien Rändern bei der Ermittlung von Einflußflächen nach dem Verfahren von F. Schultz-Grunow gute Ergebnisse erhält, wenn auch der Rechenaufwand naturgemäß höher ist als bei anderen Lagerungsarten der Platte. (Aus der Zusammenfassg. des Verf.)

V. Bogunović.

Schnell, Walter und Christian Brühl: Die längsgedrückte orthotrope Kreiszylinderschale bei Innendruck. Z. Flugwiss. 7, 201—207 (1959).

Das betrachtete Problem wird mit der klassischen Beultheorie unter Benutzung der Donnell'schen Vereinfachungen behandelt, die zu einer recht übersichtlichen Beulbedingung führen. Ihre Auswertung liefert im Vergleich mit einer isotropen Zylinderschale eine schwächere bzw. stärkere Beeinflussung der kritischen Last durch den Innendruck, je nachdem ob die Steifigkeit in Umfangsrichtung größer oder kleiner als die in Längsrichtung ist. Versuche mit Sperrholzzylindern ergeben eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuch hinsichtlich der Tendenz der Abhängigkeit der kritischen Last von den verschiedenen Parametern. Die absolute Höhe der kritischen Werte ist jedoch zu groß, wie es bei Anwendung der klassischen Beultheorie nicht anders zu erwarten ist. A. Pflüger.

Tamate, O.: Einfluß einer unendlichen Reihe gleicher Kreislöcher auf die Durchbiegung einer dünnen Platte. Z. angew. Math. Mech. 37, 431—441 (1957).

Die Aufgabe der Abschätzung des Einflusses einer unendlichen Reihe gleicher Kreislöcher auf die Spannung in einer unbegrenzten, biegebeanspruchten Platte wird auf Grund der Kirchhoff'schen Biegetheorie und der komplexen Darstellungsmethode von Muschelišvili behandelt. Zur Bestimmung der Koeffizienten, die in der Durchbiegungsfunktion der Platte enthalten sind, wird die Störungsrechnung angewandt. Numerische Ergebnisse für einige spezielle Fälle werden mitgeteilt. (Aus der Zusammenfassg. des Verf.) V. Bogunović.

Tameroğlu, Süleyman: Über die Durchschlagsstabilität eines zylindrischen Flächenstreifens endlicher Querkrümmung. Bull. techn. Univ. Istanbul. 10, Nr. 3, 55—71 (1957).

Im Anschluß an eine Arbeit von Inan (dies. Zbl. 49, 248), die sich auf die Durchschlagsstabilität eines dünnen zylindrischen Flächenstreifens mit kleiner

Querkrümmung bezog, wird in vorliegender Arbeit die Untersuchung auf endliche Querkrümmung erweitert. Die Ableitung geht jedoch nicht von den exakten Grundgleichungen der Schalenstabilität aus, sondern beruht auf Gleichgewichtsbetrachtungen am Streifenelement mit einem vereinfachten Kräftespiel, sowie auf Deformationsbetrachtungen, welche der Balkenvorstellung entlehnt sind. *H. Neuber.*

Vocke, W.: Zur Berechnung zylindrischer Behälter mit quadratisch veränderlicher Wanddicke. *Z. angew. Math. Mech.* 37, 399—400 (1957).

Die Differentialgleichung vierter Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten, welche für die symmetrisch belastete biegesteife Zylinderschale gilt, wurde durch Federhofer (dies. Zbl. 40, 399) im Falle der quadratisch veränderlichen Wandstärke in zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung aufgespalten. Verf. zeigt, wie man dasselbe Ergebnis auch direkt durch Untersuchung der Lösungen der Differentialgleichung vierter Ordnung erhalten kann. *H. Neuber.*

Yüksel, Halil: Elastic, plastic stresses in free plate with periodically varying surface temperature. *J. appl. Mech.* 25, 603—606 (1958).

The solution of the thermal stress-problem under periodically varying surface-temperature of a free elastic-plastic plate is discussed for the cases of two and three plastic regions. Unfortunately, the standard assumption of incompressibility that is introduced in order to simplify the analysis is physically objectionable [Ref., *J. appl. Phys.* 31, 434 (1960)]. *A. M. Freudenthal.*

Yusuff, Syed: Buckling phenomena of stiffened panels. *J. Aero-Space Sci.* 25, 507—514 (1958).

Die Druckkräfte aufnehmenden Teile von Tragflügel-Konstruktionen bestehen im allgemeinen aus versteiften Plattenkonstruktionen, die entweder aus einer Hautbepankung mit aufgenieteten Versteifungsprofilen aufgebaut oder bei dergleichen Integralbauweise aus einem Werkstück herausgearbeitet sind. Die optimale Ausnutzung dieser Konstruktionen erfordert eine sorgfältige Ermittlung ihrer durch Beulvorgänge festgelegten zulässigen Druckspannung. Derartige versteifte Plattenkonstruktionen besitzen eine Reihe verschiedenartiger Beulformen, denen verschiedene Beulspannungen zugeordnet sind. Verf. zeigt, daß neben der Eulerknickform, bei welcher die versteifte Konstruktion ohne Verdrehung der Profile und ohne Ausbeulen der Haut als ganzes ausknickt, zwei weitere wesentliche Beulformen auftreten können, die mit einer gleichzeitigen Durchbiegung und Verdrehung der Profile und einem Ausbeulen der Haut verbunden sind. Je nachdem, ob die Biege- oder die Verdrehdeformation der Versteifungen überwiegt, unterscheidet Verf. ein langwelliges und ein kurzwelliges Beulen. Beide Beulformen sind bei Druckversuchen an versteiften Plattenkonstruktionen beobachtet worden. Die allgemein hergeleitete Beultheorie wird auf Platten mit Versteifungen aus Z-Profilen und auf Integral-Platten mit Versteifung ohne Flansch angewendet. Vergleiche mit zahlreichen Versuchsergebnissen von Druckversuchen der NASA und der Firma Bristol an versteiften Platten dieser Art zeigen eine gute Übereinstimmung von Theorie und Versuch. *W. Thielemann.*

Bufler, Hans: Einige strenge Lösungen für den Spannungszustand in ebenen Verbundkörpern. *Z. angew. Math. Mech.* 39, 218—236 (1959).

On étudie un corps à hétérogénéité discontinue, formé d'un demi-plan élastique et d'un corps fini (rigide ou bien élastique), en contact avec le demi-plan sur la ligne de séparation de celui-ci. On détermine les tensions normales et les tensions tangentielles (sans les simplifications usuelles) sur cette ligne de séparation, en ramenant le problème à deux équations intégrales singulières, liées l'une à l'autre. On donne des applications pour cinq cas différents de charge: compression centrique (ou bien traction), cisaillement (sans ou avec possibilité de torsion), torsion simple, tensions thermiques et tensions initiales. Les résultats sont concrétisés sous la forme de diagrammes. *P. P. Teodorescu.*

Davin, M.: Etat de contrainte et de déformation d'un certain milieu hétérogène indéfini à deux dimensions. Arch. Mech. stosow. 11, 129—153, russ. Zusammenfassg. 153—156 (1959).

L'A. considère un corps hétérogène bidimensionnel, indéfini, constitué de deux matériaux différents: un des matériaux occupe l'intérieur de certains cercles égaux, distribués périodiquement (avec la même période), dans deux directions orthogonales, l'autre matériel occupe le reste de l'espace bidimensionnel. On suppose une continuité parfaite des déplacements, c'est à dire une adhérence totale. On étudie premièrement le cas d'un seul cercle et on passe ensuite au cas général. L'A. utilise des développements en séries de Fourier, en représentant l'état de tension et l'état de déformation en coordonnées polaires. La solution du problème pour le cas général est obtenue par itération. *P. P. Teodorescu.*

Eganjan, V. V.: Zum ebenen Problem der Elastizitätstheorie für den Halbkreis. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, Ser. fiz-mat. Nauk 11, Nr. 6, 47—59 (1959) [Russisch].

En utilisant l'intégrale de Fourier, l'A. étudie le problème du demi-cercle élastique plan, actionné par une charge quelconque sur la frontière. Le calcul est développé à l'aide des coordonnées bipolaires. Des exemples de calcul, concernant l'action d'une charge concentrée sur le diamètre ou sur l'arc de cercle, s'ensuivent. *P. P. Teodorescu.*

Engl, Walter: Der Spannungszustand einer Reihe von Kräften, die in der unendlichen Halbebene angreifen. Z. angew. Math. Mech. 39, 192—198 (1959).

L'A. étudie l'état de tension et l'état de déformation à l'intérieur d'un demi-plan élastique, actionné à l'intérieur par une suite périodique de forces concentrées normales à la ligne de séparation. On utilise la méthode des fonctions hypercomplexes et on trouve des formules finales de calcul. Les résultats obtenus peuvent être utilisés avec approximation, aussi pour une bande plane élastique. D'après notre opinion le problème peut être solutionné d'une manière plus simple, en approximant les forces concentrées intérieures par des forces massiques concentrées et en représentant ce cas de chargement à l'aide d'un développement en série de Fourier sur une direction et d'une intégrale de Fourier sur l'autre direction. Les résultats ainsi obtenus peuvent être aisément apportés à la forme donnés par l'A. *P. P. Teodorescu.*

Federhofer, Karl: Nicht-lineare Biegungsschwingungen des Kreisinges. Ingenieur-Arch. 28, Festschrift Rich. Grammel, 53—58 (1959).

Si studiano le oscillazioni di flessione di un anello circolare conservando nelle equazioni costitutive e in quelle dinamiche i termini anche del secondo ordine. Si perviene così per lo spostamento radiale u ad una equazione differenziale non lineare per la presenza di un termine $S(u, w)$ del secondo ordine (w spostamento tangenziale). Determinata la soluzione u_0 che soddisfa all'equazione quando si faccia $S = 0$, e precisato il corrispondente valore di w, w_0 , si può ottenere un ulteriore approssimazione aggiungendo a u_0 la soluzione dell'equazione che si ottiene sostituendo ad $S(u, w)$ la funzione nota $S(u_0, w_0)$. *T. Manacorda.*

Golecki, Józef: On the assumption of incompressibility in plane problems of the theory of elasticity. Arch. Mech. stosow. 11, 297—301, russ. Zusammenfassg. 301 (1959).

L'A. s'occupe des corps élastiques, isotropes, homogènes et incompressibles dans le cas du problème plan. On considère le cas d'un état de déformation plane le cas d'un état de tension plane et le cas du problème bidimensionnel de tension et de déformation, avec une incompressibilité transversale. On établit les fonctions de tension et les fonctions de déplacements correspondantes. *P. P. Teodorescu.*

Gusejn-Zade, M. I. und P. A. Kuzin: Die Wirkung einer Impulsbelastung auf eine elastische Schicht, die auf einem flüssigen elastischen Halbraum liegt. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk, Mech. Mašinostr.* 1959, Nr. 1, 64—72 (1959) [Russisch].

L'A. étudie l'action d'une charge concentrée impulsive (qui dure un délai de temps arbitrairement court) sur un corps à hétérogénéité discontinue: une couche élastique reposant sur un demi-espace fluide-élastique (avec le module d'élasticité transversale $\mu = 0$). On utilise des méthodes opérationnelles de calcul. L'article est enrichi par des calculs numériques et par des diagrammes. *P. P. Teodorescu.*

Kaufman, R. N.: Solutions of some boundary value problems of static theory of elasticity for a layer with a spherical cavity. *PMM J. appl. Math. Mech.* 22, 451—465 (1959), Übersetz. von *Priklad. Mat. Mech.* 22, 327—337 (1958).

The author applies the method used previously for the solution of an electrostatic problem (this *Zbl.* 64, 212) to the problem of a plain (parallel) layer with a spherical cavity. The layer suffers a uniform compression on the (infinite) faces, while the boundary conditions on the cavity are expressed as linear relations between stresses and displacements. The paper is concluded with a brief discussion on the possibilities for application of the method to some more general cases: non-homogeneous boundary conditions on the surfaces of the layer, more than one cavity, cavities filled with substances of different elastic properties. *R. Stojanovitch.*

Naghdi, P. M.: On plane stress solution of an elastic, perfectly plastic wedge. *J. appl. Mech.* 25, 407—410 (1958).

The solution of the elastic-plastic wedge of wedge-angle $\beta < \frac{1}{2}\pi$ with uniform load along one face is developed for plane stress and the assumption of the Tresca yield condition and associated flow rule. The stress components are found to be identical with those obtained by the same author for plane strain; the displacement components differ by a numerical factor. *A. M. Freudenthal.*

Ziegler, Hans: A modification of Prager's hardening rule. *Quart. appl. Math.* 17, 55—65 (1959).

A modification of Prager's strain-hardening function is suggested which ensures that under conditions of plane stress and of plane strain the yield-locus is not deformed in the course of its translatory motion. *A. M. Freudenthal.*

Piszczeck, Kazimierz: The possibility of dynamic stability loss under moving concentrated loads. *Arch. Mech. stosow.* 10, 195—210 (1958).

Ausgehend von der Greenschen Funktion für die an den Rändern gestützte und auf der ganzen Fläche linear elastisch gelagerte Rechteckplatte wird zunächst das Problem einer mit konstanter Geschwindigkeit längs einer Randparallelen bewegten Last behandelt, wobei die zugehörige Trägheitskraft noch vernachlässigt wird. Für die Plattendurchbiegung dient eine Summe von Zeit- und Ortsfunktionen als Ansatz, der in die mittels der Greenschen Funktion hergestellte Integro-Differentialgleichung eingesetzt wird. Für die Zeitfunktionen folgt eine Differentialgleichung vom Typ der erzwungenen Schwingung ohne Dämpfung, welche den kritischen Wert der Geschwindigkeit der bewegten Last liefert. Wird die Trägheitskraft der bewegten Last berücksichtigt, so folgt eine Differentialgleichung vom Typ Mathieu-Hill, deren Lösungen auf kompliziertere Resonanzbedingungen führen. Auch der Fall von zwei bewegten Lasten wird untersucht. Ein numerisches Beispiel aus dem Straßenbau erläutert die Größenordnung der kritischen Geschwindigkeit. *H. Neuber.*

Basin, Michael A., Richard H. MacNeal and John H. Shields: Direct-analog method of analysis of the influence of aerodynamic heating on the static characteristics of thin wings. *J. Aero-Space Sci.* 26, 145—154 (1959).

Die Methoden zur Ermittlung des Spannungszustandes in dünnwandigen hochgradig statisch unbestimmten Flugzeugkonstruktionen haben in den letzten Jahren einen beträchtlichen Ausbau erfahren. Unter Verwendung der von H. Wagner und

H. Ebner vorgeschlagenen Idealisierung des zu untersuchenden Systems mit Hilfe des sogenannten Schubfeldschemas haben vor allem in letzter Zeit die Matrizenmethoden, die eine weitgehende Verwendung von Digitalrechnern zulassen, in der Praxis weit verbreitet gefunden. Neben diesen rechnerischen Methoden werden auch direkte Analogiemethoden, die von der Analogie mechanischer Größen in den nach dem Schubfeldschema idealisierten Systemen mit elektrischen Größen in einem elektrischen Netzwerk Gebrauch machen, angewendet. Die Messung der den gesuchten mechanischen Größen, wie z. B. Kräften und Verschiebungen, analogen elektrischen Größen, wie z. B. Spannungen und Stromstärken, läßt sich in einfacher Weise im Netzwerk durchführen. Von Verff. wird das vor allem von einem der Verf., R. H. MacNeal, bereits seit etwa zehn Jahren entwickelte direkte Analogieverfahren zur Ermittlung des Spannungszustandes in Flugzeugbauteilen auf den Fall erweitert, daß Wärmespannungen, verursacht durch die aerodynamische Aufheizung im Überschallflug, von Bedeutung werden. Es ist bekannt, daß diese infolge von ungleichmäßigen Temperaturverteilungen in der Konstruktion auftretenden Wärmespannungen die Steifigkeitseigenschaften der Konstruktion — z. B. die Torsionssteifigkeit eines Tragflügels — beträchtlich verringern können. An dem Beispiel eines quadratischen einseitig eingespannten Flügelkastens wird von Verff. gezeigt, daß das von ihnen entwickelte direkte Analogieverfahren geeignet ist, sowohl die Wärmespannungen selbst, als auch den Einfluß dieser Wärmespannungen auf die Steifigkeitseigenschaften des Flügelkastens zu ermitteln. Vergleiche der Ergebnisse des Analogrechners mit Ergebnissen, die mit Hilfe anderer Methoden gefunden wurden, zeigen gute Übereinstimmung.

W. Thielemann.

Ignaczak, Józef: The stresses due to a nucleus of thermoelastic strain in a semi-infinite plate containing a semi-circular notch. Arch. Mech. stosow. 10, 707—713 (1958), russ. Zusammenfassg. 713 (1958).

Eine Scheibe mit geradlinigem Rand und Halbkreis Kerbe wird durch eine auf der Symmetrieachse befindliche punktförmige Wärmequelle geheizt. Die zugehörige Temperaturverteilung wird mittels der Dirac-Funktion dargestellt. Für die Scheibe ohne Kerbe kann alsdann die Airysche Spannungsfunktion für das Wärmespannungsfeld in geschlossener Form angegeben werden, wobei logarithmische Ausdrücke auftreten, welche Verf. in Polarkoordinaten transformiert und durch unendliche Reihen mit trigonometrischen Funktionen ersetzt. Die zur Erfüllung der Randbedingung für die Halbkreis Kerbe erforderlichen Zusatzfunktionen werden ebenfalls mittels trigonometrischer Funktionen eingeführt. Der Koeffizientenvergleich führt auf zwei Gruppen unendlich vieler Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, die sich schrittweise lösen lassen.

H. Neuber.

Mossakowski, Jerzy: Thermal stresses in an elastic space with discontinuous physical properties. Arch. Mech. stosow. 11, 243—257, russ. Zusammenfassg. 257—258 (1959).

On étudie le problème thermo-élastique quasi-statique d'un milieu infini, formé de deux demi-espaces qui ont une adhérence totale sur leur ligne de séparation. Les deux demi-espaces ont des propriétés mécaniques et thermiques différentes. L'auteur considère le cas d'une source de chaleur à l'intérieur d'un de ces demi-espaces et étudie la propagation de la chaleur et l'état de tension correspondant. Un exemple numérique de calcul s'ensuit.

P. P. Teodorescu.

Nowacki, Witold: Some dynamic problems of thermoelasticity. Arch. Mech. stosow. 11, 259—283, russ. Zusammenfassg. 283 (1959).

Zwei Typen von Problemen werden behandelt. Zuerst wird die Fortpflanzung derjenigen Wärmespannungen in einem Raum, in einem Halbraum und in einem mit einer sphärischen Höhlung versehenen Raum untersucht, die von einer mit der Zeit harmonisch variierenden Punkt-, Linien- oder Flächenwärmequelle hervorgerufen werden. Die Lösung des Problems für den elastischen Halbraum erfordert

die Lösung eines modifizierten Lambischen Problems. Den Ausgangspunkt für die Untersuchung bietet ein Paar von Differentialgleichungen, die kürzlich als Basis für die Kupplung zwischen dem Temperaturfeld und dem Verzerrungszustand postuliert worden sind. Als technische Lösungshilfsmittel werden Diracs δ -Funktionen sowie die Fourier- und Hankel-Transformationen benutzt. In gleicher Weise wird die zweite Klasse von Problemen behandelt, die die Fortpflanzung der Spannungen in einem Raum und in einem Halbraum betrifft, welche durch einen punkt-, linien- und flächenmäßig verteilten Verzerrungskern und durch eine Punktkraft verursacht werden.

P. Laasonen.

Nowacki, Witold: Two one-dimensional problems of thermoelasticity. Arch. Mech. stosow. 11, 333—346, russ. Zusammenfassg. 346 (1959).

Der elastische Halbraum $x \geq 0$ steht unter dem Einfluß einer kontinuierlich verteilten ebenen Wärmequelle in $x = \xi > 0$. Es wird vorausgesetzt, daß die entstandenen longitudinalen Wellen an der Grenzebene $x = 0$ den räumlichen Randbedingungen, entweder $T = 0$ oder $\partial T / \partial x = 0$ entsprechend reflektiert werden. Sowohl vollkommen elastisches, als auch viskoelastisches Verhalten der Materie wird berücksichtigt. Die Laplace-Transformation der Wärmeleitungsgleichung macht das hauptsächliche Mittel zur Lösung der Probleme aus. *P. Laasonen.*

Trostel, R.: Wärmespannungen in Hohlzylindern mit temperaturabhängigen Stoffwerten. Ingenieur-Arch. 26, 134—142 (1958).

Bei höheren Temperaturbereichen kann von der Veränderlichkeit der Wärmeleitfähigkeit, welche zusammen mit der Wärmeübergangszahl das im Inneren des dickwandigen Rohres herrschende Temperaturfeld beeinflusst, sowie des Elastizitätsmoduls und des Wärmeausdehnungskoeffizienten nicht mehr abgesehen werden. Verf. entnimmt aus dem Werkstoffhandbuch für Stahl und Eisen für den E -Modul eine quadratische, für die übrigen Größen lineare Temperaturfunktionen. Die geometrische Symmetrie wird durch die Randbedingungen für Temperatur und Spannungen nicht gestört; da ferner ein so langes Rohr betrachtet wird, daß auch die Endstörungen nicht in Betracht kommen, sind alle Größen nur vom Radius abhängig. Es ergeben sich direkte Integrationen, welche keine Schwierigkeiten bringen. Interessant ist die Feststellung des Verf., daß es wesentlich auf die Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitzahl und damit auf eine möglichst genaue Temperaturverteilung ankommt. Die Temperaturveränderlichkeiten des E -Moduls und des Ausdehnungskoeffizienten wären dagegen von sekundärem Einfluß (es genügt, deren Werte auf die mittlere Wandtemperatur zu beziehen). Dies wird durch numerische Beispiele belegt.

H. Neuber.

Hilton, Harry H.: On the representation of nonlinear creep by a linear viscoelastic model. J. Aero-Space Sci. 26, 311—312 (1959).

It is shown that the well-known equation of the Burgers body for uni-axial creep can be made to reproduce non-linear creep simply by introducing non-linear parameters. While for constant stress this conclusion is correct, though trivial, the effect of the non-linearity produces a highly non-linear equation for time-dependent stress. One important non-linear term has unfortunately been omitted in the derivation of this equation.

A. M. Freudenthal.

Seugling, W. R.: An iteration method for the solution of finite deformation problems in elasticity. Arch. Mech. stosow. 11, 3—13, russ. Zusammenfassg. 14—15 (1959).

An iteration method is proposed for the solution of boundary value problems of the following type: Given a deformed configuration τ of an isotropic homogeneous elastic medium, as well as the surface and body forces acting on τ and the surface Σ , determine the distribution of stresses in the interior of τ and the configuration (τ_0, Σ_0)

of the medium in the stress-free state. The method is based on the assumption that the deformation process $(\tau_0, \Sigma_0) \rightarrow (\tau, \Sigma)$ is continuous so that at each moment of time it is possible to determine the state of stress and the surface and body forces necessary to maintain the configuration in equilibrium. Since these forces are not the desired forces of the final state, the author considers a set of partial differential equations obtained by taking the time derivative of the equilibrium equations, where components of the rate of deformation tensor are expressed in terms of the velocities of particles. Supposing that at the moment $t + 1$ the configuration will reach the desired state, the time derivatives of the surface and body forces are substituted by the differences of the (unknown) desired forces and the previously obtained forces necessary to maintain the state, assuming the velocities to be maintained for a unit time interval. The partial differential equations are linear with respect to velocities. After the velocities are determined it is easy to determine the position vectors of the configuration at the moment t . Substituting the so obtained values into the equilibrium conditions, the process may be repeated until the residual surface and body forces are sufficiently small to be neglected. As an illustration, the author applied the method to the problem of torsion of a cylindrical bar and in the case of a circular bar obtained the second order terms in twist per unit length. In the paper two fundamental assumptions are made. The first is that the inertial forces can be neglected when the time derivative of the equilibrium equations is taken. The second assumption is that the linear stress-strain relations are valid although the deformations are not supposed to be sufficiently small so that the second order elastic effects could be neglected. The assumptions as well as the results do not seem quite acceptable to the reviewer.

R. Stojanovitch.

Dorn, W. S. and H. J. Greenberg: The mechanism technique and some questions in the plastic collapse of frames. *Sympos. Plasticita Sci. Costruzioni in Onore di A. Danusso*, 93—108 (1957).

Für das von Neal und Symonds gegebene Verfahren zur Bestimmung des Sicherheitsfaktors gegenüber dem plastischen Zusammenbruch ebener Rahmentragwerke werden genauere Begründungen angegeben, wobei auch die Definitionen und Voraussetzungen verschärft werden. Die Belastung der einzelnen Stäbe erfolgt durch Einzellasten senkrecht zur Stabachse, welche zueinander in konstantem Verhältnis stehen (proportionale Belastung), so daß für alle Lasten ein gemeinsamer während der Belastung stetig von Null anwachsender Multiplikator eingeführt werden kann; ein voll plastisches Moment erzeugt in dem zugehörigen Stabquerschnitt ein plastisches Gelenk, was bei proportionaler Belastung in den „kritischen Querschnitten“ möglich ist. Die kinematisch möglichen Transversalgeschwindigkeiten der kritischen Punkte, sowie die relativen Winkelgeschwindigkeiten (Differenzgeschwindigkeiten der Drehwinkel zu beiden Seiten des plastischen Gelenks) entsprechen einem „Mechanismus“, an welchem die äußeren Kräfte positive Arbeitsbeiträge leisten. Eine positive Kombination von Mechanismen ist eine lineare Kombination der den einzelnen Stäben entsprechenden „Grundmechanismen“ mit positiven Koeffizienten. Der Sicherheitsfaktor ist der kleinstmögliche Multiplikator der Belastung, ohne daß Bruch eintritt. Die jeweiligen, den einzelnen Mechanismen entsprechenden Multiplikatoren errechnen sich aus der zugehörigen virtuellen Arbeitsgleichung. Verf. befaßt sich mit den Fragen, ob sich alle möglichen Mechanismen als Kombinationen der Grundmechanismen darstellen lassen und ob für die exakte Ermittlung der Sicherheitszahl eine unendlich große Zahl von Mechanismen untersucht werden müßte. Er gelangt zu der Folgerung, daß stets nur eine endliche Zahl von Mechanismen in Betracht zu ziehen ist und sich deren Zahl noch durch Gesetzmäßigkeiten des Sicherheitsfaktors einschränken läßt. Darüber hinaus wird gezeigt, wie sich der Rechnungsgang auch auf allgemeinere Rahmentypen erweitern läßt.

H. Neuber.

Berry, J. G. and E. Reissner: The effect of an internal compressible fluid column on the breathing vibrations of a thin pressurized cylindrical shell. *J. aeronaut. Sci.* **25**, 288—294 (1958).

Es werden die radialen Schwingungen einer dünnwandigen Zylinderschale untersucht, die durch den Druck einer kompressiblen Flüssigkeit beansprucht wird. Die Aufgabe führt auf zwei gekoppelte partielle Differentialgleichungen vierter Ordnung für die Radialverschiebung der Schalenmittelfläche und eine Spannungsfunktion, die zunächst nichtlinear sind und dann nach der Methode der kleinen Schwingungen linearisiert werden. Durch die Kopplung der Schalenschwingungen mit den Schwingungen der Flüssigkeitssäule ergeben sich an der Schalenmittelfläche Übergangsbedingungen, die auf eine transzendente Frequenzgleichung führen. Diese wird für einige das Problem bestimmende Parameterwerte numerisch diskutiert.

A. Weigand.

Mahalingam, S.: An improvement of the Myklestad method for flexural-vibration problems. *J. Aero-Space Sci.* **26**, 46—50 (1959).

Das bekannte Verfahren von Myklestad zur Ermittlung der Eigenfrequenzen eines Biegesystems mit einer endlichen Zahl von Freiheitsgraden bringt eine umfangreiche numerische Rechnung mit sich, die im allgemeinen in Form einer sogenannten Myklestad-Tabelle durchgeführt wird. Die genaue Erfüllung der Randbedingungen des Systems erfordert eine mehrfache Wiederholung der Rechnung für willkürlich angenommene Frequenzen, die in der Nähe der zu ermittelnden Eigenfrequenz des Systems liegen. Verf. gibt eine Methode an, die eine weitere Approximation für die Eigenfrequenz aus den Daten einer Myklestad-Tafel mit Hilfe einer einfachen Hilfsrechnung zu ermitteln gestattet. Das Verfahren beruht auf einer vom Verf. angegebenen Abhängigkeit der Änderung der Eigenfrequenz des Systems von der als Elementes des Systems. Das vorgeschlagene Verfahren verringert den numerischen Rechenaufwand des Myklestad-Verfahrens. Bei der Durchführung des Myklestad-Verfahrens mit Hilfe von Digitalrechnern und fertigen Unterprogrammen dürfte jedoch der Gewinn an Rechenaufwand durch das vorgeschlagene Verfahren kaum ins Gewicht fallen.

W. Thielemann.

Moseenkov (Moseyenko), B. I.: On the phenomenon of resonance under the effect of forces of the own weight of a double rigidity rotating rod. *Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR* **1959**, 958—962, russ. und engl. Zusammenfassg. 962 (1959) [Ukrainisch].

Transverse oscillations of a double rigidity rod in a transitional mode of rotation under the effect of forces of its own weight are considered when passing through the first critical number of angular velocity. A first approximation asymptotic solution is constructed, first approximation systems of equations are derived and analysed for this case, taking into consideration the forces of external resistance.

Engl. Zusammenfassg.

Supino, G.: Alcune osservazioni sui modelli strutturali in campo elastico e plastico. *Sympos. Plasticita Sci. Costruzioni in Onore di A. Danusso*, 332—342 (1957).

Ausgehend von den Gleichgewichtsbedingungen des Spannungstensors mit Berücksichtigung der Gravitations- und der Trägheitskräfte sowie von den Spannungs-Dehnungs-Gleichungen zeigt Verf. zunächst für konstanten E -Modul die bekannten Modellgesetze für die Maßstäbe von Kraft, Länge und Zeit. Anschließend werden die Modellgesetze für einen vom Spannungszustand abhängigen E -Modul erweitert. Im Falle plastischer Spannungszustände führen die modifizierten Gleichgewichtsbedingungen zusammen mit der Fließbedingung zu teilweise neuen Modellgesetzen, wobei die experimentelle Realisierbarkeit diskutiert wird; insbesondere wird die Möglichkeit untersucht, bei statischer und dynamischer Belastung für das Modell den gleichen Werkstoff wie für die Hauptausführung zu verwenden. *H. Neuber.*

Vasilenko, N. V. and G. S. Pisarenko: Forced bending-torsional vibrations in rods under the effect of internal energy dissipation. *Dopovidi Akad. Nauk Ukrain. RSR* 1959, 833—836, russ. und engl. Zusammenfassg. 836 (1959) [Ukrainisch].

The paper deals with the problem of forced bending-torsional vibrations in rods under the effect of internal energy dissipation. The asymptotical method of N. M. Krylov and N. N. Bogoljubov is applied for the solution of the system of differential equations of the problem.

Englische Zusammenfassg.

Gužovskij (Guzhovsky), V. V.: On the stability and free oscillations of thin-walled bar systems. *Dopovidi Akad. Nauk Ukrain. RSR* 1959, 953—957 russ. und engl. Zusammenfassg. 957—958 (1959) [Ukrainisch].

Methods are outlined for determining the critical load and first frequency of free oscillations of thin-walled sets of bars of arbitrary cross section having an open shape. Simplicity of solution is attained by considering the deformations of relatively instantaneous coordinates of the centre of rotation. It proved possible to determine the transcendental functions from a known table in the formulae of the method of deformations.

Englische Zusammenfassg.

Holste, W.: Freie und erzwungene Schwingungen des elastisch gelagerten Balkens. *Forsch. Gebiete Ingenieurwes.* 24, 1—14 (1958).

Es werden zunächst die Frequenzgleichungen des elastisch gelagerten Balkens in übersichtlicher Form dargestellt. Die Auswertung berücksichtigt folgende Sonderfälle: Freie Schwingungen von an den Enden quer- oder drehgefederten Stäben mit symmetrischer oder unsymmetrischer Auflagerung, sowie mit oder ohne Zusatzmasse. Ferner werden auch die erzwungenen Schwingungen eines Balkens mit Dreh- und Querfederung untersucht, und zwar mit quer- und drehdämpfender Lagerung. Dabei sind Parallelschaltung der zugehörigen Feder- und Dämpfungsglieder (absolute Dämpfung), sowie Hintereinanderschaltung (relative Dämpfung) separat behandelt. Die Ergebnisse werden durch Versuche bestätigt. *H. Neuber.*

Nehari, Zeev: On the principal frequency of a membrane. *Pacific J. Math.* 8, 285—293 (1958).

Zweck der vorliegenden Arbeit ist zunächst eine Verallgemeinerung der isoperimetrischen Ungleichung von Rayleigh-Faber-Krahn auf den Grundton einer inhomogenen Membran D mit Massendichte $p(x, y)$: $\Delta u + \lambda p(x, y) u = 0$ in D , $u = 0$ am Rande C von D . Satz 1: Ist $\log p(x, y)$ subharmonisch, dann gilt $\lambda \geq \lambda_0$, wo $\lambda_0 =$ erster Eigenwert einer kreisförmigen homogenen Membran mit derselben Masse $\iint_D p \, dx \, dy$; d. h. $\lambda \iint_D p(x, y) \, dx \, dy \geq \pi j_0^2$ ($j_0 =$ erste Nullstelle von $J_0(r)$). — Es gilt eine teilweise Umkehrung: Satz 2: Ist D ein Kreis und $p(x, y)$ superharmonisch, so gilt $\lambda \leq \lambda_0$, d. h. $\lambda \iint_D p(x, y) \, dx \, dy \leq \pi j_0^2$. — Als Anwendung von Satz 1 wird dann gezeigt: Satz 3: Ein analytischer Teilbogen α von C sei konkav bezüglich D ; dann hat die längs α freie, längs $C - \alpha$ befestigte homogene Membran einen höheren Grundton als die halbkreisförmige homogene Membran mit derselben Masse, deren Rand längs des Durchmessers frei, sonst befestigt ist; d. h. $\lambda A \geq (\pi/2) j_0^2$, wobei A die Fläche von D ist. — Die Beweise beruhen auf Symmetrisierung, klassischen isoperimetrischen Ungleichungen und einfachen funktionentheoretischen Betrachtungen. — Die durch Satz 1 gegebene Verallgemeinerung der isoperimetrischen Ungleichung, sowie Satz 2, sind von denjenigen von Binyamin Schwarz (dies. Zbl. 81, 317) sehr verschieden (aber nicht ohne Zusammenhang); bei B. Schwarz war weder Sub- noch Superharmonizität von $p(x, y)$ vorausgesetzt, die Symmetrisierung also allgemein gültig; dagegen führt sie auf eine unhomogene kreisförmige Membran: Bei sub- oder superharmonischer Massendichte $p(x, y)$ wird Verf. eine öfters schärfere, jedenfalls aber explizite Abschätzung erhalten. — Eine Lücke bleibt bestehen zwischen den Voraussetzungen von Satz 1 und von Satz 2. Wäre etwa Satz 1 gültig mit der schwächeren Voraussetzung der Subharmonizität von $p(x, y)$, so hätte man diese Folgerung der beiden Sätze: Der Grundton einer kreisförmigen Membran mit harmonischem $p(x, y)$ wäre

nur von der Gesamtmasse $\iint p \, dx \, dy$ abhängig; dies ist nicht der Fall. — Bemerkungen des Ref.: Wegen der Beweismethode werden hier zwei Schritte gleichzeitig durchgeführt, welche zu trennen von Vorteil wäre: (a) Die Ersetzung einer sub- oder superharmonischen Massendichte durch eine harmonische (oder gar konstante) im Gebiet D selbst, analog der Poincaréschen Balayage-Methode der Potentialtheorie; (b) Die Symmetrisierung des Gebietes zu einem Kreis. Man kann vermuten, daß Analoga zu den Sätzen 1 und 2 schon bei Schritt (a) gelten, was hier für einen Kreis bewiesen ist. — Die vorliegende Arbeit zeigt einen Weg zum tieferen Verständnis der schwingenden unhomogenen Membran, was auch für Abschätzungen der Eigenwerte einer homogenen Membran sehr wichtig ist. *J. Hersch.*

Nevskij (Nevsky), P. M.: Free longitudinal vibrations of a string with elastic fastening of one end. *Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1959*, 963—965, russ. und engl. Zusammenfassg. 966 (1959) [Ukrainisch].

The author considers the free longitudinal vibrations of a string, one end of which is fastened immovably and the other is fastened to a point mass by elastic coupling. The vibrations of the string are investigated with allowance made for the velocity of propagation. Equations are derived for the displacements and changes in the tension of the string during vibrations.

Englische Zusammenfassg.

Romiti, Ario: Sugli effetti dell'isteresi elastica nelle vibrazioni degli alberi rotanti. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser.* 26, 372—378 (1959).

L'esame del fenomeno dell'isteresi elastica nei materiali costituenti gli alberi rotanti conduce ad esprimere la legge del moto perturbato degli alberi stessi con equazioni lineari. L'effettiva stabilità degli alberi, a velocità non critiche, è stata da taluni Autori, attribuita a cause quali la resistenza dell'aria. Analizzando però l'influenza delle variazioni della velocità angolare sul fenomeno dell'isteresi, si può notare che il problema non è lineare; le accelerazioni presentano successive discontinuità in numero che può essere infinito. Il fenomeno è stato qui studiato in assenza di altre cause perturbatrici, quali ad esempio eccentricità di massa o dissimmetrie elastiche. Quando un albero rotante subisce una perturbazione le sue fibre vengono ad essere alternativamente tese e compresse; il materiale costituente è allora soggetto ad isteresi elastica. Ciò avviene tutte le volte che la velocità angolare (ω) della rotazione dell'albero attorno alla sua deformata è diversa dalla velocità angolare $\dot{\theta}$ della deformata. Nelle sezioni dell'albero inflesso, l'asse neutro delle deformazioni ruota allora con velocità angolare relativa alla deformata $\omega - \dot{\theta}$; l'asse neutro delle tensioni ruota con la medesima velocità, ma in ritardo di un angolo 2μ ; dove per acciai normali μ vale circa 10^{-3} rad. L'equazione del moto di un albero elastico che porta una massa (m), ed è comandato da un motore a velocità costante è:

$$m\ddot{u} + k(1 \mp 2^{-i\mu})u = 0, \text{ dove } - \text{ è per } \omega > \dot{\theta}, + \text{ per } \omega < \dot{\theta};$$

k è la rigidezza elastica dell'albero; $u = z + iy$ la coordinata complessa del baricentro. La freccia elastica può perciò essere sempre ottenuta come risultante di due vettori controrotanti a uguale velocità (ω_0). I diagrammi di $(\dot{\theta}/\omega_0)_{\min}$ e $(\dot{\theta}/\omega_0)_{\max}$ sono tracciati in funzione del rapporto $A/B = \lambda$, dove $A(t)$, $B(t)$ sono le ampiezze espresse in valore assoluto e, ad un dato istante, sono l'una in aumento, l'altra in diminuzione. Sia $P_0(\omega, \lambda_0)$ il punto nel piano che caratterizza le condizioni iniziali del moto perturbato. Quatre zone sono date; se P_0 si trova nella zona I, oppure II, si ha sempre $\omega > \dot{\theta}$, λ cresce monotonamente; se invece P_0 si trova nella zona III è sempre $\omega < \dot{\theta}$, e λ diminuisce sinché il punto P entra nella zona IV. Per alberi dotati di una sola massa concentrata la stabilità risulta assicurata per le velocità subcritiche, per alberi con massa distribuita l'analisi diviene estremamente complicata e non si è potuto impostare un procedimento rigoroso. *D. Rašković.*

Yamamoto, Toshio: On critical speeds of a shaft supported by a ball bearing. *J. appl. Mech.* **26**, 199—204 (1959).

Eine senkrechtstehende rotierende Welle (Längslager) ist bekanntlich nicht stabil, sondern gerät bei einer kritischen Geschwindigkeit in Taumelschwingungen, die durch irgendwelche Unsymmetrien der Welle oder auch der Lagerung hervorgerufen werden. In der vorliegenden Arbeit wird experimentell eine solche um eine senkrechte Achse rotierende Welle untersucht, die in Kugellagern gestützt wird. Es wird gezeigt, daß infolge einer kleinen Differenz in den Durchmesser der einzelnen Kugeln der Kugellager zwei verschiedene Arten von kritischen Geschwindigkeiten bei der Rotation der Welle auftreten. Diese beiden kritischen Geschwindigkeiten haben verschiedene Schwingungsformen, die durch die Abmessungen der Kugellager bestimmt werden. Die eine gehört zu einer Vorwärtspräzession, die andere zu einer Rückwärtspräzession. Die Arbeit beschreibt die Ursachen der kritischen Geschwindigkeiten.

W. Kochanowsky.

Bagdoev, A. G.: Die Ausbreitung des Drucks im elastischen Halbraum. *Akad. Nauk Armjan. SSR, Doklady* **28**, 49—52 (1959) [Russisch].

The author treats the plane problem of the extension of the pressure in the elastic semispace acting on its surface, supposing the components of the tensor of tensions σ_x , σ_y , τ_{xy} , with boundary conditions $\sigma_y = 0$ for $|x| > R(t)$ and $\sigma_y = p_1(x, t)$ for $|x| < R(t)$, $\tau_{xy} = 0$, where p_1 is the pressure and $R(t)$ the coordinate of the front on the boundary of the semispace. This problem was solved previously by means of the quadrature with the integrals of the Possio type based on the methods of Smirnov and Sobolev, but in this paper the light rays method is used. Supposing that the initial velocity of the sound is $a_0 = a^{-1}$, because of the equation of the motion in the liquid one reduces to one wave equation for the pressure $p(x, y, t)$, the characteristic rays are the straight lines. The obtained solution is the same as the solution which was obtained by Sagomonjan by the method of the conical courses. The author implies that this method can be used also in the case of nonhomogeneous liquids using the Sobolev's σ function.

D. Raškovič.

Buchwald, V. T.: Transverse elastic waves in an internal stratum. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **12**, 43—51 (1959).

Propagation of Love waves in a stratum bounded by infinite media with same elastic properties in both ends have been discussed. Properties of the phase and group velocities of the waves have been found to be very similar to the case of transverse waves in a surface layer. — Finally, the discussion has been extended to the case where the bounding materials possess different elastic properties. The limits of phase and group velocities are obtained in each case, and cut-off frequencies and wave lengths are determined for each mode.

S. C. Das.

Gran Olsson, R.: Transversale Wellen in Stäben und Platten unter stoßförmiger Belastung. *Österreich. Ingenieur-Arch.* **12**, 93—95 (1958).

In einer Arbeit von M. A. Dengler (dies. Zbl. **70**, 419) über die durch einen Querstoß in einem unendlich langen Balken erzeugten Biegewellen spielt eine durch $c = E/\lambda G$ definierte dimensionslose Größe eine Rolle, in der λ durch die Verteilung der Schubspannung über den Querschnitt bestimmt ist. Verf. gibt ohne Beweis an, wie man durch geeignete Wahl der Zahl λ auch die nicht genau geradlinige Verteilung der Biegespannung und den Einfluß der transversalen Normalspannungen für den rechteckigen Querschnitt berücksichtigen kann. Ist μ mit $0 \leq \mu \leq 0,5$ die Poissonsche Zahl, so gilt: $c = 2,4 + 1,5\mu$. Es liegt also c zwischen 2,4 und 3,15. Verf. empfiehlt, mit diesen Grenzwerten numerische Rechnungen durchzuführen.

A. Weigand.

Musgrave, M. J. P.: On whether elastic wave surfaces possess cuspidal edges. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **53**, 897—906 (1957).

Die für anisotrope Medien geltende Gleichung dritten Grades für das Quadrat der Ausbreitungsgeschwindigkeit elastischer Wellen enthält außer den Elastizitätskonstanten und der Dichte auch die Richtungskosinus der Normalen zur Wellenfront. Zur Veranschaulichung der zu den verschiedenen Ausbreitungsrichtungen gehörenden Geschwindigkeiten benutzt man Hilfskoordinaten, welche sich jeweils aus dem Produkt eines Richtungskosinus mit dem Kehrwert der Geschwindigkeit errechnen. In diesem Koordinatensystem ergibt sich die sogenannte inverse Fläche. Der vom Ursprung zu einem Flächenpunkt führende Vektor hat die Richtung der Normalen zur Wellenfront und ist der Geschwindigkeit umgekehrt proportional. Die eigentliche „Wellenfläche“ ergibt sich, wenn nicht der Kehrwert, sondern die Geschwindigkeit selbst der Größe des Vektors entspricht. Verf. untersucht die Frage, ob auf dieser Fläche Spitzen auftreten können und gelangt zu Ungleichungen für die elastischen Konstanten, welche bei rhombischer, tetragonaler, kubischer oder hexagonaler Symmetrie erfüllt sein können. Die Ergebnisse geben zugleich über die bei manchen Stoffen zu erwartende große Strahlablenkung Aufschluß, die z. B. für die experimentelle Bestimmung der elastischen Konstanten mit Hilfe hochfrequenter Impulse von Bedeutung ist.

H. Neuber.

Pekeris, C. L. and I. M. Longman: The motion of the surface of a uniform elastic half-space produced by a buried torque-pulse. Geophys. J. roy. astron. Soc. 1, 146—153 (1958).

Von einer im elastischen Halbraum versenkten Punktquelle werden Scherungswellen ausgesandt. An der Oberfläche des Halbraumes erscheinen für Entfernungen, die jenseits des Winkels der Totalreflexion liegen, als erste Einsätze SP-Wellen, das sind Wellen, die unter dem Winkel der Totalreflexion als Scherungswellen bis zur Oberfläche und — da es sich nicht um ebene, sondern um Kugelwellen handelt — von da als gebeugte Longitudinalwellen weiter gelaufen sind. Erst später kommt der Einsatz der direkten Transversalwellen (S). Wenn man für die Zeitabhängigkeit des ursprünglichen Pulses eine Heaviside-Funktion annimmt, so beginnt sowohl der SP- als auch der S-Einsatz mit einer unendlich großen Amplitude. W. Kertz.

Tahsin, Salah I.: Propagation of a sound pulse in a medium with a complex elastic modulus. Proc. Iraqi sci. Soc. 1, 1—9 (1957).

Es wird die Ausbreitung eines endlichen Wellenzuges in einem dispergierenden Medium untersucht, wobei angenommen wird, daß die Phasengeschwindigkeit den für Relaxationsvorgänge typischen Frequenzgang hat. Die Berechnung der Verformung der Welle geschieht in bekannter Weise mit Hilfe einer Fourier-Transformation. Die Auswertung der dabei auftretenden Integrale zeigt, daß dem Signal ein „Vorläufer“ vorausgeht, der exponentiell anwächst, bis das eigentliche Signal einsetzt. Wie zu erwarten pflanzt sich der Vorläufer mit der im jeweiligen Medium größtmöglichen Geschwindigkeit fort, während die Geschwindigkeit des Signals kleiner ist.

M. Heckl.

• Geniev, G. A.: Fragen der Dynamik eines schüttigen Mediums. [Voprosy dinamiki sypučej sredy.] (Akademie für Bauwesen und Architektur der UdSSR. Zentrales Forschungs-Institut für Baukonstruktionen. Wissenschaftl. Mitt. 2.) Moskau: Staatsverlag für Literatur über Bauwesen und Architektur 1958. 121 S. R. 4,35 [Russisch].

This paper concerns the medium of a rigid-plastic type, with the flow condition in the form $\max(|\tau_n| - \sigma_n \operatorname{tg} \varphi) = k$, where τ_n and σ_n are the tangential and the normal stresses in a plane, respectively; φ and k are material constants; φ being the angle of internal friction, and k being the cohesion. For the case of a plane strain, the fundamental equations of the dynamics of this medium are: (a) Two equations of equilibrium; (b) the flow condition mentioned above, written in terms of the stress components in a Cartesian coordinate system; (c) the continuity equation, written for the cases of an incompressible and a compressible medium; (d) the con-

dition that the directions of maximum velocities coincide with the directions of the slip lines, i. e. lines on which the stresses τ_n and σ_n satisfy the flow condition. The author derives also a slightly different form of this equation on the basis of some structural considerations. The equations obtained are transformed (following the outlines worked out by V. V. Sokolovskij) to four so-called basic equations, and some of their properties are discussed. Since the exact solutions may be obtained only for simplest cases, the author indicates a numerical method. The paper contains some examples: Pressure on a retaining wall, yielding of soil under a surface loading, flow of mass from a container. In solving these problems, however, rather drastic simplifications concerning the inertia forces were introduced.

M. P. Bieniek.

Hydrodynamik:

Managadze, G. D.: Zur Frage der Bestimmung der Trennungsfläche von Dichten. Soobsčenija Akad. Nauk Gruzinskij SSR 22, 409—412 (1959) [Russisch].

Power, G.: Accelerating body with vortex trail in variable two-dimensional flow. Z. angew. Math. Mech. 39, 139—146 (1959).

Verf. betrachtet die Umströmung eines Zylinders mit beliebigem Querschnitt, hinter dem sich veränderliche Spiralwirbel ausbilden — ein Modell, das jede reelle Umströmung annähern könnte. Er konstruiert das Potential

$$\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega'_n e^{n i \zeta} - K \zeta - \int_{s(z_0)}^{s(z_1)} i k_s \ln \left\{ \frac{1 - e^{-i(\zeta - \zeta_s)}}{1 - e^{i(\zeta - \bar{\zeta}_s)}} \right\} ds \\ - \sum_{r=1}^p K_r \ln [1 - e^{-i(\zeta - \zeta_r)}] - \sum_{r=1}^p \bar{K}_r \ln [1 - e^{i(\zeta - \bar{\zeta}_r)}],$$

wobei $\Omega'_n = a_{n+1} \bar{w} - i w b_n$, ($n > 1$), $\Omega'_1 = a_2 \bar{w} - a_0 w - i w b_1$, $b_n = \sum_{r=0}^{\infty} a_{n+r} a_r$, $w = u + i v$ und K die Zirkulation bedeutet. Das Integralglied stellt den Effekt der Wirbelfolge dar, die sich vom Rande z_0 aus bis zum Punkt z_1 verbreitet, und K_s ihre Intensität für die Länge 1 an der Stelle s vom Rande gemessen. Ferner wird die Blasiusche Formel verwendet, und es werden Ausdrücke für die komplexe Kraft und das komplexe Moment auf dem Zylinder in ganz allgemeiner Form erhalten. In der Praxis lassen diese Ergebnisse mehrere Vereinfachungen und Annäherungen zu.

Bl. Dolaptschiew.

Naumann, Alexander und Heinz Pfeiffer: Versuche an Wirbelstraßen hinter Zylindern bei hohen Geschwindigkeiten. Forsch.-ber. Wirtsch.-Verkehrsminist. Nordrhein-Westfalen Nr. 493, 32 S. (1958).

Verff. untersuchen experimentell das von kleinen und mäßigen Reynoldszahlen her bekannte Bild — die sogenannte Wirbelstraße — im Bereich höherer Geschwindigkeiten bis über die kritische Machzahl hinaus. Gegenstand ihrer Untersuchung ist die Wechselwirkung zwischen den Verdichtungsstößen — wenn bei Steigerung der Anströmungsgeschwindigkeit an einer Körperoberfläche erstmals die Schallgeschwindigkeit lokal überschritten wird — und der laminaren Grenzschichtablösung. Die Versuche an Kreiszyklindern mittels der Schlierenmethode bei Strömungen im Bereich Machscher Zahlen 0,35 bis 0,75 und Reynoldsscher Zahlen 80 000 bis 200 000 zeigten: a) es besteht immer noch alternierende Wirbelablösung im allgemeinen auch oberhalb der kritischen Machschen Zahl bis in den Bereich der kritischen Reynoldsschen Zahl; b) das Strömungsverhalten wird durch eine Wechselwirkung zwischen Wirbelablösung und Stoßschwingung charakterisiert; c) mit wachsender Machzahl nehmen die dimensionslosen Wirbelfrequenzen nur sehr schwach zu; d) beim Durchgang durch die kritische Machzahl erfahren die Wirbelfrequenzen keine Änderung und werden durch die lokalen Verdichtungsstöße nicht beeinflusst; e) die alternierende

Wirbelablösung steuert das Verhalten der Verdichtungsstöße. Eine Erklärung, warum mit Einsetzen des kritischen Re-Bereiches die Wirbelfrequenzen stark zunehmen, ist noch nicht bekannt.

Bl. Dolaptschiew.

Isay, Wolfgang-Hermann: Die Strömung durch ein schwingendes und rotierendes radiales Schaufelgitter. Z. Flugwiss. 6, 319—328 (1958).

Verf. untersucht das Strömungsfeld durch einen rotierenden Schaufelstern bei inkompressibler, reibungsfreier Flüssigkeit. Die Streckenprofile sollen außerdem harmonische Schwingungen in Phase um ihre Ruhelage ausführen. Das Geschwindigkeitsfeld wird durch Wirbelbelegungen auf den N Streckenprofilen $z = \varrho \zeta_0^v$ mit $R_i \leq \varrho \leq R_a$, $\zeta_0^v = e^{2\pi i v/N}$; $v = 0, 1, \dots, N-1$ und den freien Wirbeln infolge der Zirkulationsänderungen um die Schaufeln induziert. Die Anströmung wird hervorgerufen durch eine Wirbelquelle bzw. Wirbelsenke im Koordinatenursprung, je nachdem die Grundströmung von innen nach außen bzw. umgekehrt erfolgt. Dabei ist der gesamte Bereich $|z| \geq R_a$ bzw. $|z| \leq R_i$ mit freien Wirbeln ausgefüllt. Für die Wirbellichte auf den Profilen wird der sehr spezielle Ansatz gemacht:

$$\gamma(\varrho, \Phi) = \sum_{n=-6}^6 a_n(\varrho) e^{inN\Phi}; \quad \zeta = \varrho e^{i\Phi}; \quad R_i \leq \varrho \leq R_a.$$

Für die Funktionen $a_n(\varrho)$ werden dann Integralgleichungen hergeleitet nach Vorgabe der Normalgeschwindigkeiten an den Schaufeln in der Form $\omega r \left(1 + \sum_{n=-6}^6 p_n e^{inN\Phi}\right)$ mit $z = r e^{i\Phi}$ und von r unabhängigen Konstanten p_n . Die Integralgleichungen werden durch geeignete Substitutionen umgerechnet auf solche vom Typus

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi Y_n(\tau) \frac{\sin t}{\cos \tau - \cos t} d\tau = f_n(t); \quad n = 1, \dots, 6 \quad \text{in} \quad 0 < t < \pi.$$

Diese Gleichungen werden allgemein durch Fourierreihenentwicklung wie bei Kucharski, der den stationären Fall behandelte, gelöst (s. dies. Zbl. 25, 337). Den Schluß der referierten Arbeit bildet ein Zahlenbeispiel mit graphischen Darstellungen der instationären Anteile der Schaufelzirkulationen zu $n = 1, \dots, 6$. Ref. möchte noch hinzufügen, daß zunächst die zweite Gleichung fehlerhaft ist, da die Tangentialkomponente $\pm \frac{1}{2} \gamma(r, \Phi)$ ist, je nachdem man sich auf dem oberen oder unteren Ufer der Profile befindet. Die Behandlung des Problems scheint mathematisch durchsichtiger zu werden, wenn die Integralgleichung für die Schaufelzirkulation unmittelbar gelöst wird nach Ausübung der bei Kucharski angegebenen Transformation. Weiterhin kann man sich befreien von der Voraussetzung, daß alle Schaufeln in Phase schwingen, [s. z. B. Mendelson and Carroll, Technical Note 3263, Nat. Advisory Committee Aeronaut., Washington (1954)]. Durch konforme Abbildung kann man ein radiales Schaufelgitter mit Streckenprofilen bzw. Profilen aus Stücken von logarithmischen Spiralen auf ein senkrechtes bzw. gestaffeltes Streckengitter abbilden. Die Randwertprobleme für diese Probleme wurden vom Ref. zusammen mit H. Söhngen gelöst [s. Z. angew. Math. Mech. 38, 442—465 (1958) und Dissertation E. Meister, Saarbrücken 1958].

E. Meister.

Raabe, J.: Beiträge zur Berechnung von Kaplanturbinen. Ingenieur-Arch. 27, 1—32 (1959).

Verf. betrachtet die Strömungen durch Leitrad, Übergangsraum, Laufrad und Saugrohr einer Kaplanturbine. Insbesondere werden auch die Übergangsbedingungen zwischen je zweien dieser Bauelemente untersucht, und es wird ein konstruktiver Weg zur näherungsweise Auslegung einer „günstigen“ Kaplanturbine angegeben. Eine nach dieser Berechnungsmethode wirklich konstruierte Turbine hatte nur geringe Abweichungen gegen die theoretisch vorausgesagten Werte. Diese Arbeit enthält viele wichtige Ergebnisse, von denen manche, wie z. B. ein Näherungsverfahren zur Bestimmung von Profilskelettlinien mit möglichst konstantem Druck auf der

Saugseite, d. h. mit geringster Kavitationsgefahr, oder Betrachtungen über wirbelbehaftete Strömungen hinter Lauf- oder Leiträdern über den Rahmen der Theorie der Kaplan-turbinen hinaus von allgemeinerer Bedeutung sind. *G. Jungclauss.*

Schlichting, H. und E. G. Feindt: Berechnung der reibungslosen Strömung für ein vorgegebenes ebenes Schaufelgitter bei hohen Unterschallgeschwindigkeiten. *Forsch. Gebiete Ingenieurwes.* 24, 19—28 (1958).

Verf. leiten die Formeln für die Teilung, den Staffelungswinkel, Anstellwinkel und die Geschwindigkeiten her, die an den dünnen und schwach gewölbten Profilen des zugehörigen Gitters in inkompressibler, zweidimensionaler, reibungsfreier Strömung auftreten, wenn dieses mittels der Prandtl-Glauert-Transformation aus einem entsprechenden Gitter entstanden ist, das mit Unterschallgeschwindigkeit angeströmt wird. Für gewisse Wertesysteme der o. g. Parameter werden die Geschwindigkeitsverteilungen dann nach dem Verfahren von H. Schlichting (dies. Zbl. 65, 407¹) berechnet und graphisch dargestellt. Die Arbeit von W. H. Isay über kompressible Gitterströmungen wird nicht zitiert (dies. Zbl. 64, 200). *E. Meister.*

Traupel, Walter: Theorie zur Berechnung des Abströmwinkels bei Turbinengittern. *Z. angew. Math. Phys.* 9b, Festschrift Jakob Ackeret, 687—694 (1958).

Verf. verbessert die sog. „Sinus-Regel“ für den Austrittswinkel der Strömung durch ein Gitter mit engstehenden Schaufeln auf kompressible Unterschallströmungen durch Schaufelgitter mäßiger Teilungen. Es werden zwei geschlossene Kontrollkurven gezogen, von denen je ein Stück längs der „mittleren Stromlinie“ zusammenfallen. Der Massenfluß wird durch diese Stromlinie halbiert. Durch Impuls- und Kontinuitätsbetrachtungen für die gemittelten Geschwindigkeiten innerhalb der beiden Stromröhren ergibt sich eine für die Praxis einfache Formel für den Tangens des Abströmwinkels, die zu guten Werten führt. *E. Meister.*

Concer, D. B.: Heat flow towards a moving cavity. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 12, 222—231 (1959).

Viene risolto un problema di flusso stazionario di calore esternamente ad una cavità cilindrica indefinita, mobile con velocità costante normale all'asse, supposta assegnata la temperatura costante sulla superficie della cavità e all'infinito. Vengono trattati i due casi della sezione normale della cavità circolare od ellittica, esprimendo la soluzione come serie di funzioni di Bessel o rispettivamente di Mathieu. Il problema matematico considerato ne schematizza uno tecnico che interessa lo sfruttamento delle miniere d'oro.

G. Sestini.

Jones, E. E.: The elliptic cylinder in a shear flow with hyperbolic velocity profile. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 12, 191—210 (1959).

Die ebene, reibungsfreie, stationäre, inkompressible Strömung um einen elliptischen Zylinder in scherender Anströmung wird berechnet. Das Anströmprofil ist dabei näherungsweise wie ein Nachlauf gewählt. Der Laplace-Operator der Stromfunktion ist damit gleich einer linearen Stromfunktion. Nach Einführen elliptischer Koordinaten lassen sich Gleichungen und Randbedingungen durch einen Separationsansatz der Stromfunktion befriedigen. Man erhält zwei Mathieusche Differentialgleichungen. Druckverteilung und Luftkräfte mit und ohne Anstellung des Zylinders werden berechnet. Der Staupunkt ist bei exzentrischer Lage des Zylinders in Richtung höherer Anströmgeschwindigkeit verschoben.

K. Oswatitsch.

Elder, J. W.: Steady flow through non-uniform gauzes of arbitrary shape. *J. Fluid Mechanics* 5, 355—368 (1959).

In einem Kanal konstanten Querschnittes befindet sich ein beliebig gekrümmtes Sieb mit nichtgleichförmigem Durchflußwiderstand. Die Anströmung sei ebenfalls ungleichmäßig. Gefragt ist nach der Geschwindigkeitsverteilung hinter dem Sieb. Dieses Problem wird unter folgenden Vereinfachungen gelöst: 1. Zweidimensionale Strömung, 2. Alle Abweichungen von einem Mittelwert werden als klein voraus-

gesetzt, so daß Linearisierung der Gleichungen erlaubt ist. Die für dieses Problem entwickelten allgemeinen Formeln werden auf folgende Sonderfälle angewandt: a) Strömung hinter einem schräg gestellten, geraden und gleichmäßigen Sieb, (Die vom Verf. zusammen mit G. Davis durchgeführten Messungen stehen sogar noch bei Winkeln von 45° in erstaunlich guter Übereinstimmung mit der linearisierten Theorie.) b) Strömung hinter einem parabolisch gekrümmten Sieb, wobei ebenfalls gute Übereinstimmung mit Messungen gefunden wird c) Erzeugung einer linearen Scherströmung hinter einem S-förmig gekrümmten Sieb. Die hierfür notwendige Form des Siebes wird berechnet.

W. Wuest.

Hasimoto, H.: On the periodic fundamental solutions of the Stokes equations and their application to viscous flow past a cubic array of spheres. *J. Fluid Mechanics* 5, 317—328 (1959).

Verf. behandelt mit Hilfe von Fourier-Reihen Lösungen der Stokes-Gleichung für die zähe Strömung um räumliche, periodisch angeordnete Körper, insbesondere Kugeln. Er zeigt, daß die Schwierigkeit der Divergenz der Fourierreihen durch die Einführung eines mittleren Druckgradienten umgangen werden kann. Physikalisch bedeutet dieses, daß der Einfluß weit entfernter Kugeln im wesentlichen nur noch in Form eines Druckgradienten in Strömungsrichtung berücksichtigt wird. Das Verfahren wird angewandt auf drei verschiedene Kugelanordnungen, und in jedem der entstandenen Fälle wird die Kraft auf jede der Kugeln größer als im Falle der bekannten Lösung für die Strömung um eine Einzelkugel. Das Verfahren läßt sich auch auf zweidimensionale Kugelanordnungen anwenden und die Ergebnisse stimmen gut überein mit denen, die nach anderen Verfahren gerechnet wurden.

G. Jungclaus.

Watson, J.: The two-dimensional laminar flow near the stagnation point of a cylinder which has an arbitrary transverse motion. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 12, 175—190 (1959).

Betrachtet wird die laminare Strömung gegen eine senkrecht zur Strömungsrichtung stehende ebene Wand, die sich in ihrer Ebene seitlich bewegt. Dazu wird zunächst die Auswirkung einer plötzlichen zeitlichen Änderung der Hauptströmung auf die Strömung in Wandnähe behandelt. Anschließend wird die Gleichung für die Staupunktströmung an einer bewegten Wand aufgestellt; durch Anwendung einer Laplace-Transformation gelingt es, diese auf eine Form zu bringen, die eine Lösung durch Reihenentwicklung für kleine Zeiten τ sowie durch asymptotische Entwicklung für große τ erlaubt. Diese Näherungslösungen werden für den dazwischenliegenden Bereich von τ durch eine Näherung nach Pohlhausen ergänzt.

G. Hämmerlin.

Stuart, J. T.: The viscous flow near a stagnation point when the external flow has uniform vorticity. *J. Aero-Space Sci.* 25, 124—125 (1959).

Verf. betrachtet eine ebene Staupunktströmung gegen eine Wand, der eine Scherströmung parallel zur Wand mit konstanter Rotation ω überlagert ist. Im Falle verschwindender Zähigkeit sind dann $u = ax - \omega z$ und $w = -az$ die Geschwindigkeiten parallel und senkrecht zur Wand, wobei x bzw. z die Abstände vom Staupunkt bzw. von der Wand bedeuten. Bei Berücksichtigung der Zähigkeit erhält Verf. eine exakte Lösung der Navier-Stokesschen Gleichungen, die für große z von der Form $u \sim ax - \omega(z - \delta_1)$, $v = -a(z - \delta_1)$ ist. Die gesamte Scherströmung wird also um die Verdrängungsdicke δ_1 von der Wand fortgeschoben. Wie vom Ref. an anderer Stelle ausführlich diskutiert wurde [*J. Aero-Space Sci.* 26, 844 (1959)], ist diese Arbeit ein sehr wesentlicher Beitrag zu einer langjährigen Kontroverse über die richtige äußere Randbedingung für die Grenzschichtgleichung bei Scherströmungen.

G. Jungclaus.

Hocking, L. M. and D. H. Michael: The stability of a column of rotating liquid *Mathematika*, London 6, 25—32 (1959).

Es sei eine unendlich lange Säule inkompressibler, reibungsfreier Flüssigkeit in Form eines Rotationszylinders gegeben. Verff. untersuchen theoretisch die Stabilität einer solchen schwerelos vorausgesetzten Säule unter der Wirkung der am Zylindermantel angreifenden Oberflächenspannung gegenüber ebenen Störungen, d. h. solchen, die von der axialen Richtung unabhängig sind. Falls die ganze Säule wie ein starrer Körper um ihre Achse rotiert, erhält man immer Stabilität, wenn die Oberflächenspannung größer ist als ein durch Rotationsgeschwindigkeit, Flüssigkeitsdichte und Zylinderradius bestimmter Wert. Falls nur ein rotationsförmiger Kern der Säule rotiert, während die äußere Schale in Ruhe bleibt, oder auch im umgekehrten Falle, wirkt die Oberflächenspannung nicht für alle Wellenzahlen (in Umfangsrichtung) der Störung stabilisierend. Nach Überschreiten einer bestimmten Wellenzahl macht sich die Existenz der Grenzfläche zwischen rotierendem und nichtrotierendem Teil destabilisierend bemerkbar.

E. Becker.

Serrin, James: On the stability of viscous fluid motions. Arch. rat. Mech. Analysis 3, 1—13 (1959).

Zähe, inkompressible und begrenzte Strömungen werden auf ihre Stabilität gegenüber beliebigen (infinitesimalen oder endlichen) Störungen untersucht. Dazu wird die kinetische Energie K einer Störbewegung betrachtet. Stabil im Mittel sind solche Störungen, für die $K \rightarrow 0$ bei $t \rightarrow \infty$. Es ergeben sich universelle Stabilitätskriterien, so z. B. die Aussage, daß eine begrenzte Strömung stets stabil ist, wenn $Re = Vd/\nu < 5,71$ (V = Maximalgeschwindigkeit der Grundströmung, d = Breite des Strömungsbereichs, ν = kinematische Zähigkeit). Am Beispiel der Couette-Strömung zwischen zwei rotierenden Zylindern kann das Kriterium mit den bekannten Taylorschen Resultaten für infinitesimale wirbelartige Störungen verglichen werden. Ein durch eine Variationstechnik gewonnenes verbessertes universelles Stabilitätskriterium liefert hier einen Wert, der sehr nahe an die Taylorsche Stabilitätsgrenze herankommt.

G. Hämmerlin.

DiPrima, R. C.: The stability of viscous flow between rotating concentric cylinders with a pressure gradient acting round the cylinders. J. Fluid Mechanics 6, 462—468 (1959).

Die betrachtete Grundströmung im Spalt zwischen zwei achsengleichen Zylindern werde durch Rotation des inneren Zylinders (Taylor) und durch einen Druckgradienten erzeugt (Dean), der in Richtung der ersteren Strömung oder entgegengesetzt wirkt. Es interessieren der kritische Taylor-Parameter T (bezogen auf die Rotationsgeschwindigkeit) und die zugehörige kritische Wirbeldicke in Abhängigkeit von $Q = 3 V_P/V_R$; dabei sind V_P und V_R die mittleren Geschwindigkeiten der durch Druckgradient bzw. durch Rotation erzeugten Strömungen. Die Näherungslösung des dreiparametrischen Eigenwertproblems der Störungsdifferentialgleichungen (Annahme: Kleine Spaltbreite) geschieht durch einen Fourierreihensatz (Chandrasekhar) und Berücksichtigung der ersten Glieder. Die Kurve $T(Q)$ liefert für $Q = 0$ den kritischen Wert des Taylorfalls. Sie zeigt sein Maximum für $Q \approx -3,6$. Dort sind V_P und V_R entgegengerichtet und beinahe gleich groß (genau bei $Q = -3$).

G. Hämmerlin.

Davies, T. V.: On the forced motion due to heating of a deep rotating liquid in an annulus. J. Fluid Mechanics 5, 593—621 (1959).

Eine Flüssigkeit befinde sich zwischen zwei konzentrischen Zylindern und werde in Rotation versetzt. Gleichzeitig werde der innere Zylinder gekühlt bzw. der äußere erwärmt. Die Flüssigkeit sei nach unten durch eine feste Fläche, nach oben durch eine freie Oberfläche begrenzt. Bei einer bestimmten Rossby-Zahl (im wesentlichen: Verhältnis von radialer Temperaturdifferenz zum Quadrat der Winkelgeschwindigkeit) setzt eine Wellenbewegung in dem Medium ein. Auf der freien Oberfläche kann ein "jet-stream" beobachtet werden, der sich zwischen den beiden Zylindern bewegt. Verf. gibt eine Theorie dieser Strömung und führt eine Arbeit von R. Rogers (dies.

Zbl. 82, 397) weiter. Ausgehend von den Eulerschen Gleichungen, der Kontinuität und der Wärmetransportgleichung wird für alle abhängigen Variablen eine Entwicklung nach Potenzen der Rossby-Zahl durchgeführt. Nullte Näherung ist die geostrophische Approximation (jedoch mit der Wärmetransportgleichung). Dem Verf. gelingt die Berechnung der nächsten Näherung. Ein Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen zeigt zumindest qualitative Übereinstimmung. *J. Zierep.*

Zierep, Jürgen: Eine rotationssymmetrische Zellularkonvektionsströmung. Beitr. Phys. Atmos. 30, 215—222 (1958).

Verf. behandelt die Konvektionsströmung einer Flüssigkeit, die durch punktförmige Wärmezufuhr der Grundfläche ausgelöst wird. Die sich ausbildende ringförmige Zellularstruktur der Konvektion ergibt sich aus einem Eigenwertproblem. Die Übertragung der Modellergebnisse auf atmosphärische Strömungen dürfte durch die Nichtberücksichtigung mancher in der Atmosphäre wichtiger Nebenumstände schwierig sein. *A. Defant.*

Zierep, Jürgen: Über die Bevorzugung der Sechseckzellen bei Konvektionsströmungen über einer gleichmäßig erwärmten Grundfläche. Beitr. Phys. Atmos. 31, 31—39 (1958).

Eine theoretische Untersuchung über die Form der sich ausbildenden Konvektionszellen über eine gleichförmig erwärmte Grundfläche. Verf. weist nach, daß das Sechseckmuster der Bénardschen Zellen gegen instationäre Störungen ein stabiles Verhalten zeigt und dadurch bei der Ausbildung bevorzugt wird. *A. Defant.*

Tippelskirch, H. v.: Weitere Konvektionsversuche: Der Nachweis der Ringzellen und ihrer Verallgemeinerung. Beitr. Phys. Atmos. 32, 2—22 (1959).

Erwärmt man ein zähes, wärmeleitendes Medium gleichmäßig an der Grundfläche, so stellen sich bekanntlich beim Überschreiten einer kritischen Temperaturdifferenz zwischen Grund- und Deckfläche die Bénardschen Polygonzellen in dem Medium ein. Ref. hat eine neue Zellularströmung theoretisch vorhergesagt (s. vorstehende Referate). Sie besteht aus Ringzellen, die konzentrisch um einen Auslöschungspunkt angeordnet sind. Verf. ist es gelungen, diese Zellenströmung experimentell nachzuweisen. Es besteht quantitativ völlige Übereinstimmung zwischen den berechneten und gemessenen Zellradien. *J. Zierep.*

Koschmieder, E. L.: Über Konvektionsströmungen auf einer Kugel. Beitr. Phys. Atmos. 32, 34—42 (1959).

Die Zellularkonvektionsströmungen in einer ebenen Flüssigkeitsschicht sind weitgehend im Experiment und von der Theorie untersucht worden. Verf. entwickelt im Anschluß an Chandrasekhar (dies. Zbl. 46, 240; 51, 239. Philos. Mag., VIII. Ser.) die Theorie für die Konvektionsströmungen auf einer gleichmäßig erwärmten Kugel. Unter den üblichen Linearisierungsannahmen resultiert aus den Grundgleichungen nach einer Elimination im stationären Fall eine Differentialgleichung 6. Ordnung für die Radialkomponente der Geschwindigkeit v_r . Durch einen Separationsansatz entsteht für den r -abhängigen Anteil von v_r ein zweiparametrisches Eigenwertproblem, während die φ - und ϑ -abhängigen Anteile von Kugel- und Winkel-funktionen gebildet werden. Die Differentialgleichung für das Eigenwertproblem ist ungleich komplizierter als im Fall der Strömung über der Ebene und wird nur maschinell zu bewältigen sein. Ohne dieses Eigenwertproblem explizit zu lösen, macht Verf. Aussagen über die Form der möglichen Strömungen. Es entstehen Zellen, die den Ringzellen des Ref. bei der Strömung über der Ebene entsprechen. Abschließend werden einige Bemerkungen über die Beziehungen dieses Modells zu den Strömungen auf der Erde gemacht. *J. Zierep.*

Yih, Chia-Shun: Thermal instability of viscous fluids. Quart. appl. Math. 17, 25—42 (1959).

In einem zähen, wärmeleitenden Medium bildet sich eine Zellularströmung aus, wenn ein gewisser kritischer Temperaturgradient in der Vertikalen überschritten

wird. Der Wert dieses Gradienten hängt von den Randbedingungen ab. Bisher wurde vornehmlich der Fall einer horizontalen Flüssigkeitsschicht behandelt. Verf. betrachtet dagegen ein Medium zwischen zwei vertikalen Wänden bzw. in einem vertikalen Rohr, im letzteren Fall mit und ohne Rotation. Auch hier wird vorausgesetzt, daß ein negativer vertikaler Temperaturgradient vorliegt. Für diese Fälle werden vom Verf. die linearisierten thermokonvektiven Differentialgleichungen gelöst und im stationären Fall der Zusammenhang von Rayleigh-Zahl und Wellenzahl der Störungen in vertikaler Richtung angegeben. Gegenüber dem klassischen Fall der horizontalen Wände liegt hier die kritische Rayleigh-Zahl im ebenen und rotations-symmetrischen Fall (ohne Rotation) bei der Wellenzahl Null. *J. Zierep.*

Howard, Louis N.: Hydrodynamic stability of a jet. *J. Math. Physics* **37**, 283—298 (1959).

Die Untersuchung der Stabilität des ebenen Laminarstrahls geht von der Orr-Sommerfeld-Gleichung (vgl. Curle, dies. Zbl. **77**, 184 und Tatsumi-Kakutani, dies. Zbl. **81**, 410) mit der bekannten Grenzschichtlösung als Grundprofil aus. Die Orr-Sommerfeld-Gleichung wird in eine homogene Integralgleichung 2. Art übergeführt. Deren Kern, die gesuchte Eigenfunktion Φ sowie der Parameter c (Phasengeschwindigkeit) werden nach Potenzen von α (Wellenzahl) entwickelt. Damit ergibt sich ein rekursiv zu lösendes System von Integralgleichungen, aus dem sich die Koeffizienten der Reihen $c(\alpha)$ und $\Phi(\alpha)$ berechnen lassen. Die Bedingung $\text{Im } c = 0$ für die neutrale Kurve liefert algebraische Gleichungen für $\alpha(R)$ (R = Reynoldszahl) von wachsender Approximationsgüte. Die Konvergenz der Reihen wird in einer anschließenden Arbeit von J. Moser (s. folgendes Referat) bewiesen. Die numerische Berechnung wird bis zur Berücksichtigung der ersten 4 Glieder der Entwicklung $c(\alpha)$ angegeben. Die Konvergenz der Kurven $\alpha(R)$ ist hier noch mäßig, doch liegt der kritische Wert R_{kr} offenbar unter dem von Curle angegebenen. *G. Hämmerlin.*

Moser, J.: Remarks on the preceding paper of Louis N. Howard. *J. Math. Physics* **37**, 299—304 (1959).

Verf. beweist die Konvergenz der Reihenansätze von L. N. Howard (s. vorstehendes Referat) für $c(\alpha)$ und $\Phi(\alpha)$ für kleine $|\alpha|$. *G. Hämmerlin.*

Feldman, Saul: On the instability theory of the melted surface of an ablating body when entering the atmosphere. *J. Fluid Mechanics* **6**, 131—135 (1959).

Taucht ein Körper von außen in die Atmosphäre ein, so kann durch Reibungserhitzung seine Oberfläche zum Schmelzen kommen. Dann ist eine äußere Schicht des Objekts als flüssig, sein Inneres als fest zu betrachten, und die flüssige Oberfläche wird von Gas überströmt. Verf. betrachtet nun die Stabilität der Oberfläche einer solchen flüssigen Schicht, die unter normalgerichteter Verzögerung gegen das Gas bewegt wird, gegenüber einer zweidimensionalen Anfangsstörung. Die Ebene einer solchen Störung wird dabei senkrecht zur Anströmungsrichtung angenommen. Als Parameter dieses Störungsproblems treten auf: Eine Reynoldssche Zahl $R = \rho U \delta / \mu$ (ρ = Dichte der Flüssigkeit, δ i. w. Dicke der Flüssigkeitsschicht, μ = Zähigkeit, $U = \sqrt{g \delta}$ mit der Beschleunigung g), eine Webersche Zahl $W = g \delta^2 \rho / \sigma$ (σ = Oberflächenspannung), die Wellenlänge λ der Störung und der Anfachungskoeffizient n . Unter den Annahmen konstanter Zähigkeit bzw. einer exponentiell nach innen zunehmenden Zähigkeit der Flüssigkeit werden Kurven n/R in Abhängigkeit von $\alpha = 2\pi/\lambda$ und W angegeben, aus denen vor allem die Wellenlängen maximaler Anfachung zu entnehmen sind. Die Auswertung der Störungsgleichungen zur Gewinnung der Eigenwerte geschieht näherungsweise durch Reihenansatz und Abbrechen. Verf. versucht, die an Meteoriten beobachteten, radial vom vorderen Staupunkt ausgehenden rillenförmigen Verformungen der Oberfläche (Photographien sind beigelegt) so zu erklären. Andererseits wäre es auch denkbar, daß sich diese Rillen als Spuren der von H. Görtler und Ref. behandelten Stau-

punktinstabilität deuten ließen (s. die diesbez. Arbeiten in „50 Jahre Grenzsichtforschung“, herausgegeben von H. Görtler und W. Tollmien, dies. Zbl. 67, 181 — Ref. s. p. 315—327, Görtler p. 304—314).

G. Hämmerlin.

Yih, Chia-shun: Ring vortices generated electromagnetically. J. Fluid Mechanics 5, 436—444 (1959).

In einer interessanten Arbeit untersucht Verf. die Stabilität einer elektrisch leitenden Flüssigkeit, die sich im Grundzustand ruhend, zwischen zwei konzentrischen, elektrisch isolierten, ruhenden Zylindern befindet. In der Zylinderachse sei ein Leiter mit der Stromstärke J und durch die Flüssigkeit fließe axial eine Stromdichte j . Das Problem wird rotationssymmetrisch behandelt und für die Störung der Geschwindigkeiten und des Magnetfeldes werden wie bei den Taylorwirbeln zwischen rotierenden Zylindern Ansätze der Form $f(r) e^{imz+at}$ gemacht. In Analogie zum Rayleighschen Kriterium gelingt es Verf., hinreichende Bedingungen für Stabilität der Strömung aufzustellen. Für den wichtigen Spezialfall kleiner Spaltbreite kann darüber hinaus die Stabilitätsgleichung auf die bekannte und gelöste Gleichung für die Stabilität einer von unten geheizten Flüssigkeit („Bénard Zellen“) zurückgeführt werden. Leider sind die sich aus dieser Theorie ergebenden Stromstärken zur Erzeugung instabiler Zustände so groß, daß eine experimentelle Nachprüfung der Theorie schwierig sein dürfte.

G. Jungclauss.

Ludford, G. S. S.: Rayleigh's problem in hydromagnetics: The impulse motion of a pole-piece. Arch. rat. Mech. Analysis 3, 14—27 (1959).

Die meisten in der Magneto hydrodynamik bekannten Lösungen beziehen sich auf die Spezialfälle sehr großer oder sehr kleiner sogenannter „magnetischer Zähigkeit η “, wobei η bis auf einen konstanten Faktor die reziproke elektrische Leitfähigkeit ist. In einem Falle erhält man Lösungen von ähnlichem Typus wie die in der gewöhnlichen Hydrodynamik, im anderen Fall, nämlich für kleine η , ganz neue Effekte, wie z. B. Alfvén-Wellen. Um den Übergang zwischen beiden Gebieten zu studieren, betrachtet Verf. die magneto hydrodynamische Erweiterung des einfachen, aber nicht trivialen Falles einer plötzlich in Bewegung gesetzten unendlichen Platte, wobei jetzt die Platte ersetzt zu denken ist durch den Polschuh eines permanenten Magneten, dessen anderer Polschuh sich in endlichem oder unendlichem Abstand h senkrecht zur Bewegungsrichtung befindet. Mit Hilfe einer Laplace-Transformation kann für den Fall $h = \infty$ und $\eta = \nu$ (ν = kinematische Zähigkeit) die explizite Lösung angegeben werden. Für andere Fälle werden Aussagen über den Charakter und das asymptotische Verhalten der Lösungen gemacht.

G. Jungclauss.

Finn, Robert and David Gilberg: Uniqueness and the force formulas for plane subsonic flows. Trans. Amer. math. Soc. 88, 375—379 (1958).

Eine ebene homentropische Unterschallströmung um ein gegebenes Profil ist durch die Geschwindigkeit im Unendlichen und die Zirkulation eindeutig bestimmt. Hat das Profil eine scharfe Ecke, dann folgt die Zirkulation eindeutig aus der Geschwindigkeit im Unendlichen nach der Joukowski-Bedingung. Die Kraft auf das Profil wird durch die Joukowski-Formel gegeben, so daß das d'Alembertsche Paradoxon auch hier gilt. Für die an sich wohl bekannten Ergebnisse (L. Bers, dies. Zbl. 58, 406; R. Finn und D. Gilberg, dies. Zbl. 77, 188) wird ein einfacherer Beweis gegeben, der sich auf eine andere Arbeit des Verf. und J. Serrins (dies. Zbl. 82, 294) stützt.

C. Heinz.

Bader, W.: Zur ebenen Strömung. Z. angew. Math. Mech. 39, 163—164 (1959).

Die Kontinuitätsbedingung der ebenen stationären kompressiblen Strömung mit nicht eliminierten Dichte und die Gleichung der Wirbelfreiheit werden auf das System von Potential- und Stromlinien der inkompressiblen Strömung transformiert. Dadurch kommt ein Maßfaktor zu den Abhängigen bei gleichbleibendem Gleichungs-

typus. Nach Einführen einer Stromfunktion wird ein mit der Janzen-Rayleigh-Methode verwandtes Lösungsverfahren mit bestimmten Ansätzen empfohlen. Eine Durchführung des Vorschlages wäre von Interesse. *K. Oswatitsch.*

Čuškin, P. I.: Die Umströmung von Ellipsen und Ellipsoiden durch eine Unterschall-Gasströmung. Vyčislit. Mat. 2, 20—44 (1957) [Russisch].

Bei der Umströmung elliptischer Zylinder werden die elliptischen Koordinaten ξ, η verwendet. Dann sind die unabhängigen Variablen $\chi = H\varrho u$ und $\lambda = H\varrho v$ (H : Laméscher Parameter; u, v : Geschwindigkeitskomponenten in ξ bzw. η -Richtung) periodisch in η . Es wird eine Anzahl N einzelner Hyperbeln $\eta = \text{const}$ gewählt und dieser Zahl entsprechend für χ und λ trigonometrische Summen angesetzt. Das System der partiellen Differentialgleichungen wird approximiert durch $2N$ miteinander gekoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen für $\varrho_n \eta_n$ und v_n . (Der Index bezieht sich auf die jeweilige Hyperbel $\eta_n = \text{const}$). Die Randbedingungen an der Ellipse lassen sich unmittelbar erfüllen. Damit jedoch auch die Randbedingungen im Unendlichen erfüllt werden können, ist ein sehr schnell arbeitendes elektronisches Rechenggerät erforderlich: es werden auf der umströmten Ellipse an den Schnittpunkten der N Hyperbeln Geschwindigkeitswerte v_n angenommen und so lange variiert, bis die Durchrechnung im Unendlichen einen konstanten Zustand liefert. Zur praktischen Durchführung werden an Stelle der Werte im Unendlichen die auf einer bestimmten großen Ellipse $\xi_x = \text{const}$ vorgeschrieben, auf welcher die erhaltene Lösung der Prandtl-Glauertschens Gleichung genügen muß. — Für die axialsymmetrische Umströmung von Ellipsoiden wird analog vorgegangen. Die zahlreich gewonnenen Rechenergebnisse werden ausführlich besprochen: u. a. ergab sich mit $N = 3$ als kritische Machzahl der Anströmung für den Kreiszylinder der Wert 0,399, für die Kugel der Wert 0,563. *W. Bader.*

LANEKAU, Eberhard: Eine Anwendung der Bergmannschen Operatorenmethode auf Profilströmungen im Unterschall. Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden 8 (1958/59), 200—207 (1959).

Die Anwendung der exakten Bergmannschen Operatorenmethode erfordert außerordentlichen Aufwand. Deshalb wurde von Bergman selbst eine Vereinfachung angegeben, die sich auf eine mathematische Näherung der Druck-Dichte-Beziehung stützt. Verf. nimmt nun eine bessere Näherung dieser Beziehung und kommt mit Hilfe einiger von M. Eichler stammenden Überlegungen zu einer Lösung seiner Näherung. Wie bei Bergman muss dabei eine kleine Verformung des vorgegebenen Profils in Kauf genommen werden. Mit Rücksicht auf den Näherungscharakter der Lösung und die für das Dickenverhältnis 0,50 mäßige Machzahl von 0,40 der Anströmung im durchgerechneten Beispiel ist der Aufwand noch immer erheblich. *K. Oswatitsch.*

Murray, James D.: Two dimensional compressible shear flow in a channel. Quart. appl. Math. 15, 231—236 (1957).

Gegenstand der Arbeit ist die ebene stationäre reibungsfreie aber nicht wirbel-freie Strömung durch einen Kanal, dessen Querschnitt sich im Verhältnis 2:1 erweitert. Im Unendlichen sollen die Stromlinien parallel sein. Die Ruheenthalpie ist dann zwar nach dem Energiesatz längs jeder Stromlinie konstant, aber von Stromlinie zu Stromlinie variierend. Die Entropie soll im ganzen Strömungsfeld konstant sein. Speziell soll weit stromaufwärts die Geschwindigkeit linear von der einen Seite des Kanals zur anderen zunehmen, d. h. die Wirbelstärke ω_0 soll über den Querschnitt konstant sein. Es werden zwei Fälle diskutiert: 1. reine Unterschallströmung: Weit stromabwärts ist die Wirbelstärke $\omega_1 > \omega_0$. 2. Reine Überschallströmung: $\omega_1 < \omega_0$. jedoch schließen diese beiden Bereiche nicht stetig aneinander an, da es noch einen Zwischenbereich gibt, in dem die Strömung vom gemischten Typ ist. *C. Heinz.*

Nocilla, Silvio: Flussli¹ transonici attorno a profili alari simmetrici, con onda d'urto staccata. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. **91**, 353—385 (1957).

Das vom Verf. in mehreren Arbeiten (dies. Zbl. **73**, 425, 427) entwickelte Verfahren zur Konstruktion auftriebsloser transsonischer Strömungen um gewisse symmetrische Profile mit Anströmmachzahl $M_\infty \leq 1$ wird auf den Fall kleiner $M_\infty > 1$ er-

weitert. Man arbeitet dabei in einer durch $\tau = \exp \left[k \int_1^q \frac{q}{q} dq \right]$, $\beta = b\vartheta$ aufgespannten Hodographenebene (aus Symmetriegründen genügt es, die obere Halbebene zu betrachten) und benützt Tomotika-Tamadas Näherung

$$(1) \quad \varphi_\tau = \sqrt{a}(\tau - 1/\tau) \psi_\beta, \quad \varphi_\beta = \sqrt{a} \tau \psi_\tau$$

für die gasdynamischen Grundbeziehungen zwischen Stromfunktion ψ und Geschwindigkeitspotential φ der als wirbelfrei angenommenen Strömung. Hierbei sind q und ϱ Geschwindigkeit und Dichte der Strömung, bezogen jeweils auf ihre kritischen Werte, ϑ der Strömungswinkel gegen die Anströmrichtung, und die Konstanten a , b , k sind (mit γ als Adiabatenexponent)

$$a = [2/(\gamma + 1)]^{2/(\gamma - 1)}, \quad k = [\frac{1}{2}(\gamma + 1)]^{(\gamma + 1)/(\gamma - 1)}, \quad b = k/\sqrt{a}.$$

Die in der Arbeit verwendeten Grundlösungen der aus (1) durch Elimination von φ zu gewinnenden Stromfunktionsgleichung sind durch

$$\psi = \bar{\psi}_{1/2} = \tau \sin \bar{\omega}, \quad \psi = \bar{\psi}_{-3/2} = -\tau \sin \bar{\omega} \cdot (1 - \tau \cos \bar{\omega})^{-3}$$

definiert, wo der Gleichung $\tau \sin \omega - \omega + \beta = 0$ genügt. Sie sind regulär im Inneren des durch die Verzweigungsstromlinie, die Stoßpolare und die vom Schallpunkt auf der Stoßpolare ausgehende Grenzcharakteristik begrenzten Gebietes der τ , β -Ebene und für $\tau < 1$ durch die Reihen

$$\psi_{-3/2}(\tau, \beta) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} n \sin(n\beta) J_n(n\tau), \quad \bar{\psi}_{1/2}(\tau, \beta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \sin(n\beta) J_n(n\tau)$$

darstellbar (J_n Besselfunktion erster Art und n -ter Ordnung). Offenbar ist mit konstantem β_0 auch die Funktion

$$\bar{\bar{\psi}}_{-3/2}(\tau, \beta; \beta_0) = \frac{1}{2} [\bar{\psi}_{-3/2}(\tau, \beta - \beta_0) + \bar{\psi}_{-3/2}(\tau, \beta + \beta_0)]$$

eine Lösung. Mittels einer Anzahl r verschiedener solcher $\beta_\sigma^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, r$), die alle kleiner sind als der zum Schallpunkt der Stoßpolaren gehörige β -Wert, wird schließlich die Lösung $\psi = \psi' + \psi''$ aufgebaut, wo

$$\psi'(\tau, \beta) = \sum_{i=1}^r c_{-3/2}^{(i)} \bar{\psi}_{-3/2}(\tau, \beta; \beta_0^{(i)}), \quad \psi'' = c_{1/2} \bar{\psi}_{1/2}$$

gesetzt ist. Die Koeffizienten $c_{-3/2}^{(i)}$ der Linearkombination für ψ' und die Werte $\beta_0^{(i)}$ werden so gewählt, daß die Stoßbedingungen auf der Stoßfront möglichst gut (in in der Arbeit näher präzisiertem Sinne) erfüllt werden. Es zeigt sich nämlich, daß die ψ'' -Werte in Stoßfrontnähe gegenüber den ψ' -Werten auf der Stoßfront vernachlässigt werden können. (Es wird auch klar herausgearbeitet, daß die Erfüllung der Stoßbedingungen in der Nähe des Schallpunktes besonders wichtig ist). Für $c_{1/2}$ wird

der Wert $c_{1/2} = \sum_{i=1}^r c_{-3/2}^{(i)} \cos \beta_i^{(0)}$ gewählt, wodurch erreicht wird, daß das erzeugte

Profil nicht den Nasenwinkel Null erhält, sondern daß die Nasentangente (wie bei den Profilen der früheren Arbeiten) den Winkel $\pi/(2b) = 18^\circ 26' 34''$ mit der Profilschne einschließt. — Für $M_\infty = 1,110$, die drei Werte $\beta_0^{(1)} = 0$, $\beta_0^{(2)} = 0,09$, $\beta_0^{(3)} = 0,144$ und die drei Koeffizienten $c_{-3/2}^{(1)} = -1,9$, $c_{-3/2}^{(2)} = -4,5$, $c_{-3/2}^{(3)} = -1$ wird die Strömung durchgerechnet und Stoßfront, Schalllinie sowie Profil bis zur Grenzcharakteristik samt zugehöriger Geschwindigkeitsverteilung auf der Kontur

bestimmt. Vergleich mit dem zur Stromfunktion (K eine Konstante)

$$\psi = \psi^{(0)} = K(\bar{\psi}_{-3/2}(\tau, \beta) + \bar{\psi}_{1/2}(\tau, \beta))$$

gehörigen Profil bei Anströmmachzahl $M_\infty = 1$ bestätigt das Phänomen des experimentell seit längerer Zeit bekannten "Machnumber freeze". *H. Behrbohm.*

Gundersen, Roy: The flow of a compressible fluid with weak entropy changes. *J. Fluid Mechanics* **3**, 553—581 (1958).

Es wird die eindimensionale nichtstationäre reibungsfreie Strömung eines idealen Gases betrachtet. Die Zustandsgrößen werden als Potenzreihen eines Parameters angesetzt, wobei das absolute Glied die Zustandsgröße einer bekannten isentropischen Gasströmung ist. Für die im Parameter linearen Glieder werden die Differentialgleichungen aufgestellt und eingehend für den Fall untersucht, daß die Ausgangsströmung die Parallelströmung oder eine mit einer Schar geradlinigen Charakteristiken ist. Als Anwendungen werden in dieser Näherung die durch einen Verdichtungsstoß hervorgerufenen Störungen und die Strömung durch ein Rohr mit Veränderungen des Querschnitts behandelt. *H. Wendt.*

Ferri, Antonio and Joseph H. Clarke: On the use of interfering flow fields for the reduction of drag at supersonic speeds. *J. aeronaut. Sci.* **24**, 1—18 (1957).

Es werden zwei Typen von in Hinsicht auf den Wellenwiderstand günstigen Welleninterferenz in der Überschallumströmung dreidimensionaler Konfigurationen unterschieden: (1) Stoßwellen werden durch Expansionswellen im Innern des Feldes geschwächt, oder (2) Stoßwellen werden durch geeignete interferierende Flächen abgefangen und vernichtet. — In den Problemkreis von (1) gehört die große Zahl von Untersuchungen, die sich um die „area-rule“ und zugehörige Optimierungsaufgaben in ihren verschiedenen Varianten gruppieren und die den Wellenwiderstand im Rahmen der linearisierten Theorie aus Impulsflußbetrachtungen durch eine weit vom Flugkörper gelegene Kontrollfläche bestimmen. Doch ist neben dieser Art von „Fernwirkungsbetrachtung“ auch noch eine dem ingenieurmäßigen Denken mehr angepaßte „Nahwirkungsbetrachtung“ möglich, die direkt die Natur des von jeder Baukomponente an benachbarten Konturflächen induzierten Druckfeldes untersucht und nun versucht, diese Flächen so zu orientieren und zu formen, daß jede Baukomponente einen Schubbeitrag vom induzierten Druckfeld der anderen Baukomponenten erfährt. Hierzu geben Verff. ein interessantes, elementares Beispiel, indem sie eine aus einer dreieckigen Pyramide (gefolgt von einem geraden dreieckigen, halbbunendlichen Prisma) bestehende Protuberanz (das stilisierte Urbild eines Flugzeugkabine) auf eine horizontale Ebene mit axialer Überschallparallelanströmung legen und nun durch Anbringen einer Mulde in dieser Ebene die Protuberanz versenken. Die Mulde ist dabei von gleicher geometrischer Struktur wie die Protuberanz (es wird also eine dreieckige Pyramide mit nachfolgendem geradem dreieckigem Prisma aus der Horizontalebene herausgespannt), und es wird nun der Einfluß der Größe und der Neigungswinkel der einzelnen hierbei auftretenden ebenen Flächenstücke der Mulde auf den Kabinenwellenwiderstand untersucht und dieser optimiert. — Das klassische Beispiel des Typs (2) der Interferenz ist A. Busemanns zweidimensionaler Doppeldecker; W. R. Sears und H. S. Tan (dies. Zbl. **42**, 437) haben es auf den Fall zweier gleicher, parallel übereinanderstehender endlicher Rechteckflügel erweitert und mittels linearisierter Theorie behandelt. Verff. verallgemeinern dieses Problem auf den Fall der Interferenz zwischen einem dreidimensionalen Flügel mit gepfeilten Vorderkanten und einer kleinen reflektierenden Fläche in Doppeldeckeranordnung. Es werden im Rahmen der linearen Theorie interessante Beziehungen hergeleitet für die Interferenz nicht-planarer Systeme von dünnen Flügeln, die die Ermittlung des Interferenzwiderstandes ermöglichen, ohne daß man dabei das Strömungsfeld explizit bestimmen muß. Speziell ausgeführt wird der Fall eines pentagonalen Flügels (ein Rechteck mit vorgesetztem Dreieck) von wohldefinierte

Dickenverteilung, der mit einer geeigneten Reflektorplatte in Doppeldeckeranordnung versehen ist, und das gleiche Problem für einen Dreieckflügel. In jedem Fall kann durch geeignete Anbringung von relativ kleinen Reflektorflächen (nicht mehr als 30% der Fläche des Hauptflügels) ein Wellenwiderstand der gesamten Konfiguration erreicht werden, der nur etwa 75% des Wellenwiderstandes des Hauptflügels allein beträgt. — Auch für den Fall eines Dreiecksflügels mit pentagonaler Protuberanz, die sich auf nur einer Flügelseite symmetrisch um die Flügelsymmetrieebene in deren näherer Umgebung erstreckt (Transportvolumenvergrößerung durch Flügelwurzelverdickung) wird gezeigt, daß durch eine geeignete Reflektorplatte der durch die Verdickung hervorgerufene Wellenwiderstand fast völlig kompensiert werden kann. — Zum Abschluß wird der dreidimensionale Doppeldecker vom praktischen Standpunkt aus diskutiert.

H. Behrbohm.

Miele, Angelo: Variational approach in the stratospheric cruise of a turbo-jet powered aircraft. *Z. Flugwiss.* 6, 253—257 (1958).

Die Berechnung der günstigsten Reisegeschwindigkeit und Flughöhe ist für den Entwurf von Verkehrsflugzeugen von großer Bedeutung. Bei Flugzeugen mit Strahltriebwerken ist diese Untersuchung dadurch erschwert, daß die aerodynamischen Beiwerte des Flugzeuges und der Brennstoffverbrauch des Triebwerkes von der Machschen Zahl abhängen. Verf. berücksichtigt diese Tatsache in seiner Rechnung, die er unter Benutzung der Methoden der Variationsrechnung durchführt. Aus seinen Ergebnissen zieht er eine Reihe praktischer Folgerungen. — Die Arbeit ist die gekürzte Wiedergabe eines an anderer Stelle veröffentlichten Berichtes. *G. Bock.*

● **Clarke, Joseph H.:** The forces on wing-fuselage combinations in supersonic flow. Boeing Scientific Research Laboratories. Flight Sciences Laboratory, Report No. 11. August 1959. 35 p.

Für eine allgemeine Flügel-Rumpf-Kombination in Überschallströmung wird das Interferenzproblem für den Widerstand, den Auftrieb, die lokale Verteilung des Auftriebs und für das Flügellängsmoment behandelt. Eine entscheidende Rolle spielen dabei gewisse Beziehungen zwischen solchen Kräften in direkter und in umgekehrter Strömungsrichtung, mit deren geschickter Anwendung es möglich wird, die analytischen Quadraturausdrücke für die zu berechnenden Kräfte der gegebenen Konfiguration auf numerisch leichter zu berechnende Ausdrücke für die Kräfte an geeignet gewählten Flügeln und zylindrischen Körpern in umgekehrter Strömung umzuschreiben. Die dadurch erreichbare Einsparung an Berechnungsarbeit kann in gewissen Fällen beträchtlich sein. — Einige früher bereits bekannte Teilresultate ergeben sich als Spezialfälle der weitgehend allgemein formulierten Betrachtungen der vorliegenden sehr gehaltvollen Arbeit.

H. Behrbohm.

Resler jr., E. L.: Characteristics and sound speed in nonisentropic gas flows with nonequilibrium thermodynamic states. *J. aeronaut. Sci.* 24, 785—790 (1957).

Für eindimensionale instationäre und zweidimensionale stationäre Überschallströmung wird eine Charakteristiken-theorie entwickelt, die für nichtisentrope Gasströmungen mit nicht im Gleichgewicht befindlichen thermodynamischen Zuständen gilt. Zunächst wird mittels Charakteristikenbetrachtungen gezeigt, daß die Munk-sche Definition für das Quadrat der Schallgeschwindigkeit als Ableitung des Drucks nach der Dichte in Richtung der Partikelbahn die für den Aufbau vorliegender Theorie einzig mögliche ist (sie ist allgemeiner als die übliche (Ableitung in Richtung einer Isentrope)). Danach wird das System von Gleichungen resp. Differentialgleichungen aufgestellt, das im eindimensionalen instationären Fall zwischen der Geschwindigkeit, der Schallgeschwindigkeit, dem Druck, der Dichte, der (dem Translationsfreiheitsgrad der Atome und/oder Moleküle entsprechenden) Temperatur, der inneren Energie, der Entropie des mit der Translationstemperatur im Gleichgewicht befindlichen Teil des Systems, dem gegen die Gleichgewichtseinstellung nachlaufenden Teil der inneren Energie (hier geht die für aerodynamisch interessierende

Fälle i. a. unbekannte chemische Kinetik ein), und der Gaskonstanten als Funktion der Konzentrationen der das Gas zusammensetzenden Komponenten besteht. Als dann werden die Sonderfälle instationärer eindimensionaler Strömung des idealen perfekten Gases konstanter Zusammensetzung mit nachlaufender Wärmekapazität (speziell des Rotationsfreiheitsgrades oder auch des Schwingungsfreiheitsgrades zweiatomiger Moleküle) besprochen, auch das dissoziierende zweiatomige Gas mit nachlaufender Wärmekapazität des Schwingungsfreiheitsgrades wird behandelt. Schließlich wird in völliger Analogie zum eindimensionalen instationären Fall der zweidimensionale stationäre Fall allgemein betrachtet, und es werden die erhaltenen Resultate auf den Sonderfall der von gleichförmigem Ausgangszustand kommenden nichtisentropen Strömung (speziell eines dissoziierenden zweiatomigen Gases mit nachlaufender Wärmekapazität des Schwingungsfreiheitsgrades) angewandt.

H. Behrbohm.

Whitham, G. B.: A note on the stand-off distance of the shock in high speed flow past a circular cylinder. Commun. pure appl. Math. 10, 531—535 (1957).

Es wird der Abstand der Stoßwelle von der Oberfläche eines Zylinders berechnet, der sich in einer Überschallströmung großer Machzahl befindet. Dazu wird angenommen, daß die Stoßwelle in der Umgebung des vorderen Staupunktes ebenfalls Zylinderform hat. Im Gebiet zwischen der Stoßwelle und dem Zylinder wird die Strömung als inkompressibel, aber nicht wirbelfrei behandelt, und die Eulerschen Gleichungen werden für diesen Fall aufgestellt. Bei der Integration dieser Gleichungen wird gleichzeitig der analoge Fall der Kugel mitbehandelt, wobei das früher von Lighthill (dies. Zbl. 79, 443) angegebene Resultat bestätigt wird. Die Berechnung der Stromfunktion für den Zylinder führt auf eine Besselsche Differentialgleichung 1. Ordnung. Für das Verhältnis $\eta = R_b/R_s$ (R_b = Zylinderradius, R_s = Stoßwellenradius) wird neben der exakten Lösung (als Nullstelle einer Funktion von Besselfunktionen) die Näherung

$$\eta = 1 - \frac{1}{2} \lambda^{-1} \log 4 \lambda/3 + O(\lambda^{-2}) \quad \text{für } \lambda \rightarrow \infty$$

angegeben, wobei λ gemäß $\lambda = 2/(\gamma - 1)$ durch den Exponenten γ der Polytropen des Gases gegeben ist.

W. Legler.

Sakurai, Takeo: On the normal shock wave attached to the curved surface. J. Aero-Space Sci. 26, 460—461 (1959).

Verf. behandelt das Problem des senkrechten Verdichtungsstoßes an einer gekrümmten Wand und bezieht sich hierbei auf eine Arbeit des Ref. [Z. angew. Math. Phys. 9b, 764—776 (1958)]. Verf. behauptet, daß hinter dem Stoß die Differenz der Krümmungen von Stromlinie und Orthogonaltrajektorie zum Stoß bei Annäherung an die Wand verschwinden muß, damit die Strömung der Wand folgen kann. Einfache Strömungsbeispiele zeigen, daß dies durchaus nicht notwendig ist. Damit entfällt: 1. der Einwand des Verf. gegen die vom Ref. benutzte strenge Randbedingung, 2. der Schluß, daß es im Machzahlbereich 1 bis 1,662 keinen senkrechten Stoß an der Wand gibt. [s. auch die kurzen Mitteilungen des Ref. in Z. angew. Math. Phys. 10, 429 (1959) und in Z. angew. Math. Mech. 40, Sonderheft, T 155 (1960)].

J. Zieryep.

Kogan, Abraham: On 2-dimensional shock-waves for near-detachment flow. Bull. Res. Council Israel, Sect. F 7, 123—128 (1958).

Zur Untersuchung der ebenen Strömung eines mit Überschall angeströmten Profils mit scharfer Vorderkante wird von einer von Crocco angegebenen Beziehung zwischen Rotation und Entropieänderung ausgegangen. Nach Transformation auf die Koordinaten ξ und η (ξ : Tangente an die Vorderkante, η : Stromfunktion) läßt sich die Strömungsgleichung vereinfachen, so daß eine Integration ermöglicht wird. Hierbei wird nur die unmittelbare Umgebung der Vorderkante betrachtet; fern muß die Machzahl der Anströmung sehr groß sein und die Stoßgleichung annähern den Ablösebedingungen genügen. Unter der weiteren Voraussetzung, daß die geom.

trische Form der Stoßfront bekannt ist, kann die Wandtemperatur und die Druckverteilung an der Profilvorderkante und ihrer unmittelbaren Umgebung leicht angegeben werden.

W. Bader.

Drummond, William E.: Explosive-induced shock waves. II: Oblique shock waves. J. appl. Phys. 29, 167—170 (1958).

(Teil I s. dies. Zbl. 78, 404.) Eine ebene Detonationsfront durchläuft unter schiefer Winkel eine planparallele Sprengstoffplatte, die einerseits von Vakuum, andererseits von Metall (Aluminium) begrenzt wird. Im Metall wird eine gekrümmte Stoßfront mitgezogen. Die resultierende ebene stationäre Überschallströmung, dissipationsfrei bis auf Stoßwellen, wird im wesentlichen mit denselben Ansätzen, Näherungsannahmen und Integrationsverfahren behandelt, wie früher (Drummond, s. dies. Zbl. 78, 404) der analoge eindimensional-instationäre Vorgang. Ein Vergleich der berechneten Stoßintensitätsabnahme mit experimentellen Werten von Katz u. a. [Stanford Res. Inst., Techn. Rep. No. 11 (1957)] führt jedoch jetzt auf $\gamma = 2,8$ für die Schwaden. (Vgl. folgendes Referat).

F. Wecken.

Erkman, John O.: Explosively induced nonuniform oblique shocks. Phys. Fluids 1, 535—540 (1958).

Verf. behandelt das gleiche Problem wie Drummond (s. vorstehendes Referat) mit fast den gleichen Voraussetzungen und Methoden. Er geht näher auf das angewandte Charakteristikenverfahren ein und untersucht den Einfluß der Maschengröße. Rechnungen werden für je zwei Sprengstoffe und Metalle und für verschiedene Neigungswinkel durchgeführt. Der Vergleich mit Experimenten bestätigt den von Drummond früher (s. dies. Zbl. 78, 404) gefundenen Wert $\gamma = 11/9$; der neuere Wert $\gamma = 2,8$ wird als auf falscher Auswertung beruhend angefochten.

F. Wecken.

Todeschini, Bartolomeo: Riflessione di un' onda d'urto in un canale. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 91, 979—990 (1957).

L. Ting und H. F. Ludloff's (dies. Zbl. 47, 187) Behandlung der Diffraktion einer längs einer ebenen Wand laufenden Stoßfront durch eine senkrecht zur Stoßnormalen einsetzende schwache Erhebung in der Wand (Dickenparameter ε des diese Störung realisierenden, der ebenen Wand aufgesetzten Profils) wird vom Verf. auf den Fall erweitert, daß der gestörten Wand eine (dem ebenen Teil der gestörten Wand) parallele ebene Wand gegenübergestellt und nun die Reflexion des gebeugten Stoßes an dieser ebenen Gegenwand untersucht wird. Das Problem kann (ganz in der Sprache der amerikanischen Arbeit) bei Beschränkung auf Störterme erster Ordnung in ε durch eine Voltterrasche Integralgleichung erster Art für die gesuchte Quelldichte einer Quellbelegung zur Ermittlung des der d'Alembertschen Gleichung $p_{xx} + p_{yy} = p_u$ genügenden Druckes $p(x, y, z, t)$ (Ort x, y, z , Zeit t) formuliert werden. Jedoch wird diese Voltterragleichung nur aufgestellt und nicht weiter behandelt. Vielmehr wird das (nach Ting-Ludloffs alles wesentliche erledigenden Arbeit) trivial hinzukommende Reflexionsproblem in üblicher Weise mittels der Spiegelungsmethode behandelt.

H. Behrbohm.

Duff, Russell E.: Shock-tube performance at low initial pressure. Phys. Fluids 2, 207—216 (1959).

Es handelt sich um Versuche im Stoßwellenrohr bei kleinem Druck in der Größenordnung von 1 mm Hg. Dabei stellt sich heraus, daß der Abstand von Stoß- und Mediumgrenze nahezu unabhängig von der Lauflänge der Welle ist. Dieses überraschende, ganz im Gegensatz zur Theorie für reibungsfreie Strömung stehende Resultat deutet Verf. als einen Effekt niedriger Reynoldszahl, der eine reibungsfreie Theorie selbst nicht als erste Näherung zuläßt.

K. Oswatitsch.

Oswatitsch, Klaus und Ingolf Teipel: Die Pulsationen von Stoßdiffusoren. Z. angew. Math. Phys. 9b, Festschrift Jakob Ackeret, 462—478 (1958).

Die vorliegende Arbeit befaßt sich unter Zuhilfenahme des Charakteristikenverfahrens mit Untersuchungen über das in Überschalllufteinläufen von Staustrahltriebwerken festzustellende Phänomen des „Brummens“, eines periodischen niederfrequenten Schwingungsvorganges, dessen Geschwindigkeitsvektoren denen der stationären Durchströmung eines solchen Triebwerkes überlagert sind und der in Hochgeschwindigkeitsschlierenfilmen am Wandern des Diffusorgeradstoßes außerhalb des ummantelten Einlaufes sichtbar wird. Diese Erscheinung kann überdies nur bei stärkerer als optimaler, d. h. „kritischer“ Drosselung auftreten, wenn im stationären Zustand sich also der Diffusorgeradstoß außerhalb des ummantelten Einlaufes befindet. Bei den Untersuchungen wird nur die Einschränkung gemacht, daß die Strömung im Inneren des Triebwerkes reibungsfrei ist. Dadurch muß auf die analytische Behandlung des Problems verzichtet werden; jedoch vermitteln die Ergebnisse ausgezeichnete Einblicke in den physikalischen Ablauf des Phänomens, und die numerischen Ergebnisse sind überraschend gut. Es wird der periodische Fall mit dem des aperiodischen verglichen. Aperiodische Schwingungsvorgänge ergeben sich im „Pitot“-Diffusor durch Durchsatzdrosselung. Der technischen Ausführung angepaßt, werden Modellvereinfachungen vorgenommen, die bei Einführung von Kopplungsbedingungen zwischen dem äußeren Diffusor und inneren Strömungsvorgängen, als „Eintrittskennlinie“ bezeichnet, nur die Betrachtung des ummantelten Triebwerksabschnittes erforderlich machen. Mit Hilfe der Eintrittskennlinie angestellte Betrachtungen erklären, daß durch Störungen im Inneren des Triebwerkes, beispielsweise verursacht durch eine Drosselung, je nach Art der einem System zugehörigen Kennlinie periodische Schwingungen erzeugt werden oder aber aperiodisch abklingende. Eine erläuternde Darstellung des Charakteristikenverfahrens und der beim durchgerechneten Beispiel als Störung angesetzten Drosselung leitet über in die Besprechung der für den periodischen und aperiodischen Fall durchgeführten Berechnungen. Das Pulsationskriterium, nach dem sich mit zunehmendem Durchsatz verringernde Verluste am äußeren Diffusor periodische und mit zunehmendem Durchsatz anwachsende Verluste aperiodische Schwingungen erzeugen, findet sich überzeugend bestätigt. Unter diesen Umständen werden mit versuchsmäßig ermittelten „Eintrittskennlinien“ auszuführende Berechnungen wünschenswert und interessant.

W. Buschulte.

Davies, D. R.: Heat transfer by laminar flow from a rotating disk at large Prandtl numbers. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 12, 14—21 (1959).

Verf. betrachtet den Wärmeübergang von einer in ruhender Strömung rotierenden Scheibe für beliebige rotationssymmetrische Temperaturverteilung auf der Scheibe. Die mit der Grenzschichtannahme vereinfachte Temperaturgleichung wird mit der v. Mises-Transformation auf Stromfunktionskoordinaten transformiert, und für die in die Temperaturgleichung eingehende Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht wird ein Potenzansatz gemacht, der die richtige und an sich bekannte Verteilung in der Nähe der Scheibe gut annähert. Diese Annahme ist bei großer Prandtl-Zahl σ gerechtfertigt, weil dann die Temperaturgrenzschicht dünn ist gegen die Strömungsgrenzschicht, so daß nur die Geschwindigkeitsverteilung in Wandnähe von Bedeutung ist. Für den Fall konstanter Temperaturverteilung werden die Ergebnisse mit einer exakten Rechnung verglichen, und es zeigt sich, daß der Fehler für $\sigma > 6$ kleiner als 5 v. H. bleibt. Der Referent hat den Eindruck, daß der Fehler noch kleiner gemacht werden könnte, wenn der hier konstant mit 0,67 genommene Exponent im Potenzgesetz der Geschwindigkeitsverteilung als eine geeignete Funktion von σ so gewählt wird, daß die Geschwindigkeit über die jeweilige Dicke der Temperaturgrenzschicht am besten angenähert wird.

G. Jungclauss.

Crane, L. J. and D. C. Pack: The laminar and turbulent mixing of jets of compressible fluid. I: Flow far from the orifice. *J. Fluid Mechanics* 2, 449—455 (1957).

Die Gleichungen für den Mischprozeß eines in ruhendes Gas eintretenden Gasstrahles werden durch geeignete Koeffizienten für ebene und rotationssymmetrische, laminare und turbulente Strömungen angegeben. Die Stromfunktion des Strahles wird als Potenzreihe nach Quadraten der Machschen Zahl M angesetzt. Das Glied in M^2 wird ausgehend von der Lösung von Bickley (1937) für den inkompressiblen Fall für die Strömung in großer Entfernung vom Mischbeginn bestimmt. Voraussetzungen: Prandtlsche Zahl 1. Potenzansatz für die Zähigkeit, gleiche Stautemperatur für Strahl und Umgebung. Die Rechnung wird für den ebenen Fall ausführlich vorgetragen. Für den axialsymmetrischen Fall wird das Ergebnis angegeben.

H. Wendt.

Crane, L. J.: The laminar and turbulent mixing of jets of compressible fluid. II: The mixing of two semi-infinite streams. J. Fluid Mechanics 3, 81—92 (1957).

Verf. betrachtet die Vermischung ebener Gasstrahlen verschiedener Geschwindigkeit und verschiedener Stautemperaturen. Die Stromfunktion wird als Doppelreihe nach dem Quadrate der Machschen Zahl und der Temperaturdifferenz der Strahlen angesetzt. Es werden die Differentialgleichungen für die linearen Glieder aufgestellt, die eingehend behandelt werden a) für wenig abweichende Strahlgeschwindigkeiten und b) wenn ein Strahl ruht. Der Vergleich der Rechnung mit Versuchen von Laurence (1955) zeigt gute Übereinstimmung.

H. Wendt.

Kramer, R. F. and H. M. Lieberstein: Numerical solution of the boundary-layer equations without similarity assumptions. J. Aero-Space Sci. 26, 508—514 (1959).

Die Arbeit behandelt das Problem der stationären dreidimensionalen laminaren Grenzschicht in einer kompressiblen Strömung längs der Oberfläche eines Drehkörpers. Als Grundlage für diese Untersuchungen wird wie üblich das simultane System der drei partiellen Differentialgleichungen für Kontinuität, Impuls und Energie benützt in der Schreibweise, die sich aus den Prandtlschen Grenzschicht-Vereinfachungen bei großen Reynoldsschen Zahlen ergibt. Zu diesen drei Gleichungen tritt noch die Zustandsgleichung für Gase, die die Dichte ϱ mit dem Druck p und der absoluten Temperatur T verknüpft, ferner ein Potenzgesetz für die Abhängigkeit der Zähigkeit μ von der Temperatur T . Von den fünf Unbekannten: $u(x, y)$ = Geschwindigkeitskomponente parallel zur Erzeugenden des Drehkörpers (x -Richtung), $v(x, y)$ = Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Oberfläche des Drehkörpers (y -Richtung), $T(x, y)$ = absolute Temperatur in der Grenzschicht, $\varrho(x, y)$ = Dichte und $\mu(x, y)$ = Zähigkeit können v , ϱ und μ leicht eliminiert werden. Es verbleiben dann Impuls- und Energiegleichung als simultane partielle Differentialgleichungen für die Unbekannten u und T . Zur Lösung dieses Gleichungssystems wird folgender Weg eingeschlagen: In der Energiegleichung wird an Stelle der absoluten Temperatur T die „Gesamt-Enthalpie“ $H = \frac{1}{2}u^2 + h$ mit $h = c_p T$ eingeführt. Dann werden zwei an sich bekannte Koordinaten-Transformationen kombiniert angewandt: 1. Crocco-Transformation

$$x = \xi; \quad \xi = x; \quad y = y(\xi, u); \quad u = u(x, y), \quad \tau = \mu \partial u / \partial y.$$

2. Mangler-Transformation zur Überführung des drehsymmetrischen Problems in ein ebenes Problem:

$$u' = \frac{u}{u_1}; \quad s = \int_0^x r^2 \varrho_1 \mu_1 u_1 dx$$

(Index 1: Rand der Grenzschicht, r = Querschnitts-Radius, s = transformierte x -Koordinate). Dann ist

$$T = \tau \sqrt{2s/r} \varrho_1 \mu_1 u_1^2; \quad H' = (H - H_0)/(H_1 - H_0)$$

(Index 0: Werte bei $y = 0$ (Wand)). Nach diesen Transformationen erhält man ein Gleichungssystem von parabolischem Typ für die Unbekannten $H'(s, u)$ und $T(s, u)$.

Der Drehkörper geht dabei in eine Gerade über. Linien $s = \text{const}$ sind Charakteristiken. Der vordere Staupunkt wird im s, u -Koordinatensystem durch eine „Staupunktlinie“ dargestellt. Für diese Staupunktlinie können Anfangswerte von H' und T durch Lösen einer gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung (z. B. nach Runge-Kutta) gewonnen werden. An diese Anfangswerte H' und T bei $s = 0$ wird dann die Lösung des Gleichungssystems mit Hilfe eines Fortsetzungsverfahrens angeschlossen. Zu diesem Zweck wird das Gleichungssystem in an sich bekannter Weise in Differenzgleichungen umgeschrieben. Als Beispiel wird die axial angeströmte Halbkugel für die beiden Fälle eines vollkommenen (kalten) und eines dissoziierten (heißen) Gases durchgerechnet. Ein Vergleich der Ergebnisse dieser Theorie mit Ergebnissen anderer Lösungen dieses Problems [z. B. mit den „ähnlichen“ Lösungen von Li und Nagamutsu (s. dies. Zbl. 66, 427)], der eine Kritik der Leistungsfähigkeit der neuen Theorie ermöglicht hätte, ist leider nicht durchgeführt. Verff. weisen darauf hin, daß Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise noch ausstehen.

A. Walz.

Yang, Kwang-Tzu: Unsteady laminar boundary layers over an arbitrary cylinder with heat transfer in an incompressible flow. J. appl. Mech. 26, 171—178 (1959).

Vom Ref. wurde früher eine Methode (dies. Zbl. 53, 316) zur Lösung der inkompressiblen, instationären Grenzschichtgleichungen für das Geschwindigkeitsfeld angegeben. Ähnlich wie beim bekannten „Pohlhausenverfahren“ für stationäre Strömung wird dabei eine Integralform der Grenzschichtgleichung verwendet, aber diesmal mit Hilfe eines Charakteristikenverfahrens gelöst. Verf. erweitert dieses Verfahren auf Temperaturgrenzschichten, wobei weiterhin inkompressible Strömung mit konstanten Stoffwerten vorausgesetzt wird. Wie stets bei Verwendung vom Integralformen der Grenzschichtgleichung, muß die Form der Geschwindigkeits- und Temperaturprofile innerhalb der Grenzschicht angenommen werden. Dazu verwendet Verf. ähnliche Lösungen der instationären Grenzschichtgleichungen für die ebene Staupunktsströmung mit einer Geschwindigkeit u_∞ am Außenrande der Grenzschicht von der Form $u_\infty = x^*/(1 - \alpha t^*)$ (x^* dimensionsloser Abstand vom Staupunkt, α Konstante und t^* dimensionslose Zeit). Die Existenz dieser ähnlichen Lösungen wurde übrigens vom Ref. im Rahmen einer allgemeinen Untersuchung (dies. Zbl. 67, 430) bereits früher angegeben, was vom Verf. nicht erwähnt wird. Nicht überzeugend wirkt die Behauptung des Verf., daß man beim instationären Pohlhausenverfahren mit Geschwindigkeits- und Temperaturprofilen aus speziellen ähnlichen instationären Lösungen im allgemeinen bessere Ergebnisse erhält als mit Profilen aus entsprechenden stationären Lösungen. Ein Unterschied allgemeiner Art zwischen den Profilen in stationären und instationären Grenzschichten ist bisher nicht bekannt geworden. Als Beispiel wird die Grenzschichtströmung um einen Kreiszylinder mit konstanter Beschleunigung behandelt. Aber auch hier bieten die vom Verf. verwendeten Profile keine besonderen Vorteile: Im Staupunkt des Zylinders ist die Geschwindigkeit am Außenrande der Grenzschicht proportional der Zeit und daher in ihrer Zeitabhängigkeit von ganz anderer Form als bei den ähnlichen Lösungen, deren Grenzschichtprofile Verf. im oben erwähnten Beispiel verwendet. In diesem zeigte sich in der Wandschubspannung recht gute Übereinstimmung mit exakteren Lösungen nach Reihenentwicklungen, aber das war auch der Fall bei einem ähnlichen Beispiel in der am Beginn des Referates zitierten Arbeit, wobei Grenzschichtprofile von stationären ähnlichen Lösungen verwendet wurden.

H. Schuh.

Monin, A. S.: The structure of atmospheric turbulence. Teor. Verojatn. Primen. 3, 285—316, engl. Zusammenfassg. 317 (1958) [Russisch].

Theoretical and experimental data are given for the statistical characteristics of random fields of wind velocity and turbulent fluctuations of temperature in the lowest layer of the atmosphere. Fluctuations are considered at one and two space time points. Probability distributions

moments, autocorrelation and structure functions, spectra and crossspectra are studied. Some dimensionless characteristics (universal function) are determined by means of Kolmogoroff's similarity theory for small eddies and similarity theory for fully developed turbulence proposed by Obuchov and Monin. In addition a short summary is given of works on pressure fluctuations, turbulent accelerations, turbulent diffusion and also on the problem "fluctuations and waves".
Englische Zusammenfassung.

Jain, P. C.: Gravitational instability of an infinite homogeneous and stationary turbulent medium. Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A 24, 230—233 (1958).

Verf. leitet zunächst das Jeanssche Kriterium für das instabile Verhalten eines unendlich ausgedehnten homogenen Mediums im Schwerfeld her. Anschließend wird ein turbulentes Medium betrachtet und gezeigt, daß unter einigen Voraussetzungen selbst noch in diesem Fall ein dem Jeansschen analoges Kriterium hergeleitet werden kann.

J. Zierep.

Gross, R. A. and C. L. Eisen: On the speed of sound in air. Phys. Fluids 2, 276—279 (1959).

Die Berechnung der Schallgeschwindigkeit in Gasmischungen von hoher Temperatur bereitet einige Schwierigkeiten, weil auch der Einfluß von chemischen Reaktionen und eventuell Ionisation berücksichtigt werden müssen. Diese Vorgänge werden überdies noch von den Druck- und Temperaturschwankungen in der Schallwelle selbst beeinflußt. Je nach dem ob die Schwingungszeit der Schallwelle klein oder groß ist verglichen mit der Reaktionszeit der chemischen Vorgänge, unterscheidet man die Schallgeschwindigkeit im Gleichgewicht oder im eingefrorenen Zustand. Verff. benutzen die Ergebnisse einer früheren Arbeit, um die Temperatur und die chemischen Veränderungen von Luft hinter einer Schockfront in Abhängigkeit von der Machschen Zahl (im Bereich $M = 2$ bis $M = 20$) zu berechnen. Unter Benutzung der Erhaltungssätze für Masse, Energie und Entropie erhalten sie daraus die beiden Schallgeschwindigkeiten. Die mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine gefundenen Werte sind als Kurven dargestellt. Die angegebenen Werte für die Schallgeschwindigkeiten im Gleichgewicht und im eingefrorenen Zustand unterscheiden sich um weniger als 15%.

M. Heckl.

Lapin, A. D.: Scattering of sound waves in irregular waveguides. Soviet Phys. Doklady 3, 65—68 (1958), Übersetz. von Doklady Akad. Nauk SSSR 118, 55—58 (1958).

Es wird die Streuung von Schallwellen in Wellenleitern (im vorliegenden Falle rechteckige Rohre) berechnet, wobei angenommen wird, daß das Medium im Rohr kleinen Schwankungen hinsichtlich des Brechungsindex unterworfen ist, bzw. daß die Wände des Wellenleiters rauh sind. Im Gegensatz zu den meisten Untersuchungen auf diesem Gebiet, die auf der üblichen Störungsrechnung beruhen, braucht im vorliegenden Fall nicht vorausgesetzt zu werden, daß das Streufeld klein ist verglichen mit dem ursprünglichen Feld. Praktisch bedeutet das, daß die Änderungen des Brechungsindex zwar klein sein müssen, daß aber die Gebiete verschiedenen Brechungsindex beliebig groß sein können. Es wird das Streufeld berechnet unter der Voraussetzung, daß die Schwankungen des Brechungsindex bzw. die Rauigkeit der Wände einer Zufallsverteilung unterliegen. Die erhaltenen Unterschiede gegenüber der üblichen Störungstheorie betragen bei den angegebenen Beispielen bis zu 50%.

M. Heckl.

Keulegan, Garbis H.: Energy dissipation in standing waves in rectangular basins. J. Fluid Mechanics 6, 33—50 (1959).

Verf. beschreibt Versuche für die Bestimmung der Dissipation von Energie in stehenden Wellen. Die Ergebnisse vergleicht er mit theoretischen Berechnungen. Diese letzteren sind gegründet auf eine nicht-lineare Theorie (zweiter Ordnung) für stehende Wellen ohne Viskosität und eine linearisierte Theorie von Boussinesque für die Grenzschicht-Dissipation an festen Wänden. Er berücksichtigt auch die Dissipation im Inneren der Flüssigkeit. Es ergibt sich, daß seine versuchsmäßigen Ergeb-

nisse mit den Berechnungen gut übereinstimmen, wenn die Flüssigkeitsbehälter nicht zu klein sind. Für kleine Gefäße können Energieverluste, die von Oberflächenspannungen herrühren bedeutend werden. *J. A. Sparenberg.*

Scheidegger, A. E.: On the theory of flow of underground fluids in compressible strata. *Canadian J. Phys.* **37**, 276—284 (1959).

Verf. versucht eine Erweiterung der Theorie der Strömung durch poröse, kompressible Medien für endliche Verschiebungen. Der Zusammenhang zwischen den Verschiebungen des Festkörpers mit seinen Spannungen, dem Wasserdruck und dem Porenvolumen wird nicht näher untersucht. Hingegen wird eine allgemeine Kontinuitätsgleichung für die Flüssigkeitsbewegung bei Berücksichtigung eines anisotropen Filtergesetzes formuliert. Zuletzt versucht Verf. auf Grund einfacher geometrischer Überlegungen, ausgehend von einem isotropen Festkörper, die durch eine vertikale Belastung hervorgerufene Anisotropie in der Durchlässigkeit zu berechnen. Dabei wird vorausgesetzt, daß der Festkörper nur Vertikalverschiebungen ausführt. Außerdem wird offenbar angenommen, daß die einzige Ursache für die Änderung der Durchlässigkeit des Festkörpers in der Änderung des Querschnittes bzw. der Länge eines Elementarwürfels besteht. *G. Heinrich.*

Wärmelehre:

Falk, Gottfried: Third law of thermodynamics. *Phys. Review*, II. Ser. **115**, 249—253 (1959).

A new formulation of the third law is proposed stating a universal connection between the lower limits of the energy and the entropy of any physical system. As consequences of the new theorem are derived the Nernst heat theorem, a theorem concerning the lowest energy state of mixtures, and the nondegeneracy of the energetic ground state of physical systems.

Zusammenfassg. des Autors.

Landsberg, P. T.: Negative temperatures. *Phys. Review*, II. Ser. **115**, 518—520 (1959).

It is shown by an example how the concept of negative temperature finds a natural place in the approach to thermodynamics which was originated by Carathéodory.

Zusammenfassg. des Autors.

Hart, Edward W.: Thermodynamics of inhomogeneous systems. *Phys. Review*, II. Ser. **113**, 412—416 (1959).

Verf. beschreibt eine thermodynamische Theorie inhomogener Systeme. Es wird angenommen, daß gewisse Parameter stetig von Ort zu Ort variieren, und daß die lokale Energiedichte explizit von den räumlichen Ableitungen der Stoffdichte abhängig ist. Mit vorliegender Methode lassen sich Aussagen über die Eigenschaften von Übergangsschichten machen. *G. Kelbg.*

Schröter, Joachim: Bemerkung zum Ludwigschen Beweis des Ergodensatzes. *Z. Naturforsch.* **14a**, 750—751 (1959).

The quantum statistical ergodic theorem, as formulated by Ludwig, is slightly amended, by removing some redundant conditions. In the formulation which is given there are two conditions. One of these can be stated in terms of the number of pairs of energy eigenvalues, e, f say, such that $e + f = e' + f'$. Let this number be ν_{ef} . As e and f range over all values of the (discrete) energy spectrum, let ν_0 be the greatest integer ν_{ef} which is found. Then it is required that ν_0 shall not be much greater than unity in a condition which seems very reasonable. *P. T. Landsberg.*

Kampen, N. G. van: Derivation of the phenomenological equations from the master equation. II: Even and odd variables. *Physica* **23**, 816—824 (1957).

The analysis of part I (this Zbl. **80**, 198) has been extended to the case when, though the Hamiltonian is still an even variable, odd variables feature among the observed quantities. The usual reciprocal relations are again deduced from the master equation. *P. T. Landsberg.*

Nakajima, Sadao: On quantum theory of transport phenomena. Progress theor. Phys. **21**, 659 (1959).

A brief supplementary remark is made concerning the author's earlier paper having the same title (this Zbl. **84**, 215). It concerns the connection which exists between the author's work and earlier, but related, Japanese work.

P. T. Landsberg.

Fradkin, E. S.: The Green's function method in quantum statistics. Nuclear Phys. **12**, 465—484 (1959).

A general method using Green's functions is developed. In a first approximation it yields results in statistical mechanics also obtainable by other methods. Those associated with the names of Thomas Fermi and Gell-Mann-Brueckner are briefly discussed.

P. T. Landsberg.

Čén (Chen), Čun-sjań (Chun-sian): A new method in statistical perturbation theory. Soviet Phys., JETP **35** (8), 1062—1064 (1959), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. **35**, 1518—1521 (1958).

In this paper the statistical average over an ensemble is considered as a quantum mechanical average, such that the individual states are filled with probabilities corresponding to those they have in the ensemble. The inverse temperature is a parameter and a new variant of statistical perturbation theory is possible.

P. T. Landsberg.

Colin, Léopoldo et Jean Peretti: Évaluation de la fonction de distribution binaire d'un gaz quantique imparfait. Méthode générale. C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 1625—1628 (1959).

Eine Entwicklung der binären Dichtefunktion für eine große Gesamtheit nach Potenzen in der Fugazität wird angegeben. Die auftretenden Koeffizienten sind modifizierte Ursell-Funktionen, die von der Temperatur und dem zwischenmolekularen Potential abhängen.

G. Kelbg.

Blatt, J. M. and Takeo Matsubara: The electric and magnetic response of a thermodynamic system. Progress theor. Phys. **21**, 696—712 (1959).

An explicit expression is obtained for the complex dielectric constant as a function of wave number and frequency of the impressed electric field. The analysis utilises the Kubo formalism for the discussion of the linear response of a system.

P. T. Landsberg.

Bak, Thor A., M. Goche and F. Henin: On the motion of a particle coupled to lattice vibrations. Molecular Phys. **2**, 181—189 (1959).

Die Bewegung eines Teilchens in einem Gitter mit schwach anharmonischer Wechselwirkung der Gitterbausteine wird untersucht. Ausgangspunkt ist eine Darstellung der Hamilton-Funktion des Gesamtsystems in Winkel- und Wirkungsvariablen. Die Anharmonizität des Gitters und seine Wechselwirkung mit dem Teilchen wird als Störung behandelt. Die Bewegungsgleichungen werden für ein anfänglich räumlich homogenes System untersucht. Die Diskussion beschränkt sich auf die Fälle kleiner und großer Anfangsenergie des Teilchens, verglichen mit der Höhe der Potentialschwelle zwischen zwei Gleichgewichtslagen im Gitter. Im ersten Fall führt das Teilchen eine Brownsche Bewegung aus mit einer exponentiellen Korrelationsfunktion und einer wohldefinierten größten Relaxationszeit, die proportional zum Quadrat der Masse des Teilchens und bemerkenswerterweise unabhängig von der Temperatur ist. Im zweiten Fall kann wohl eine formale und ebenfalls temperaturunabhängige Relaxationszeit eingeführt werden; sie hängt aber von der Energie ab und ist im übrigen umgekehrt proportional zur Quadratwurzel aus der Masse.

J. Meixner.

Reik, Helmut G.: Die Thermodynamik irreversibler Prozesse als Näherung der Enskogschens Gastheorie. I: Einkomponentensysteme. II: Mehrkomponentensysteme. Z. Phys. **148**, 156—176, 333—354 (1957).

Der Übergang von der Enskogischen kinetischen Gastheorie zur makroskopischen Thermodynamik der irreversiblen Prozesse wird erneut untersucht. Insbesondere wird gezeigt, daß die thermodynamische Methode dann und nur dann eine adäquate Beschreibung gibt, wenn die Verteilung in genügender Genauigkeit durch die Enskog-Lösung $f^{(0)} + f^{(1)}$ dargestellt wird. Gase mit inneren Freiheitsgraden der Moleküle lassen sich in analoger Weise behandeln und der Begriff der thermodynamischen Hemmung wird von kinetischer Seite her beleuchtet. Da die angewandte Methode die Behandlung des modellabhängigen Stoßintegrals vermeidet, so gelten die Ergebnisse allgemein. Die angegebene Methode wird im zweiten Teil auf Gasmischungen angewandt. Die Ergebnisse sind analog.

J. Meixner.

Prigogine, I. and R. Balescu: Irreversible processes in gases. I: The diagram technique. II: The equations of evolution. *Physica* 25, 281—301, 302—323 (1959).

Die irreversiblen Prozesse in einem Gas werden von der Liouvilleschen Gleichung des Gesamtsystems her studiert, indem das asymptotische Verhalten der Lösungen der Liouvilleschen Gleichung für ein großes System ($N \rightarrow \infty$, $\Omega \rightarrow \infty$, $N/\Omega = \text{konstant}$, N = Zahl der Freiheitsgrade, Ω = Volumen des Systems) bei großen Zeiten untersucht wird. Dazu wird die Verteilungsfunktion bezüglich der Koordinaten in eine Fourier-Reihe (Annahme periodischer Randbedingungen) entwickelt und es werden Differentialgleichungen für die zeitliche Änderung der Entwicklungskoeffizienten — sie sind Funktionen der Impulse und der Zeit — hergeleitet. Ihre Diskussion geschieht mit Hilfe der von Feynman in anderem Zusammenhang entwickelten Diagrammtechnik, die das asymptotische Verhalten der Lösung der Liouvilleschen Gleichung aus der Analyse der entsprechenden Diagramme zu ermitteln erlaubt. Die in I entwickelte Methode wird in II auf einige einfache Spezialfälle angewandt. Zunächst werden uniforme Systeme mit schwacher Wechselwirkung in erster und zweiter Näherung untersucht. Dann werden Systeme mit kleinen Abweichungen von der Uniformität betrachtet. Schließlich werden Gase mit beliebig starker Wechselwirkung aber geringer Dichte diskutiert; dieser Fall steht der Boltzmannschen kinetischen Gastheorie am nächsten. Einige allgemeine Betrachtungen über den Zusammenhang mit der von Ivon, Born und Green, Bogoljubov und Kirkwood eingeführten Hierarchie der Verteilungsfunktionen und über den Mechanismus der Irreversibilität (als Fließen von Information aus dem niedrigsten Fourierkoeffizienten in die höheren) schließen sich an.

J. Meixner.

Rastogi, R. P. and R. C. Srivastava: Generalized theory of thermal transpiration and thermal diffusion based on the thermodynamics of irreversible processes. *Physica* 25, 391—397 (1959).

Die von Verff. durchgeführten theoretischen Untersuchungen über das Verhalten zweier Gase, welche sich in zwei verschiedenen durch eine enge Öffnung verbundenen Gefäßen (Temperat. T_1 und T_2) befinden, werden auf Mischungen mit einer einzelnen Reaktion erweitert. In gleicher Weise wird die Theorie der Thermodiffusion ausgedehnt. Verff. nehmen eine nichtlineare Relation zwischen chemischer Reaktionsgeschwindigkeit und Affinität an.

G. Kelbg.

Boerdijk, A. H.: Contribution to a general theory of thermocouples. *J. appl. Phys.* 30, 1080—1083 (1959).

Die Thermodynamik der irreversiblen Prozesse wird angewandt, um den maximalen Wirkungsgrad von Thermoelementen zu berechnen. Die Voraussetzungen sind sehr allgemein gehalten: Die Leiter haben beliebige Gestalt, die Materialeigenschaften hängen in beliebiger Weise von der Temperatur ab, die Zusammensetzung ist inhomogen und anisotrop mit gewissen Einschränkungen. Der Behandlung liegt folgende Näherung zugrunde, die für die praktisch interessierenden Gestalten der Leiter recht brauchbar sein dürfte: In jedem Leiter wird eine Funktion u

definiert, die der Gleichung $\Delta u = 0$ genügt und an den beiden Endflächen die Werte $u = 0$ bzw. $u = 1$ besitzt, während an der Seitenfläche grad u tangential ist. Das Integral $I(u) = \int |\text{grad } u| dF$ über einen Querschnitt $u = \text{constant}$ charakterisiert die Gestalt des Leiters. Die beiden Grundgleichungen für die stationäre Verteilung der Temperatur und des elektrischen Potentials lassen sich dann in gewöhnliche Differentialgleichungen verwandeln, wenn man annimmt, daß Temperatur, elektrisches Potential und Materialkonstanten nur von der oben definierten Koordinate u abhängen und daß die Dichten des elektrischen Stromes und des Wärmestromes parallel zu grad u sind und ihre Beträge ebenfalls nur von u abhängen. Die Auswirkung der Näherung wird diskutiert. *J. Meixner.*

Vliet, K. M. van: Irreversible thermodynamics and carrier density fluctuations in semiconductors. Phys. Review, II. Ser. 110, 50—61 (1958).

Erzeugungs- und Rekombinationsprozesse in einem Halbleiter werden mit der Methode der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse behandelt. Der entwickelte Formalismus gibt eine verlässliche Grundlage für viele Begriffe wie Quasi-Fermi-Niveaus, Rekombinationswiderstände, die vordem in mehr heuristischer Weise benutzt wurden. Das Hauptziel ist jedoch die Berechnung der spontanen Schwankungen in den Trägerdichten bei thermischem Gleichgewicht, wozu das Dissipations-Schwankungstheorem von Callen und Greene angewandt wird. *J. Meixner.*

Brull, Maurice A. and Jack R. Vinson: Approximate three-dimensional solutions for transient temperature distribution in shells of revolution. J. Aero-Space Sci. 25, 742—750 (1958).

Die Bestimmung des instationären Temperaturfeldes in abwickelbaren Schalen bietet große Schwierigkeiten, weil die dreidimensionale Gleichung der Wärmeleitung nur bei einer begrenzten Zahl von Koordinatensystemen trennbar ist. Bei dünnen Schalen erzielen Verff. durch Einführung analoger Vereinfachungen, die man bei Verschiebungen in einer dünnen Schale anzuwenden pflegt, eine angenäherte Gleichung der Wärmeleitung, die sich in ein System von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen aufspalten läßt. Für eine gewisse Klasse von Schalen läßt sich die Lösung der Gleichung der Wärmeleitung in Gestalt der Lösung für eine Platte mit einer zusätzlichen Korrekturlösung darstellen. Es wurde die angenäherte Verteilung der Temperatur für eine sphärische und kegelförmige Schale bestimmt.

Witold Nowacki.

Berger, Martin J. and Lewis V. Spencer: General relation between fluxes from collimated point and plane sources of radiation. Phys. Review, II. Ser. 113, 408—412 (1959).

In this paper concerning the propagation of X-rays through the medium, general connection between the stationary integrated fluxes from a collimated point and plane oblique sources is treated, with the aid of the Fourier-Hankel transform procedure. The manipulation can be considered as a generalization of the plane-to-point transformation for isotropic radiation. The basis of the relation is the linearity of the transport equation for infinite homogeneous medium scattering radiation isotropically. Then it is shown that, making use of the above integral transform, the integrated radiation flux due to point-collimated source can be expressed in terms of a superposition of the integrated radiation flux due to plane sources with different locations and obliquities of emission. Furthermore, the point-source flux moments are similarly obtained as a finite linear combination of the plane-source flux moments. Once a number of the spatial flux moments is determined, then the radiation flux can be calculated by moment-fitting. In virtue of such a separation of variables, the difficulty for obtaining directly exact solution of a two-variable transport problem can be avoided. *S. Ueno.*

Elektrodynamik. Optik:

Taniuti, Tosiya: On wave propagation in non-linear fields. Suppl. Progress theor. Phys. Nr. 9, 69—128 (1959).

In this expository paper the author investigates the wave propagation in non-linear fields, with the following applications to the classical covariant field theories: occurrence of shock waves in gravitational fields, nonlinear scalar fields, nonlinear electrodynamics (in particular the Born-Infeld theory), an example of derivative coupling between spinor fields.

A. Loinger.

Gáspár, R., B. Koltay-Gyarmati and I. Tamássy-Lentei: Determination of electrostatic potentials by series. Acta phys. Acad. Sci. Hungar. 9, 369—380, russ. Zusammenfassg. 380 (1959).

Wird eine Ladungsdichteverteilung der Form $\rho = \rho_0 \delta(r - r_0)$ vorgegeben (Punktladung, „Linien“-ladung, Oberflächenladung), so wird die Poissonsche Gleichung $\Delta\Phi = -4\pi\rho$ so gelöst, daß zunächst die δ -Funktion aus Lösungen Φ_i der Eigenwertgleichung $\Delta\Phi_i = E_i\Phi_i$ (mit den gleichen Randbedingungen wie Φ) aufgebaut wird:

$$\delta(r - r_0) = \sum_i \Phi_i^*(r_0) \Phi_i(r).$$

Dann ist c_i in $\Phi = \sum_i c_i \Phi_i$ bestimmbar, und es ergibt sich

$$\Phi(r) = -4\pi\rho_0 \sum_i \frac{\Phi_i^*(r_0) \Phi_i(r)}{E_i}.$$

Anwendung dieser Lösungsmethode auf 1. geladener Kreisring in geschlossener zylindrischer Dose (zylindersymmetrisches Problem), 2. zwei kurze Rohre, in einem großen enthalten (ebenfalls zylindersymmetrisches Problem), die das Modell für elektronenoptische Zylinderlinsen sind.

D. Kamke.

Loh, S. C.: The calculation of the electric potential and the capacity of a toro by means of toroidal functions. Canadian J. Phys. 37, 698—702 (1959).

Führt man Torus-Koordinaten u, v, w durch die Beziehungen

$$x = a \Im \sin u \cos w A^{-1}, y = a A^{-1} \Im \sin u \sin w, z = a \sin v A^{-1},$$

ein, mit $A = \Im \{ u - \cos v \}$, so ist das Potential im Außenraum eines leitenden Torus

$$\Phi = V (\Im \{ u - \cos v \})^{1/2} \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{p_n(u_1)} \delta_n \frac{q_n(u_1)}{p_n(u_1)} p_n(u) \cos n v.$$

Dabei ist $u = u_1$ die Randkurve (Radius r) des Torusquerschnittes, V das Potential des Torus (gegenüber ∞). $\delta_n = 1$ für $n \geq 1$, $\delta_0 = \frac{1}{2}$, und p_n und q_n sind die Torusfunktionen 1. und 2. Art. Die Kapazität des Torus gegenüber ∞ berechnet sich zu

$C = 16a \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \frac{q_n(u_1)}{p_n(u_1)}$, das Verhältnis zur Kapazität $4\pi a$ einer Kugel vom Radius a hängt nur linear von r/R ab, wenn mit R der mittlere Radius des Torus bezeichnet wird.

D. Kamke.

Stefănescu, Sabba S.: Lignes de champ magnétique ouvertes. Acad. Republ. popul. Romîne, Inst. Fiz., Studii Cerc. Fiz. 9, 7—24, russ. und französ. Zusammenfassg. 22—24 (1958) [Rumänisch].

Les lignes de champ des circuits électriques filiformes, non situés dans un même plan ne sont pas nécessairement des courbes fermées. Pour démontrer cette affirmation, l'A. étudie les lignes H déterminées par 4 courants rectilignes d'égale intensité, situés deux à deux dans deux plans horizontaux, où ils constituent des „angles complets“. Ces angles sont équipollents et se projettent verticalement l'un sur l'autre; le sens des courants est opposé, les cotés, parallèles

Aus der französischen Zusammenfassg.

Gautier, Pierre et Michel Laudet: Calcul des champs. Solutions élémentaires associées à la fonction flux à travers un cercle d'axe Oz . Expressions analytiques de l'induction et de ses dérivées sur Oz . C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 2737—2739 (1959).

Für die Berechnung des magnetischen Feldes wurde von M. Laudet (dies. Zbl. **77**, 413) eine Methode vorgeschlagen, die in vorliegender Arbeit auf die Berechnung der axialen Komponente einer beliebigen magnetischen Induktion angewandt wird, ausgehend von der Messung des magnetischen Flusses durch die kreisförmige Blende. Für den Fluß $\Phi(r, z)$ der magnetischen Induktion \mathfrak{B} durch eine kreisförmige Blende benutzen Verff. die Beziehung.

$$[\Phi(r, z)]_{r \leq a} = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{r I_1(ur) g(u) \exp(-iuz)}{a I_1(ua)} \right) du,$$

woraus sie finden

$$\mathfrak{B}_z(0, z) = (2\pi)^{-3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{ug(u)e^{-iuz}}{a I_1(ua)e^{-iuz}} \right) du.$$

Da $\Phi(a, z)$ experimentell für $z = \zeta_1, \zeta_2, \dots$ bestimmbar ist [seine Werte seien Φ_1, Φ_2, \dots], läßt sich $g(u)$ näherungsweise durch die Φ_k als Summe darstellen, woraus eine Reihendarstellung für \mathfrak{B}_z folgt, deren Koeffizienten $\mathfrak{B}_z^{(m)}(0, z) = \sum \Phi_k b^{(m)}(\xi_k - z)$ berechenbar sind. Dabei ist noch wesentlich, daß die $b^{(m)}$ als „Elementarlösungen“ unabhängig sind von der speziell vorliegenden Feldverteilung, also einmalig zu berechnen sind und in einer späteren Arbeit tabuliert mitgeteilt werden sollen. Für numerische Berechnungen der Feldverteilung werden noch einige Untersuchungen durchgeführt, die erkennen lassen, daß die Reihenausdrücke sehr schnell konvergieren.

J. Picht.

Durandau, P., B. Fagot, J. Barthère et M. Laudet: Détermination de l'induction et de ses dérivées sur l'axe des lentilles électroniques magnétiques. J. Phys. Radium **20**, Suppl. au Nr. 7, 80 A—90 A (1959).

Anwendung des von Laudet (dies. Zbl. **77**, 413) vorgeschlagenen Verfahrens, die magnetische Flußdichte $B(z)$ und ihre Ableitungen nach z auf der Achse eines rotationssymmetrischen Feldes aus Messungen des magnetischen Flusses durch eine achsensenkrechte Kreisfläche zu berechnen, auf eine Reihe von magnetischen Elektronenlinsen. Für Linsen, deren Bohrungsdurchmesser beiderseits des Linsenspaltes der Breite S durch D_1 und D_2 gegeben sind, wird die Lage und Höhe des Feldmaximums in Abhängigkeit von D_1, D_2 und S wiedergegeben. Die Flußdichteverteilung $B(z)$ und ihre Ableitungen werden zur Berechnung der elektronenoptischen Eigenschaften der Linsen benötigt.

F. Lenz.

Archard, G. D.: Trajectory plotting in electron guns. Proc. phys. Soc. **74**, 177—182 (1959).

Beschreibung eines Verfahrens zur Lösung der Poissonschen Gleichung mit Hilfe eines Widerstands-Maschennetzes. Die Raumladung wird dabei dadurch berücksichtigt, daß die Netzpunkte über geeignete bestimmte Widerstände geerdet werden. Da die Bestimmung dieser Ableitungswiderstände aber bereits die Kenntnis der Bahnverläufe voraussetzt, wird ein schrittweises Näherungsverfahren vorgeschlagen, in welchem aus den in n -ter Näherung berechneten Widerständen zunächst die Feldverteilung, daraus die Elektronenbahnen, und aus diesen wiederum die Widerstände in $(n+1)$ -ter Näherung berechnet werden. Meist genügen zwei Näherungsschritte. Das Verfahren wird auf verschiedene Typen von Strahlerzeugern für Elektronenstrahler hoher Perveanz angewandt, und zwar auf die sphärische Kathode, die zylindrische Kathode, die rückwärts strahlende Kathode mit Reflektor und Mittelbohrung nach Hechtel und einen neuen Strahlerzeugertyp, in welchem der Reflektor ebenfalls als zusätzliche emittierende Kathode ausgebildet ist.

F. Lenz.

Relativitätstheorie:

Finzi, Bruno: Movimento gravitazionale. Rend. Sem. mat. fiz. Milano 28, 61—77 (1959).

È il testo di una conferenza tenuta al Seminario matematico e fisico di Milano. In essa l'A. mette in luce le analogie e le differenze tra i tre procedimenti con cui è stato trattato il problema gravitazionale: a) quello classico newtoniano, b) quello relativistico einsteiniano che ha avuto origine nel 1916, c) quello relativistico che ha avuto origine nel 1938 e che si è svolto per opera di Einstein, Infeld ed altri. Col procedimento a), per studiare il movimento di un corpuscolo, va prima integrata l'equazione di campo nel potenziale gravitazionale (di Laplace o di Poisson), che è alle derivate parziali, e poi vanno integrate delle equazioni differenziali ordinarie, costruite mediante il potenziale gravitazionale, ma non dedotte dalla equazione di campo, bensì da una legge estranea ad essa: la legge fondamentale della dinamica. Il procedimento b) è perfettamente analogo. Si integrano prima le equazioni di campo nei potenziali gravitazionali (equazioni gravitazionali), che sono alle derivate parziali, e poi si integrano delle equazioni differenziali ordinarie, costruite mediante i potenziali gravitazionali, ma non dedotte dalle equazioni di campo, bensì da una legge estranea ad esse: la legge della geodetica. Col procedimento c), bastano le equazioni di campo per ricavare le leggi del movimento, senza invocare leggi estranee ad esse. L'A. mette in evidenza la ragione analitica di questa possibilità, che non trova riscontro nello schema classico e che consegue dalla mancanza di linearità delle equazioni di campo. Un'altra conseguenza analitica messa in evidenza dall'A. è che le singolarità delle soluzioni delle equazioni di campo non possono essere prefissate ad arbitrio.

M. Pastori.

Crampin, Joan, W. H. McCrea and D. McNally: A class of transformations in special relativity. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 252, 156—176 (1959).

Verff. untersuchen die zuerst von Born und Biem (dies. Zbl. 81, 219) eingeführte Koordinatentransformation. Diese verknüpft in einem Minkowskischen Raum das Inertialsystem $\{x, t\}$, in dem ein galileisch bewegter Beobachter A ruht, mit einem Bezugssystem $\{\xi, \tau\}$, in dem ein Beobachter B ruht, der sich gegenüber A geradlinig beschleunigt bewegt. Verff. beweisen zunächst die Existenz und (unter gewissen Bedingungen) die Eindeutigkeit der Born-Biemschen Transformation und diskutieren ihre allgemeinen Eigenschaften. U. a. wird gezeigt, daß sie eine 1:1 Abbildung der x, t -Ebene auf die ξ, τ -Ebene ergibt. — Im weiteren werden dann bestimmte Spezialfälle der Born-Biemschen Transformation ausführlich behandelt und an Hand numerischer Beispiele erläutert. Der erste dieser Spezialfälle ist der bereits von Born und Biem diskutierte Fall, daß die Weltlinie des Körpers B in x, t -Koordinaten eine Hyperbel ist. Weiter wird eine stückweise unbeschleunigte Bewegung von B sowie eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung von B in bezug auf A untersucht. U. a. wird gezeigt, daß im letzteren Fall das in ξ, τ -Koordinaten geschriebene Linienelement mittels der Transformation $1 + \xi/a = (1 + 2x_1/a)^{1/2}$ (mit $a = \text{const.}$) in das von Whittaker [Proc. roy. Soc. London, Ser. A, 116, 720—735 (1927)] angegebene quasi-uniforme Pseudo-Gravitationsfeld übergeht. — Verff. beschließen ihre Arbeit mit einer an den Born-Biemschen Spezialfall anschließenden Bemerkung über das „Uhrenparadoxon“. Sie heben hierbei hervor, daß seine Lösung sich ohne weiteres aus der speziellen Relativitätstheorie selbst ergibt.

H. Treder.

Onicescu, Ocatav: La mécanique de certaines particules stables. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 28, 322—330 (1958).

Following up his earlier original approach to mechanics (this Zbl. 82, 172) the author considers a dynamical system which may be described geometrically by means of a point and three angles, while the inertial characteristics of the system are

its relativistic mass and a symmetric tensor of the second order. From a principle similar to that postulated previously (loc. cit.) the "equations of motion" are derived, and these are later extended to the case of the presence of a field. Systems possessing certain symmetry properties are called Dirac particles, and the equations of motion of the latter are given in detail.

H. Rund.

Jankiewicz, C.: Über den Zusammenhang der vom Feld abhängigen Eigenmasse mit dem konform-Minkowskischen Raume. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. 6, 765—769, russ. Zusammenfassg. LIX (1958).

Die Bewegungsgleichungen eines Teilchens mit feldabhängiger Eigenmasse können nach G. Szamosi und L. Infeld (dies. Zbl. 71, 419, 78, 189) aus einer Verallgemeinerung der Lagrangefunktion der speziellen Relativitätstheorie erhalten werden. Verf. zeigt, daß diese Bewegungsgleichungen die Gleichungen einer Geodätischen zur Metrik $g'_{\alpha\beta} = \psi^2 g_{\alpha\beta}$ sind, wo $g_{\alpha\beta}$ der Minkowskische Fundamentaltensor der speziellen Relativitätstheorie und ψ eine Funktion des Weltpunktes x^α ist. Ist $\xi^\alpha(s')$ Weltlinie einer Singularität des ψ -Feldes, so wählt Verf. als Wirkungsfunktion S das Volumintegral über die skalare Krümmung R' , das auf den Singularitätenweltlinien noch um ein Integral über die Eigenzeit des konform-Minkowskischen Raumes vermehrt wird. Die Funktion ψ genügt (im Inertialsystem) der Wellengleichung $\square \psi = -\text{const} \int \delta(x^\alpha - \xi^\alpha) ds$, und als Bewegungsgleichung eines Teilchens mit von $\varphi = m + \psi$ abhängiger Eigenmasse ergibt sich $d/ds [(m + \varphi) d\xi^\alpha/ds] = d\varphi/d\xi^\alpha$ ($m = \text{const.}$).

D. Laugwitz.

Takeno, Hyōitirō: A note on the theory of gravitational waves. Tensor, n. Ser. 9, 73—75 (1959).

Verf. formuliert sein in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 71, 420) gewonnenes Ergebnis neu: Es gibt kein Gravitationsfeld, das in harmonischen Koordinaten die Form $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(z - t)$ hat.

H. Treder.

Komar, Arthur: Covariant conservation laws in general relativity. Phys. Review, II. Ser. 113, 934—936 (1959).

Verf. bemerkt, daß die von Møller (dies. Zbl. 81, 220) angegebene dreidimensional-invariante differentielle Form des allgemein-relativistischen Energiesatzes der allgemein-kovarianten Identität $(\xi^\mu{}_{;\nu} - \xi^\nu{}_{;\mu})_{;\nu\mu} = 0$ entspricht, wenn das Koordinatensystem so gewählt wird, daß $\xi^\nu = \delta_4^\nu$ gilt. Das ξ^ν -Feld läßt sich hierbei als ein eine infinitesimale Koordinatentransformation (Translation) indizierendes Vektorfeld interpretieren.

H. Treder.

Zatzkis, Henry: Model of a linear harmonic oscillator in the general theory of relativity. Phys. Review, II. Ser. 114, 1645—1647 (1959).

Ein Massenpunkt bewege sich reibungslos unter dem Einfluß der Gravitation auf einem Durchmesser einer Kugel idealer Flüssigkeit. In Newtonscher Näherung führt er eine harmonische Oszillation aus; in erster allgemein-relativistischer Näherung für kleine Geschwindigkeiten und Bewegungen in der Nähe des Kugelzentrums oszilliert er ebenfalls harmonisch, jedoch hängt die Frequenz von der Amplitude und der Krümmung des Raumes ab, im allgemeinen Fall ist die Bewegung nicht mehr harmonisch.

H.-G. Schöpf.

Joseph, V.: On apparent luminosity in general relativity. Monthly Not. roy. astron. Soc. 118, 631—639 (1959).

Aus den Erhaltungssätzen für Energie und Impuls eines elektromagnetischen Nullfeldes wird unter Benutzung optischer Koordinaten und Vierbeine eine Formel für die scheinbare Helligkeit hergeleitet, welche in einem beliebigen Raumzeitkontinuum gültig ist.

H.-G. Schöpf.

Quantentheorie:

● Heisenberg, W.: Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie. (B.I.-Hochschultaschenbücher. Bd. 1). Bibliographisches Institut Mannheim 1958. VIII, 117 S. DM 3,80.

Neuausgabe der 1930 erschienenen Abhandlung.

● Heisenberg, W.: Les principes physiques de la théorie des quanta. Traduit de l'Allemand par B. Champion et E. Hochedard. Préface de Louis de Broglie. Paris: Gauthier-Villars 1957. X, 124 p., 2 planches. 1200 F.

Martin, J. L.: Generalized classical dynamics, and the "classical analogue" of a Fermi oscillator. Proc. roy. Soc. London, Ser. A **251**, 536—542 (1959).

Mit Hilfe einer verallgemeinerten Definition der Poisson-Klammern läßt sich auch noch für solche Systeme eine Hamiltonfunktion angeben, für die keine kanonisch konjugierten Variablen und keine Lagrange-Funktion existieren. Dieser Formalismus wird hier auch auf nichtkommutable Variable übertragen, die in einer nicht quantisierten „klassischen“ Theorie zugelassen sein sollen. Eingehend wird der spezielle Fall diskutiert, daß die Variablen antikommutativ sind. Die Quantisierung erfolgt in diesem Falle durch Gleichsetzen der Poisson-Klammern mit Kommutatoren oder Antikommutatoren, je nach den algebraischen Eigenschaften der Poisson-Klammern. So lassen sich in dem hier entwickelten Sinne „klassische“ Theorien auch für gewisse quantentheoretische Systeme angeben, wie es bei Beschränkung auf c -Zahl-Variable nicht möglich wäre, z. B. für „Fermi-Oszillatoren“ mit Variablen, die den Jordan-Wignerschen Vertauschungsrelationen genügen. F. Schlögl.

Martin, J. L.: The Feynman principle for a Fermi system. Proc. roy. Soc. London, Ser. A **251**, 543—549 (1959).

Nachdem in der vorstehend referierten Arbeit für quantenmechanische Systeme mit antikommutierenden Variablen eine „klassische“ Hamilton-Theorie mit Variablen, die keine c -Zahlen sind, entwickelt wurde, in der sich auch eine Lagrange-Funktion angeben läßt, wird hier für diese Systeme ein Feynman-Prinzip in entsprechend erweiterter Form abgeleitet. Dieses stellt ein Analogon zu dem Feynman-Prinzip für die gewohnten kanonischen Systeme dar, nach welchem das Skalarprodukt zweier quantentheoretischer Zustände, in denen die Variablen zu zwei verschiedenen Zeiten vorgegebene Werte annehmen, durch ein Funktional der klassischen Phasenbahnen dargestellt wird. F. Schlögl.

Engelmann, F. und E. Fick: Die Zeit in der Quantenmechanik. Nuovo Cimento, Suppl., X. Ser. **12**, 63—72 (1959).

Zunächst wird noch einmal die Rolle der Zeit als c -Zahl in der konventionellen Quantenmechanik und den verschiedenen Bildern (Heisenberg-, Schrödinger- und Wechselwirkungsbild) bezüglich der Zeitabhängigkeit der darstellenden Operatoren dargelegt. Dann wird für die Observable Zeit ein Operator eingeführt, der bei konservativen Systemen mit der Gesamtenergie die Vertauschungsrelation kanonisch konjugierter Variablen erfüllt, bei nicht konservativen Systemen jedoch vieldedeutig bleibt. Der Erwartungswert dieses Zeitoperators stimmt immer mit der c -Zahl des Zeitparameters der konventionellen Quantenmechanik überein. F. Schlögl.

Henneberger, Walter C.: Exakte Lösungen für die Dipolstrahlung des harmonischen Oszillators. Z. Phys. **155**, 296—312 (1959).

Das System eines nichtrelativistischen elastisch gebundenen Elektrons, das in Dipolnäherung an ein elektromagnetisches Strahlungsfeld gekoppelt ist, besitzt in geeigneter Darstellung einen Hamilton-Operator, der in den Variablen quadratisch ist. Dieser läßt sich nach Van Kampen auf Hauptachsen transformieren und separieren. So läßt sich das System ohne Störungsrechnung streng behandeln. Auf Grund dieser strengen Theorie wird gezeigt, daß es für das Elektron ein Wellenpaket gibt, dessen Schwerpunkt die klassische Bewegung eines gedämpften Oszillators

beschreibt. Ferner wird der Zerfall angeregter Zustände des Oszillators untersucht. Es treten nur Einquanten-Übergänge auf. Die Lebensdauer aller Anregungszustände ist gleich. Sie besitzt den klassischen Wert, den auch die Störungsrechnung liefert.

F. Schlögl.

Goshen (Goldstein), S. and H. J. Lipkin: A simple independent-particle system having collective properties. *Ann. of Phys.* **6**, 301—309 (1959).

Ein System von vielen eindimensionalen Oszillatoren derselben Frequenz ω ohne Wechselwirkung wird auf das Auftreten kollektiver Bewegungen hin untersucht. Es zeigt sich, daß man vom Hamilton-Operator einen kollektiven Teil abspalten kann: $H = H_{\text{coll}} + H_{\text{int}}$, wo H_{coll} mit H_{int} vertauschbar ist. Es ist $H_{\text{coll}} = \frac{1}{2}(P^2 + 4\omega^2 Q^2)$. Hier bedeutet Q im wesentlichen die Größe $\sum x_i^2 - \langle \sum x_i^2 \rangle$, d. h. die Abweichung des Quadrupolmomentes vom Mittelwert. Die Frequenz dieser Schwingung ist — der Anschauung entsprechend — 2ω . Damit ist gezeigt, daß man aus den hoch entarteten Eigenzuständen des Problems solche Linearkombinationen bilden kann, die kollektive Bewegungen beschreiben. Die Energieeigenwerte werden dabei nach Bändern sortiert, deren jedes durch die Eigenwerte $(2J - 1)\hbar\omega$ ($J = n, \frac{1}{2}n, \frac{1}{4}n$, $n = \text{ganze Zahl}$) von H_{int} gekennzeichnet wird und nach den Eigenwerten $M2\hbar\omega$ ($M = J, J + 1, \dots, \infty$) von H_{coll} fortschreitet. Obgleich das Modell natürlich sehr unrealistisch ist, lehrt es doch, daß mindestens ein Typus der kollektiven Bewegungen auf hoher Symmetrie des Hamiltonoperators beruht: Diese Symmetrie erlaubt, die Zustände nach irreduziblen Darstellungen einer Gruppe (hier der symplektischen Gruppe) zu klassifizieren: Zu jeder Darstellung gehört eine Reihe von kollektiven Bewegungszuständen. Die Ausdehnung auf das dreidimensionale Problem wird diskutiert. Die gruppentheoretische Klassifizierung läuft nach demselben Schema wie im eindimensionalen Fall. Nur ist die explizite Angabe der Bänder von Eigenwerten zu schwierig.

H. Kümmel.

Goshen (Goldstein), S. and H. J. Lipkin: A simple model of a system possessing rotational states. *Ann. of Phys.* **6**, 310—318 (1959).

Verff. untersuchen das klassische und quantenmechanische System mit dem Hamiltonoperator $H = \frac{1}{2}m^{-1}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) + \alpha L^2$ ($L = \text{Drehimpuls}$). Sie finden, daß die naive Zerlegung in Radial und Rotationsbewegung nicht zu einer Separation führt. Durch Einführung anderer Variabler gelingt zwar eine Separation in Rotationsbewegung (mit Eigenwerten proportional $J(J+1)$) und „innere Bewegung“. Jedoch sind die Koordinaten für einen im rotierenden Koordinatensystem ruhenden Beobachter von dem Drehimpuls abhängig: Die Bahnen sind rotierende Ellipsen, deren Parameter vom Drehimpuls abhängen. Daher ist die „innere Bewegung“, definiert durch den Beobachter im mitgedrehten System, verschieden von der durch formale Subtraktion der Rotationsbewegung erhaltenen inneren Bewegung. Deshalb hängen die Zustände des gleichen Rotationsbandes nicht in üblicher Weise (rein geometrisch) miteinander zusammen und es existiert ein maximaler J -Wert. Ein ähnliches Verhalten ist im allgemeinen auch bei der Rotationsbewegung der Atomkerne zu erwarten.

H. Kümmel.

Winogradski, J.: Spineurs du second rang à composantes invariants et formalisme spinoriel incluant les parités. *J. Phys. Radium* **18**, 387—394 (1957).

Zuerst werden bei den Spinoren 1. Stufe die Varianztypen zusammengestellt, für die Verf. eigene Namen erfunden hat: Locovarianz, Plexivarianz, Flectovarianz, schließlich die Parität. Dann werden die Spinoren 2. Stufe klassifiziert und alle mit invarianten Komponenten aufgestellt zuerst bei der Gruppe der Transformationen $x^k = \pm x'^k$, dann bei der Gruppe der „Rotationen“ (eigentlichen Lorentztransformationen) und zuletzt bei der allgemeinen Lorentzgruppe.

H. Boerner.

Winogradski, Judith: Sur le principe variationnel des champs spinoriels. *C. r. Acad. Sci., Paris* **249**, 911—913 (1959).

Diskussion der Lagrange-Funktion zu den linearen spinoriellen Gleichungen

$m \Psi + \gamma^k \Psi_{,k} = 0$ ($\Psi = \Psi^*$; Tensorindizes lateinisch, Spinorindizes griechisch) die man $L = a \tilde{\Phi} \Psi + b \tilde{\Phi} \gamma^k \Psi_{,k} + c \Phi_{,k} \gamma^k \Psi$ schreiben kann (a, b, c numérisc $b \neq c, a/(b - c) = m$), wo Φ ein zu Ψ kontragredienter Spinor ist, dessen Komponenten Linearformen mit konstanten Koeffizienten der Komponenten von Ψ und Ψ^* sind. Die Koeffizientenschemata müssen daher Spinoren 2. Stufe mit bei der allgemeinen Lorentz-Gruppe invarianten Komponenten sein. Diese wurden von Verf. in eine früheren Arbeit (s. vorstehendes Referat) alle explizit angegeben, was nun hier an Möglichkeiten durchzudiskutieren erlaubt.

H. Boerner.

Lomont, J. S.: Dirac-like wave equations for particles of zero rest mass, and their quantization. Phys. Review, II. Ser. **111**, 1710—1716 (1958).

Partant d'une représentation matricielle des équations de Maxwell analogues de celle des équations de Dirac, l'auteur étudie les équations d'ondes du type $\alpha_\mu \nabla^\mu \psi = 0$ avec $\alpha_0 = -I$, $(\alpha_i)^2 = I$, $\alpha_i \alpha_j = i \alpha_k$ ($i, j, k = 1, 2, 3$). L'étude algébrique complète de ce système lui permet d'en préciser les représentations irréductibles et les caractères des corpuscules décrits par ces représentations. La quantification de ces équations par la méthode générale de la théorie des champs peut être obtenue sans difficulté.

G. Petiau.

Fronsdal, C.: On the theory of higher spin fields. Nuovo Cimento, Suppl. X. Ser. **9**, 416—443 (1958).

L'A. présente une nouvelle formulation générale de la théorie des particules de spin quelconque selon les idées initiales de Fierz et de Pauli et Fierz. Le formalisme algébrique est précisé et développé notamment pour le cas du spin 3/2. L'A. examine également le moment magnétique des fermions selon cette théorie et la représentation des opérateurs de polarisation.

G. Petiau.

Harris, Joseph David: Green's functions for particles of arbitrary spin. Phys. Review, II. Ser. **112**, 2124—2126 (1958).

L'A. décrit les particules à spin par des équations de la forme $(\alpha^\mu \partial_\mu - i k) \psi = 0$ les matrices α^μ se transformant suivant une représentation irréductible du groupe des rotations. Les fonctions ψ satisfont à une équation d'ordre supérieur en \square associée généralement aux différents états de masse propre du corpuscule. On montre que cette équation minimale détermine complètement les fonctions de Green pour ce système du premier ordre, les particules à masses propres multiples distinctes ou les fonctions de Green sans singularité sur le cône de lumière.

G. Petiau.

Brunin, O. and S. Hjalmar: Relativistic wave equations for spin-2 particles with unique mass. Ark. Fys. **14**, 49—60 (1958).

L'A. étudie une représentation des particules de spin 2 au moyen d'un système d'équations d'ondes linéaire irréductible dans lequel la fonction d'onde à 14 composantes est constituée par l'association d'un tenseur symétrique du second rang d'un vecteur. Les propriétés de l'algèbre des matrices décrivant cette représentation sont examinées en détail et notamment le terme de masse. Les équations du second ordre peuvent se réduire à l'équation de Klein-Gordon avec une masse unique.

G. Petiau.

Lurié, David: Une généralisation de la transformation de Foldy-Wouthuysen. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **44**, 577—588 (1958).

L'A. écrit sous forme matricielle les équations d'ondes décrivant une particule de spin 1 par deux vecteurs ψ_μ , X_μ et un tenseur antisymétrique du second ordre $G_{\mu\nu}$ sous la forme $G_{\mu\nu} = d_{\mu\nu} \psi_\nu - d_{\nu\mu} \psi_\mu + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (d_\rho X_\sigma - d_\sigma X_\rho)$, $d_\mu G^{\mu\nu} + m^2 \psi^\nu = d_\mu G^{\mu\nu*} + m^2 X^\nu = 0$. Il généralise pour cette équation la transformation de Foldy-Wouthuysen.

G. Petiau.

Ford, Kenneth W., David L. Hill, Masami Wakano and John A. Wheeler: Quantum effects near a barrier maximum. Ann. of Phys. **7**, 239—258 (1959).

Das Verhalten der Schrödingerschen Einteilchen-Zustände und -Niveaus an einer Potentialschwelle in der Nähe ihres parabolischen Maximums wird untersucht. Der Durchdringungsfaktor für sonst freie Teilchen weicht beim Potentialmaximum von dem Gamowschen Wert ab. Wenn die Teilchen auf beiden Seiten der Schwelle gebunden sind, sind die Terme paarweise in Niveaus mit geraden und ungeraden Zustandsfunktionen aufgespalten. Diese Aufspaltung nimmt für wachsende Energien, die über der Schwelle liegen, asymptotisch ab. Für den Fall, daß das Teilchen nur auf der einen Seite der Schwelle gebunden ist, wird die Phasenverschiebung untersucht, die durch die Schwelle zustande kommt. *F. Schlögl.*

Ford, Kenneth W. and John A. Wheeler: Semiclassical description of scattering. *Ann. of phys.* **7**, 259—286 (1959).

Die halbklassische Behandlung der Streuung beruht auf folgender Näherung: Die Phasenverschiebungen werden nach dem JWKB-Verfahren berechnet, die Drehimpulswerte l der Partialwellen werden als groß vorausgesetzt und als kontinuierliche Werte behandelt. In dieser Näherung ergibt sich eine einfache Relation zwischen der Streuamplitude und der klassischen Ausbreitungsfunktion $\theta(l)$ (den für Abstoßung und Anziehung mit verschiedenen Vorzeichen versehenen Ablenkungswinkel in Abhängigkeit von l). Es werden besondere Streutypen diskutiert, die jeweils einem typischen Verhalten von $\theta(l)$ entsprechen. Diese Typen sind: „Interferenz“, bei der $\theta(l)$ mehrere Zweige besitzt; „Regenbogenstreuung“, bei der $\theta(l)$ ein relatives Extremum annimmt; „glory-Streuung“, bei der $\theta(l)$ glatt durch 0 oder ein ganzzahliges Vielfaches von $\pm\pi$ läuft (die Bezeichnung „glory“ ist dem meteorologischen Effekt starker Rückwärtsstreuung von Licht an Nebeltropfen entnommen); „orbiting“, wenn $\theta(l)$ eine Singularität besitzt, die einer Spiralbahn entspricht, welche asymptotisch auf eine Kreisbahn einläuft. Es wird diskutiert, wie ein beobachteter differentieller Streuquerschnitt Auskunft über $\theta(l)$ und damit über das Streupotential gibt. *F. Schlögl.*

Ford, Kenneth W. and John A. Wheeler: Application of semiclassical scattering analysis. *Ann. of Phys.* **7**, 287—322 (1959).

Die in vorstehend besprochener Arbeit allgemein entwickelte Analyse wird an konkreten Beispielen durchgeführt. Diese sind: Streuung von magnetischen Einzelpolen an geladenen Teilchen; Streuung von Alpha-Teilchen an Kernen unter Einfluß von Absorption; Streuung von Atomen an Atomen am Beispiel von K^+ -Ionen an Argon; Streuung von Elektronen oder μ -Mesonen an Kernen. *F. Schlögl.*

Dolph, C. L. and F. Penzlin: On the theory of a class of non-self-adjoint operators and its applications to quantum scattering theory. *Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I* **263**, 36 p. (1959).

Im ersten Teil wird für eine Klasse von nicht-selbstadjungierten Operatoren eine mathematische Theorie entwickelt, die im Gegensatz zur allgemeinen Theorie nicht-selbstadjungierter Operatoren von Lifšic den Gebrauch unendlicher Matrizen vermeidet. Operatoren der betrachteten Klasse treten bei der Lösung von Streuproblemen auf, die — obgleich sie zeitabhängige physikalische Vorgänge beschreiben — als zeitunabhängig unter Auferlegung der Sommerfeldschen Ausstrahlungs-Bedingung behandelt werden. — Im zweiten mehr physikalischen Teil wird zunächst eine für Streuprobleme wichtige hinreichende Bedingung dafür entwickelt, daß die Eigenlösungen eines vorgegebenen Hamilton-Operators und eines diesem zugeordneten „freien“ Hamilton-Operators asymptotisch gleich werden. Die im ersten Teil entwickelte Theorie wird dann auf zwei spezielle quantenmechanische Probleme sowie auf die Wigner-Eisenbudische Theorie der Reaktionsmatrix im eindimensionalen Fall angewendet. Diese Probleme werden schließlich als Spezialfälle eines allgemeineren Problems betrachtet. *F. Schlögl.*

Bourret, Richard: Particle equations from non-associative algebras. Canadian J. Phys. **37**, 183—188 (1959).

The relativistic equations for the physical fields are usually written employing matrix representations. But, a formalism based on non associative algebras may be useful in studying such relativistic equations: some examples are exposed and studied above all in connection with the gauge transformations invariance. (It is an open question whether such a procedure can give new results or, at least, bring to a more transparent and simple method in treating the field theory problems).

L. Tenaglia.

Taylor, John G.: Dispersion relations and Schwartz's distributions. Ann. of Phys. **5**, 391—398 (1958).

The author establishes the equivalence between strict causality and the requirement of the dispersion relations under the very general condition that the time delay distribution $A(f)$ is a tempered distribution in the sense of L. Schwartz. This leads to a boundedness property which is needed in the proof of the "edge of the wedge" theorem.

G. Temple.

Nagy, K. L. and J. Rzewuski: On the equivalence of a certain class of non-local and higher order field theories. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. **7**, 93—96, russ. Zusammenfassg. VII (1959).

Die Arbeit stellt die Synthese zweier früherer Arbeiten je eines der Verff. dar. 1. J. Rzewuski zeigte (dies. Zbl. **53**, 174), daß die Quantisierung einer bestimmten Klasse von nichtlokalen Feldtheorien zurückgeführt werden kann: auf die kanonische Quantisierung von Feldern mit Lagrangefunktionen höherer Ordnung. 2. K. L. Nagy bewies (Nuovo Cimento, X. Ser. im Druck), daß Bogoljubows Methode zur Eliminierung der unphysikalischen Konsequenzen einer indefiniten Metrik im Hilbert-Raum äquivalent zu einer gewöhnlichen, aber nichtlokalen Theorie ist. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß eine bestimmte Klasse nichtlokaler Theorien äquivalent zu Feldtheorien mit Lagrangefunktionen höherer Ordnung ist, wenn im Hilbertraum der letzteren Bogoljubows Methode angewandt wird. Es gelingt so, alle (wohlbekannten) Schwierigkeiten einer Theorie höherer Ordnung zu eliminieren.

K. S. Wohlrab.

Pócsik, G.: On the integrals of motion of the generalized Dirac-equation of Rayski. Acta phys. Acad. Sci. Hungar. **8**, 277—283 (1958).

L'A. étudie les intégrales premières de moments cinétiques dans la théorie bilocale de Rayski (ce Zbl. **67**, 214) dans laquelle le champ spinoriel libre $\psi(x, r)$ satisfait à l'équation de Dirac généralisée. $\gamma_\mu(V_\mu + a\bar{V}_\mu + \kappa)\psi(x, r) = 0$. L'A. suggère l'étude d'une équation plus générale de la forme $(\gamma_\mu V_\mu + a\beta_\mu\bar{V}_\mu + \kappa)\psi(x, r) = 0$ γ_μ et β_μ étant deux systèmes de matrices de Dirac indépendants.

G. Petiau.

Ogievetsky, V. I. and Kuang-Chao Chou: Charge symmetry properties and representations of the extended Lorentz group in the theory of elementary particles. Nuclear Phys. **10**, 235—243 (1959).

The projective representation of the proper and improper Lorentz group, including the charge conjugation operation (extended Lorentz group) is applied to the nucleon and K -meson fields, and to the nucleon-pion and K -meson — baryon interactions. For each field, the authors fix the transformation properties of the space and time inversion operators, and of the charge conjugation operator, both with their commutation relations: that fixes the structure of the projective representation of the extended Lorentz group. Important results obtained thereby are, among others: each irreducible representation of the extended Lorentz group implies the occurrence of the charge multiplets: the nucleon field is represented by a 8-component spinor, whose free Lagrangian is invariant by a Pauli-transformation: there

exists a connection among baryon and charge conservation, and charge symmetry. The authors have planned a series of works on such argument. That is agreeable, because the method they develop appears to be very interesting. *L. Tenaglia.*

Riazuddin: Charge radius of pion. Phys. Review, II. Ser. **114**, 1184—1186 (1959).

The electromagnetic mass of the pion is written in terms of a timeordered product of the photon current between pion states; this expression is assumed to satisfy a dispersion relation, and is evaluated by including only the one-pion intermediate state in the absorptive part. This leads to the perturbation theory result multiplied by the pion form factor. By choosing two models for the form-factor containing the pion charge radius as a parameter, the experimental $\pi^+ - \pi^0$ mass difference is obtained with charge radius 0.46 and 0.56×10^{-13} cm. By this approach K^+ will be heavier than K^0 . *R. F. Streater.*

Fedorov, F. I.: Projection operators in the theory of elementary particles. Soviet Phys., JETP **35** (8), 339—344 (1959), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. **35**, 493—500 (1958).

Les particules de spin quelconque étant décrite par une équation générale du type (1) $(\gamma_k \nabla_k + \kappa) \psi = 0$, l'opérateur $\gamma_k \nabla_k$ satisfait à une équation minimale dont les valeurs propres correspondent aux diverses valeurs de la masse propre du corpuscule. L'A. étudie les projecteurs permettant d'isoler dans l'équation (1) les contributions respectives de ces états de masse. *G. Petiau.*

Sekine, Katsuhiko: Parity non-conservation and the algebra of elementary particles. Nuclear Phys. **11**, 604—614 (1959).

The proof of the parity non conservation for the weak interactions rests, numerically speaking, on a factor depending on the coupling constants. Hence it is inferred that some representation properties deeper than the usually accepted ones, govern the weak interactions. Starting from this point of view, the representation properties of the electron — neutrino field are investigated by introducing a "lepton" space characterized by a set of vectors, whose commutation relations with the Dirac and Pauli matrices are fixed taking into account the coupling constants of the weak interactions. From such assumptions, one gets an algebra, whose irreducible representations satisfy equations of motion and anticommutation relations of physical interest. The lagrangian obtained in such a way is characterized by the non-unitarity of the improper Lorentz transformations and by some unitary factors affecting the field operators anticommutators. *L. Tenaglia.*

Okubo, S.: Note on the conserved current in the weak interactions. Nuovo Cimento, X. Ser. **13**, 292—302 u. ital. Zusammenfassg. 302 (1959).

Es wird unter bestimmten plausiblen Annahmen gezeigt, daß sich für die schwachen Wechselwirkungen, die die Strangeness nicht erhalten, ein Wechselwirkungsstrom, der einer Kontinuitätsgleichung genügt, nicht konstruieren läßt. Vernachlässigt man jedoch die Massenunterschiede der Baryonen, so ist diese Konstruktion möglich. Verf. diskutiert, unter welchen Bedingungen dieser erhaltene Strom zur Folge hat, daß die schwache Wechselwirkung nicht renormiert wird. *G. Kramer.*

Zimmermann, W.: One particle singularities of Green functions in quantum field theory. Nuovo Cimento, X. Ser. **13**, 503—521 (1959).

It is shown that, in agreement with perturbation theory but using only the asymptotic condition, the vacuum τ -function has singularities of the form of a delta function or pole in the momenta, coming respectively from the intermediate vacuum and one-particle states. These singularities are exhibited explicitly. The case in which bound states exist is also treated. The analytic continuation to complex momenta is not considered except for forward dispersion relations: the residue at the "bound state" term is related to the vertex function. *R. F. Streater.*

Kernphysik:

Villi, C.: On the momentum dependence of the nuclear potential. *Nuovo Cimento* X. Ser. 10, 259—291 (1958).

Es wird gezeigt, daß der gemeinsame mathematische Hintergrund der Störungsrechnung und der Bruecknerschen Methode der Streuphasen in einer hyperbolischen Differentialgleichung für die potentielle Energie eines Nukleons im Kern zu suchen ist. Diese gibt die Abhängigkeit sowohl vom Nukleonenimpuls als auch von der Dichte wieder und besitzt Lösungen, die mit Störungstheorie aus keinem der bekannten 2-Körperpotentiale hergeleitet werden können. Gerade diese Lösungen aber führen zur Sättigung von Energie und Dichte, wie auch zum richtigen Ausdruck für die Symmetrienergie und für das komplexe Kernpotential. Die Abhängigkeit des Nukleonenpotentials vom Impuls des Nukleons dient zu einer Definition einer effektiven Masse des Nukleons und wird korrespondenzmäßig diskutiert. Es wird gezeigt, daß die bisherigen Theorien der Absättigung auf partikulären Lösungen der hier gefundenen Gleichung aufbauen. *H. Volz.*

Thouless, D. J.: Application of perturbation methods to the theory of nuclear matter. *Phys. Review*, II. Ser. 112, 906—922 (1958).

Energie und Eigenfunktion für Kernmaterie werden störungstheoretisch untersucht. Die Beiträge werden durch Feynman-Diagramme dargestellt. In der Brueckner Theorie werden gewisse Terme (Leiterbeiträge) als t -Matrix aufsummiert. Die Bedeutung der selbstkonsistenten Wahl des Einteilchenpotentials wird diskutiert. Diese Wahl soll eine Klasse von Diagrammen aus der störungstheoretischen Reihe zum Verschwinden bringen und so die Konvergenz der Reihe verbessern. Dies läßt sich niemals exakt erreichen. Praktisch gangbare Wege werden vorgeschlagen. Der Status dieses Problems ist jedoch im wesentlichen noch unbefriedigend. Es wird gezeigt, daß die „rearrangement energy“ notwendig auftritt und welche Diagramme dieser entsprechen. Eine Abschätzung ergibt etwa 14 MeV. Sie ist vor allem durch den hard core verursacht. Man kann für die rearrangement energy typische Terme in das selbst konsistente Einteilchenpotential einsetzen und so die Näherung zu verbessern suchen. Der Beitrag zur Bindungsenergie beträgt etwa 1 MeV. Jedoch ist der Einschluß solcher Terme im Rahmen der Bruecknerschen Näherung nicht sehr konsequent, da dann auch andere Beiträge (von Mehrteilchenkorrelationen) mitgenommen werden sollten. *H. Kümmel.*

Soloviev, V. G.: Conditions of superfluidity of nuclear matter. *Nuovo Cimento*, X. Ser. 10, 1022—1031 (1958).

The methods developed in the theory of superconductivity are applied to the study of the properties of nuclear matter. The interaction that brings to superfluidity of nuclear matter is considered to be weak. Nucleon-nucleon interaction is taken in the most general form. Asymptotic solutions of the system of equations are found, which allow one to obtain the conditions of superfluidity of the nuclear matter. The conditions of superfluidity are in general equivalent to the requirement of predominance of attraction in nucleon-nucleon potentials at the Fermi surface energy. The data on nucleon-nucleon potentials allow one to conclude that the conditions of superfluidity of nuclear matter are fulfilled.

Zusammenfassung des Autors.

Clark, John W. and Eugene Feenberg: Simplified treatment for strong short-range repulsions in N -particle systems. I: General theory. *Phys. Review*, II. Ser. 113, 388—399 (1959).

Verff. untersuchen den Ansatz $\psi = e^S \Phi$ (Φ = Modellwellenfunktion, z. B. Wellenfunktion des Schalenmodells) für die Wellenfunktion eines Mehrteilchensystems. Der Erwartungswert der Energie $\langle H \rangle$ wird erheblich vereinfacht, wenn man

die Differentialgleichung

$$\frac{\hbar^2}{2M} \sum_k [(V_k S)^2 + A_k S] = V_R$$

(mit V_R = starker abstoßender Potentialanteil) fordert: V_R verschwindet dann vollkommen aus $\langle H \rangle$. Damit kann man relativ einfache Clusterentwicklungen für $\langle H \rangle$ angeben.

H. Kümmel.

Werner, E.: The solution of the Bethe-Goldstone equation for non-zero centre-of-mass momentum. *Nuclear Phys.* **10**, 688—697 (1959).

Die Lösung der Bethe-Goldstone-Gleichung für den allgemeinen Fall nicht verschwindenden Gesamtimpulses wird untersucht. Man erhält einen Satz von Integro-differentialgleichungen, in dem die Beiträge zu verschiedenen Drehimpulsen miteinander gekoppelt sind. Die von Brueckner und Gammel [*Phys. Review*, II. Ser. **109** 1023—1039 (1959)] benutzte Methode der Mittelung über die Winkel folgt hier als Näherung aus der strengen Theorie.

H. Kümmel.

Emery, V. J.: On the existence of solutions of the Brueckner equations for a many-fermion system. *Nuclear Phys.* **12**, 69—83 (1959).

Es wird gezeigt, daß für jedes vernünftige Potential einige der Integralgleichungen für die Bethe-Goldstone-Wellenfunktionen keine Reihenentwicklung zulassen. In der Hauptsache wird jedoch die Existenz der Lösung der homogenen Gleichungen untersucht: Falls diese existieren, gibt es keine „normalen Lösungen“ (d. h. Lösungen der homogenen Gleichungen). Solche „anormalen“ Lösungen treten für anziehende Potentiale fast immer auf: Entweder durch eine „gewöhnliche Singularität“ in dem Kern der Integralgleichung, wenn das freie Fermionenpaar Bindungszustände hat; oder durch eine „Cooper-Singularität“, die nur durch den Einfluß des Pauliprinzip (Verbotenheit der Streuung in besetzte Zustände) entsteht. Letztere tritt für rein anziehende Potentiale fast immer auf. Sie kann durch das Vorhandensein gewöhnlicher Singularitäten zufällig unterdrückt werden. Für rein abstoßende Potentiale gibt es nur normale Lösungen. Für Kernmaterie ist das Auftreten der Cooper-Singularität wahrscheinlich, für flüssiges He 3 sehr unwahrscheinlich.

H. Kümmel.

Osborn, R. K. and E. D. Klema: Dynamics of an elastic ellipsoid. *Nuovo Cimento*, X. Ser. **9**, 791—812 (1958).

This paper presents an attempt to provide a dynamical basis for the kinematical scheme employed in previous papers by the authors [*Phys. Review*, II. Ser. **100**, 822 (1955); **103**, 833 (1956); *Nucl. Phys.* **2**, 454 (1956); **3**, 571 (1957)] to correlate certain nuclear data. Even-even nuclei are presumed to be completely characterizable by the three Euler angles and a shape variable determining the excentricity of the incompressible spheroidal nucleus. Odd nuclei are presumed to be completely characterizable in terms of the same degrees of freedom as even-even nuclei plus the coordinates of the odd particle. The detailed development of the kinetic energy of this model is given. The connection of the model considered in this paper and the Bohr-Mottelson hydrodynamical model is pointed out. The extent is discussed to which the dynamical system considered incorporates the kinematical scheme previously used by the authors for nuclear data correlation.

G. Györgyi.

Skyrme, T. H.R.: Nuclear moments of inertia. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **70**, 433—444 (1957).

A general formula for the moment of inertia of an atomic nucleus is derived starting from a variational condition. This expresses the requirement that the moment of inertia \mathcal{I} must be so chosen as to minimize the difference between the energy values of the actual nuclear Hamiltonian H and those given by the well known formula $\frac{\hbar^2}{2} I(I+1)/2\mathcal{I}$. The general formula

$$\frac{1}{2} \mathcal{I} = [\langle H J^2 \rangle - \langle H \rangle \langle J^2 \rangle] / [\langle J^4 \rangle - \langle J^2 \rangle^2]$$

obtained in this way (J = operator of nuclear spin) is used to evaluate the moment of inertia assuming a determinant of single particle wave functions. Applied to the case of a deformed oscillator well with the self-consistent equilibrium deformation a moment of inertia equal to one-half of the rigid value is obtained, for small deformations, whereas the cranking model of Inglis gives the rigid value in these circumstances. It is suggested that this difference is due to the fact that the formula given in this paper for the moment of inertia incorporates most of the effects of the residual interactions between nucleons which are not taken into account in the Inglis cranking model. Also a discussion of the case of a more general potential well including velocity dependence is given.

G. Györgyi.

Bès, Daniel R.: The γ -dependent part of the wave functions representing γ -unstable surface vibrations. Nuclear Phys. 10, 373—385 (1959).

Deformation of the nuclear core is described by the coordinates β and γ in the body-fixed system, as introduced by A. Bohr. (β and γ characterize the deviation from spherical and axial symmetry, respectively). The article aims at solving the eigenvalue equation of the γ -part of the nuclear Hamiltonian (also containing the Eulerian angles θ_i .) A "basic set" of functions of γ , θ_i , belonging to a fixed value I of the angular momentum, but to different values of the "seniority" is constructed, using a creation operator technique. The general solutions of the eigenvalue equation are found in the form of linear combinations of the "basic set" functions, with coefficients only depending of γ . In the appendix, the differential equations for the coefficients are given for $I \leq 6$, and the explicit solutions for the lowest number of phonons are constructed.

G. Györgyi.

Verlet, Loup: Contribution à l'étude du modèle optique du noyau. Ann. de Physique, XIII. Sér. 4, 643—687 (1959).

In this paper attempts have been made to relate the parameters of the optical potential for neutron induced nuclear reactions to the parameters of nucleon-nucleon interaction. The optical potential is calculated using second order perturbation theory (in the intermediate states a constant potential acting on nucleons is assumed), starting from different simple two-nucleon potentials (Yukawa and Gaussian). In the case of Gaussian radial dependence a choice of the strength, the range and the parameter characterizing the spin dependence of the potential is possible, which reproduces the singlet and triplet effective ranges and scattering lengths corresponding to low energy nucleon-nucleon scattering experiments. The parameters of the odd part of the two-nucleon potential (not fixed by the low energy scattering data) can be so adjusted as to reproduce the correct energy dependence of the optical model parameters. The nuclear volume energy per particle is calculated with the aid of the two-nucleon potential used and the value $-13,5$ MeV is obtained. The exchange character of this two-nucleon potential comes near to the „Rosenfeld mixture“. It is found, that the Pauli principle has an essential role in ensuring a good convergence of the perturbation series.

G. Györgyi.

Greider, Kenneth R.: Deuteron-pickup reaction in an optical-model approximation. Phys. Review, II. Ser. 114, 786—794 (1959).

Verschiedene formale Beschreibungsweisen der Stripping- und Pickupreaktion werden diskutiert, besonders im Hinblick darauf, welche von ihnen den Prozeß am besten beschreibt, wenn man ein- und auslaufende Teilchenwellenfunktionen als Lösungen eines Problems mit komplexem Potential beschreibt. Die schließlich benutzte Formel weicht nicht von der üblichen Approximation ab, mit ihrer Hilfe und mit dem WKB-Verfahren werden geschlossene Ausdrücke für den differentiellen Wirkungsquerschnitt hergeleitet. Die Ergebnisse stehen in guter Übereinstimmung mit experimentellen Werten für Energien von 95 und 145 MeV.

H. A. Weidenmüller.

Brândus, I. and A. Săndulescu: Proper frequencies of the compressible nucleus in an unstatic statistical model. *Acad. Republ. popul. Romîne, Inst. Fiz., Studii Cere. Fiz.* 8, 433—444, russ. und engl. Zusammenfassg. 443—444 (1957) [Rumänisch].

Balian, Roger: Densité de niveaux d'un système de nucléon en interaction dans une couche. *Nuclear Phys.* 13, 594—620 (1959).

Using perturbation theory, the grand partition function is calculated for the completely degenerate system of interacting nucleons inside a shell. The level density is then derived by the Darwin-Fowler method. The purpose is to compare these results to exact levels known for a p -shell. The method gives fairly good results, even for a small number of particles, provided that the self-consistent field is taken into account, and the calculation is carried out in a coherent way; there is no advantage in performing the saddle point method after integration of the level density.

Zusammenfassung des Autors.

Kumar, K.: Statistical derivation of the nuclear rotational energies. *Nuovo Cimento, X. Ser.* 13, 591—604 (1959).

Nuclear rotational energy and vibration-rotation interaction are considered on the basis of the Fermi-gas model. Interactions between nucleons are taken into account and their effect on the rotational and rotation-vibration energies is discussed. It is shown that rotational energies are not influenced by the internucleonic interactions whereas vibration-rotation energies considerably depend on them. The moment of inertia which determines the rotational energies is found to be sensitive only to the way in which angular momenta of the individual nucleons are coupled to produce the nuclear spin, whereas the vibrational frequency is shown to be insensitive to this. The experimental trend of the moments of inertia is reproduced by a model in which only nucleons outside a certain „core” produce the nuclear spin. Surface and effective mass effects are also discussed.

G. Györgyi.

Micu, Mircea: L'excitation des noyaux par le moment électrique quadrupolaire du projectile. *C. r. Acad. Sci., Paris* 249, 1208—1210 (1959).

Dans ce travail nous allons évaluer la contribution du moment électrique quadrupolaire dans l'excitation coulombienne.

Aus der Einleitung.

Downs, B. W. and R. H. Dalitz: Analysis of the Λ -hypernuclear three-body systems. *Phys. Review, II. Ser.* 114, 593—602 (1959).

Die Bindungsenergie des Hypertriton ΛH^3 (bestehend aus Proton, Neutron und Λ -Hyperon), nämlich 2,3 MeV, die sich im Grundzustand aus der Bindungsenergie des Deuterons und der Bindungsenergie des Λ -Hyperons zusammensetzt, wird nach der Variationsmethode unter Zugrundelegung einer 6-parametrigen Versuchsfunktion berechnet. Für den Grundzustand mit dem Isotopen Spin $T = 0$ erhält man eine obere Grenze für die Wechselwirkung Λ -Hyperon-Nukleon. Die Spinabhängigkeit dieser Kraft erhält man durch den Vergleich mit der analogen Analyse des ΛHe^3 . Die Diskussion des $T = 1$ Triplets Λn^3 , ΛH^3 , ΛHe^3 ergibt keine Möglichkeit eines gebundenen Zustandes.

Th. Sexl.

Mehta, M. L.: On the singularities of a generalized Brueckner t -matrix. *Nuclear Phys.* 12, 333—341 (1959).

Bei der Berechnung der Bindungsenergie in Bruecknerscher Näherung (d. h. nur Zweiteilchenkorrelationen berücksichtigt) treten für separable Potentiale auch dann Divergenzen auf, wenn man neben der Teilchen-Teilchen-Wechselwirkung auch Loch-Loch-Wechselwirkung einschließt. Das wird mit Hilfe des von Chrischholm und Squires [*Nuclear Phys.* 13, 156—163 (1959)] benutzten zeitunabhängigen und des von Bloch [*Nuclear Phys.* 7, 451—458 (1958)] eingeführten „zeitabhängigen“ Formalismus streng bewiesen. Die Ergebnisse gelten wohl für ein beliebiges attraktives Potential.

H. Kümmel.

Fonda, Luciano and Roger G. Newton: Threshold behavior of cross sections of charged particles. *Ann. of Phys.* 7, 133—145 (1959).

Der Wirkungsquerschnitt einer Kernreaktion verläuft gewöhnlich dort unregelmäßig, wo die Energie der einfallenden Partikel die Schwelle eines neuen Re-

aktionskanals erreicht (z. B. vertikale Tangente nach Wigner). Hier wird der besondere Fall betrachtet, daß in der neuen Reaktion zwei entgegengesetzt geladene Partikel entstehen. Offenbar muß jeder Querschnitt bereits unterhalb einer solchen Schwelle gewisse Resonanzen aufweisen, welche der Bildung der beiden Partikel in einem gebundenen Coulombzustand entsprechen; sie liegen aber zu nahe beieinander, um beobachtet werden zu können. Wenn man den Reaktionsquerschnitt über diese Häufung von Resonanzen mittelt, findet man an der Schwelle eine endliche Unstetigkeit. Auch dieser Effekt ist in den experimentell zugänglichen Fällen kaum zu beobachten; entweder ist der Sprung zu klein, oder die verfügbare Auflösung der Apparatur zu gering.

E. Breitenberger.

Glendenning, Norman K.: Theory of direct-interaction inelastic scattering. Phys. Review, II. Ser. 114, 1297—1311 (1959).

A model is proposed for the description of direct-interaction inelastic scattering in which resolved final states of the target nucleus are observed. This model is expected to be useful in deducing the spins and parities of the excited states of nuclei. Zusammenfassung des Autors.

Goldfarb, L. J. B. and J. R. Rook: The polarization of deuterons and particles of arbitrary spin. II. Nuclear Phys. 12, 494—509 (1959).

Im Anschluß an den ersten Teil (dies. Zbl. 82, 441) werden die Richtungs- und Polarisationsverteilungen der in einer Kernreaktion emittierten Partikeln für den Fall elastischer Streuung in der Nähe einer einzelnen Resonanzstelle allgemein behandelt. Coulomb- und Potentialstreuung werden ausführlich in Rechnung gezogen. Die Ergebnisse werden auf die Streuung von Deuteronen an ^4He angewandt, welche bei 1,069 MeV eine scharfe d -Wellen-Resonanz aufweist; die Interferenz von resonanter und nichtresonanter Streuung führt dort zu bemerkenswert hoher Polarisation der abgehenden Deuteronen.

E. Breitenberger.

Nakamura, Kôsukey and Michitoshi Soga: Use of antisymmetrized wave function for deuteron stripping reaction. Progress theor. Phys. 21, 837—855 (1959).

Unter Einbeziehung des Pauliprinzipis wird mit feldtheoretischen Methoden der Wirkungsquerschnitt für Strippingreaktionen in seiner allgemeinen Form hergeleitet. Unter verschiedenen vereinfachenden Annahmen ergeben sich die übliche direkte Amplitude sowie die von mehreren Autoren diskutierten Austauschterme. Diese Terme werden für den Fall der Reaktion $0^{17}(d, p)0^{18}$ berechnet.

H.-A. Weidenmüller.

Rosen, S. P.: A spherical wave expansion for double β -decay. Canadian J. Phys. 37, 780—785 (1959).

Das allgemeine Matrixelement für den doppelten Betazerfall ohne Emission von Neutrinos wird für eine sehr allgemeine Betawechselwirkung weiter entwickelt, indem für die Wellenfunktionen und Operatoren Multipoldarstellungen eingesetzt werden.

G. Kramer.

Castoldi, Luigi: Nozione di „albedo“ e questioni connesse nella teoria della diffusione dei neutroni termici. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 28, 48—57 (1958).

Für stationäre Neutronenflußverteilungen wird der Begriff des Albedo und die Anzahl der Passagen durch eine Fläche in bekannter Weise (Glasstone, Edlund, The Elements of Nuclear Reactor Theory, London 1958) definiert und an einigen Beispielen (Platte, Kugel, Zylinder) erläutert.

F. Cap.

Wing, Milton G.: Solution of a time-dependent, one-dimensional neutron transport problem. J. Math. Mech. 7, 757—766 (1958).

Verf. löst das folgende eindimensionale monoenergetische zeitabhängige Transportproblem: Ein Stab der Länge x aus Spaltmaterial wird von einem Neutron mit der Geschwindigkeit c zur Zeit $t = 0$ an seinem Ende getroffen. Das Neutron wird Spaltprozesse erzeugen, so daß Neutronen entstehen. Gefragt wird nach der Anzahl $U(x, t)$ der Neutronen, die am Stabende innerhalb des Zeitintervalls $[0, t]$ herauskommen. In einer Vorarbeit (Bellman, Kalaba und Verf., dies. Zbl. 81, 443)

wurde für $U(x, t)$ die folgende Gleichung abgeleitet:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{2}{c} \frac{\partial U}{\partial t} = \lambda^{-1} \int_0^t \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} U(x, t-z) dz + \lambda^{-1}.$$

Diese Gleichung wird nun für die Bedingungen $U(x, 0) = 0$; $U(0, t) = 0$ durch Transformation in eine Integralgleichung überführt und durch Laplace-Transformation gelöst. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung werden bewiesen. Die Lösung wird, insbesondere für große t , ausführlich diskutiert.

F. Cap.

Birkhoff, Garrett and Richard S. Varga: Reactor criticality and nonnegative matrices. J. Soc. industr. appl. Math. 6, 354—377 (1958); Errata. Ibid. 7, 343 (1959).

Verff. wenden die Perron-Frobenius Algebra nichtnegativer Matrizen zur strengen mathematischen Grundlegung des Begriffes und zur Berechnung der criticality (Eintritt des kritischen Zustandes) eines Atomreaktors an. Das Beispiel eines aus mehreren Gebieten bestehenden Reaktors wird im Rahmen der zeitabhängigen diffusionstheoretischen Mehrgruppentheorie (räumlich veränderlicher Diffusionskoeffizient) ausführlich diskutiert.

F. Cap.

Bau der Materie:

Kaagjäv, L. and S. T. Ma: Relativistic calculation of the imaginary part of radiative level displacement for the hydrogen atom. Nuovo Cimento, X. Ser. 8, 432—440 (1958).

Jauch and Rohrlich [Theory of Photons and Electrons, Cambridge Mass. 1955, p. 408] rederived the well known Weisskopf-Wigner results on the natural line width, attributing the exponential decrease of an excited state to an imaginary part of the radiative displacement. The present paper contains a relativistic generalization of the above treatment. The authors start from the Feynman expression for the self-energy of a bound electron and work out its imaginary part to the same degree of accuracy as its real part (Lamb shift), as calculated by Baranger, Bethe and Feynman (this Zbl. 51, 212). The results for the $2S$ and $2P$ levels are compared with the nonrelativistic ones; it is found that there are no relativistic corrections to the desired order of accuracy. An explanation of this fact is suggested.

A. Loinger.

Gryziński, Michał: Classical theory of electronic and ionic inelastic collisions. Phys. Review, II. Ser. 115, 374—383 (1959).

Unter Benutzung von Ergebnissen von Chandrasekhar (dies. Zbl. 25, 144) werden die klassischen Streuquerschnitte für den Stoß zweier durch Coulombkräfte wechselwirkenden Teilchen in Abhängigkeit vom Energieverlust ΔE des einen Teilchens bzw. vom Energieverlust und dem Streuwinkel des einen Teilchens berechnet. In zwei Spezialfällen (Massenverhältnis $m_1/m_2 = 1$ und $m_1/m_2 \ll 1$) werden die Streuquerschnitte explizit angegeben. Durch Integration über ΔE wird der Streuquerschnitt für Stöße mit Energieverlusten größer als eine gewisse Energie U (Ionisierungsenergie) bestimmt. Einige so bestimmte Ionisations- und Anregungsquerschnitte durch Elektronenstoß, Abbremsquerschnitte und differentielle Stoßquerschnitte für unelastische Streuung von Elektronen in H_2 werden numerisch berechnet und mit den experimentellen Daten verglichen. Die Übereinstimmung ist sehr gut. Daß frühere, klassische Berechnungen die Experimente nicht befriedigend wiedergaben, wird darauf zurückgeführt, daß dort die Bahnbewegung der Atom-elektronen vernachlässigt wurde. Es wird vermutet, daß der Ramsauer-Effekt klassischer Natur ist und auf mechanischer Resonanz des einfallenden Elektrons mit dem umlaufenden Atomelektron beruht.

H. W. Streitwolf.

Tchen, C. M.: Kinetic equation for a plasma with unsteady correlations. Phys. Review, II. Ser. 114, 394—411 (1959).

Als eine Verallgemeinerung der Boltzmann-Gleichung wird die Bewegungsgleichung für ein Plasma in Form einer generalisierten Fokker-Planck-Gleichung abgeleitet, wobei veränderliche Korrelationen sowie Nicht-Markoffsches und nicht-lineares Verhalten berücksichtigt werden. Es werden sowohl die binären als auch die ternären Korrelationen zwischen verschiedenen Teilchenarten verschiedener Temperaturen benutzt. Die Koeffizienten der Bewegungsgleichung hängen von den Wechselwirkungsgesetzen für Teilchenpaare ab und werden durch Relaxationserscheinungen beeinflusst. Das effektive Reibungspotential besteht aus zwei Teilen: der statische Teil ist isotrop und entspricht dem Debye-Potential, der dynamische Teil ist bezüglich der Bewegungsrichtung axialsymmetrisch und verursacht die dynamische Reibung. Die Ergebnisse zeigen, daß bei langsamen Teilchen die Reibung proportional zur Geschwindigkeit wächst, während sie für schnelle Teilchen umgekehrt proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit abnimmt. Dabei ergibt sich die maximale Reibung für den Fall, daß die kinetische Energie gleich der mittleren thermischen Energie des Teilchens ist. Die Drei-Teilchen-Wechselwirkung, welche hauptsächlich die Abschirmungserscheinungen beeinflusst, sichert die Konvergenz der Koeffizienten für den Fall, daß Wechselwirkungskräfte großer Reichweite vorliegen. Da man auf diese Art eine wohldefinierte Reichweite der Wechselwirkung erhält, kann erwartet werden, daß der Gültigkeitsbereich dieser Bewegungsgleichung größer ist als der für die Boltzmann-Gleichung. Wird der Abschirmungsterm linearisiert, so stimmt die Reichweite erwartungsgemäß mit dem Debye-Radius überein. Vernachlässigung der Relaxation und Linearisierung der Bewegungsgleichung ergibt die klassische Fokker-Planck-Gleichung mit konvergenten Koeffizienten.

W. Legler.

Hettner, G. und H. Wagner: Fourier-Analyse des elektrischen Mikrofeldes in einem Plasma. I. Ann. der Physik VII. F. 4, 89—95 (1959).

Es wird das Frequenzspektrum einer beliebigen Komponente des elektrischen Feldes in einem Plasma mit Hilfe der Fourier-Analyse untersucht. Dabei werden nur die Coulomb-Felder der Elektronen berücksichtigt, da nur diese zu den höheren Frequenzen einen wesentlichen Beitrag liefern. Bei der Rechnung wird angenommen, daß die Elektronen einen einheitlichen Geschwindigkeitsbetrag haben. Die Wechselwirkung der geladenen Teilchen, die in einer zweiten Mitteilung genauer berücksichtigt werden soll, wird hier nur in Form der Abschirmwirkung des Plasmas in Rechnung gestellt. Dies geschieht in der Art, daß nur diejenigen Elektronen berücksichtigt werden, die sich im Innern einer Kugel mit dem „Debye-Radius“ um den Aufpunkt befinden. Unter diesen Voraussetzungen erhält man für die Beträge der Fourier-Amplituden eine Gauß-Verteilung. Das wahrscheinlichste Frequenzspektrum wird angegeben.

W. Legler.

Villi, C.: On a theorem concerning the single particle energy of a Fermi gas with interactions. Nuclear Phys. 9, 306—313 (1958).

A different approach for the derivation of the Hugenholtz and Van Hove theorem is outlined, and the physical content of its foundation is examined. The Hugenholtz and Van Hove theorem states that at the density minimizing the total energy of the nucleus, the average volume energy per nucleon is equal to the total energy of the most energetic nucleon. If $\mathcal{E}(k, \kappa)$ is the total energy of a nucleon of momentum $k \leq \kappa$ in the interior of a nucleus whose average total energy $\langle W(\kappa) \rangle$ possesses a minimum at a certain value of k_F of the Fermi momentum κ , the theorem is expressed by the equation $\langle W(k_F) \rangle / A = \mathcal{E}(k_F, k_F)$. (1). The average total energy $\langle W(\kappa) \rangle$ and the total energy of a nucleon $\mathcal{E}(k, \kappa)$ are given by

$$(2) \quad \langle W(\kappa) \rangle = \frac{3A}{\kappa^3} \int_0^\kappa \left[\left(\frac{k^2}{2M} \right) + \frac{1}{2} V(k, \kappa) \right] k^2 dk,$$

$$(3) \quad \mathcal{E}(k, \kappa) = (k^2/2M) + V(k, \kappa),$$

where $V(k, \kappa)$ is the potential energy of a nucleon. The condition necessary for the minimum of $\langle W(\kappa) \rangle$ to occur at the density $\rho(k_F)$ means that there exists a value k_F of κ at which the pressure $P(\kappa)$ is zero:

$$(4) \quad P(k_F) = (2 k_F^2 / 3 \pi^2) [d \langle W(\kappa) \rangle / d \kappa]_{\kappa = k_F} = 0.$$

From the above equations it follows that

$$(5) \quad \langle W(k_F) \rangle / A = \mathcal{E}(k_F, k_F) - Q(k_F) / 2 k_F^2,$$

where

$$(6) \quad Q(k_F) = k_F^2 V(k_F, k_F) - \int_0^{k_F} k^2 \left[\frac{\partial V(k, \kappa)}{\partial \kappa} \right]_{\kappa = k_F} dk.$$

This result shows that the validity of the theorem requires the condition (7) $Q(k_F) = 0$. It is shown that if the potential energy obeys the hyperbolic differential equation

$$(8) \quad [\partial^2 / \partial k^2 + (2/k) \partial / \partial k - \partial^2 / \partial \kappa^2 + (2/\kappa) \partial / \partial \kappa] V(k, \kappa) = 0,$$

then the necessary and sufficient condition that $V(0, 0) = 0$ is $Q(\kappa) = 0$. (9). Hence the Hugenholtz and Van Hove theorem, stated in eq. (1), appears to be related to eq. (8), and its validity for a system in equilibrium [$P(k_F) = 0$] follows from the obvious condition that the potential energy of a nucleon of zero momentum is zero at zero nuclear density [$Q(k_F) = 0$]. The fundamental role played by the hyperbolic differential equation (8) in describing the nucleus as a Fermi gas with interaction is discussed.

H. Kanazawa.

March, N. H.: Kinetic and potential energies of an electron gas. *Phys. Review*, II. Ser. **110**, 604—605 (1958).

Für den Fall Coulombscher Wechselwirkung in einem Fermigas lautet das Virialtheorem $2T + V = -r_s (\partial E / \partial r_s)$, wo T , V und E die kinetische, potentielle und Gesamtenergie und r_s den Radius einer Kugel, die 1 Elektron enthält, bedeuten. Die Formel ermöglicht eine Aufspaltung der Energieausdrücke in potentielle und kinetische Anteile. Dies wird angewendet auf die Resultate a) von M. Gell-Mann und K. A. Brueckner (dies. Zbl. **80**, 445), b) von E. P. Wigner, dies. Zbl. **10**, 231), von denen die ersteren für den Grenzfall großer, die letzteren für den Grenzfall kleiner Dichte gelten. Das Verhältnis von kinetischer zu potentieller Korrelationsenergie geht von $-\frac{1}{2}$ (für $r_s \rightarrow 0$) nach 0 (für $r_s \rightarrow \infty$).

H. Volz.

Bell, J. S.: Many-body problem with one-body forces. *Proc. phys. Soc.* **73**, 118—119 (1959).

In einem entarteten Fermigas mit 2-Körperkräften treten bei Anwendung der Störungsrechnung Singularitäten auf, die mit der Wechselwirkung von Teilchen in der Nähe der Fermioberfläche zusammenhängen. Diese können teils von physikalischer Bedeutung, teils aber auch nur durch die Art des Störungsansatzes bedingt sein. Die letztere Möglichkeit wird hier illustriert durch ein Beispiel, wo in ein Fermigas ein Anziehungszentrum — ohne eigene gebundene Zustände — eingebettet wird. Die gestörten Eigenfunktionen werden bei der zugrunde gelegten üblichen Störungsrechnung — bei welcher durch Einführung der Reaktionsmatrix an Stelle des Störpotentials auch höhere Näherungen mitgenommen werden — in der Nähe der Fermigrenze singulär, was normalerweise auf gebundene Zustände hindeuten würde, die hier aber nicht vorhanden sind. Der Effekt kommt also nur durch das Störungsverfahren herein.

H. Volz.

Brout, R.: Variational methods and the nuclear many-body problem. *Phys. Review*, II. Ser. **111**, 1324—1333 (1958).

Verf. schlägt das folgende Variationsprinzip zur Berechnung der Energie und Wellenfunktion des Viel-Fermionensystems vor: Als Ansatz für die Wellenfunktion wird eine Einteilchenmodellwellenfunktion mit Einschluß von Zweiteilchenanregungen benutzt. Der Erwartungswert der Energie wird variiert, und zwar sowohl hinsichtlich der Einteilchenwellenfunktionen als auch der Zweiteilchenanregungs-

Abe, Ryuzo: Ground state energy of Bose particle system. *Progress theor. Phys.* **20**, 785—797 (1958).

Ein System von Bose-Teilchen mit Wechselwirkung wird betrachtet 1. nach den Methoden der Störungsrechnung, die anwendbar ist, wenn die Matrixelemente der Wechselwirkungsenergie klein sind, 2. mit der Methode der Streumatrix, die auch auf starke Wechselwirkung anwendbar ist. Das niederste Glied in der Dichte läßt sich nach 1. in Spezialfällen, nach 2. allgemein und geschlossen angeben. Es werden Ergebnisse angegeben a) für abstoßenden „core“ endlicher bzw. unendlicher Höhe, b) anziehendes Rechteckpotential mit hard-core, c) anziehendes r^{-n} -Potential mit hard-core (Sutherland), d) Lennard-Jones-Potential. Es zeigt sich, daß die Ergebnisse entscheidend davon abhängen, ob ein gebundener 2-Teilchen-Zustand existiert. Der Zusammenhang des Verfahrens mit den Methoden von Brueckner und Sawade (dies. Zbl. **81**, 451; 452) wird diskutiert. *H. Volz.*

Zubarev, D. N. and Ju. A. (Ju. A.) Cerkovnikov (Tserkovnikov): On the theory of the phase transition in a nonideal Bose gas. *Soviet Phys., Doklady* **3**, 603—607 (1959), Übersetz. von *Doklady Akad. Nauk SSSR* **120**, 991—994 (1958).

Es wird gezeigt, daß man für den Hamiltonoperator

$$H = E_0 + \sum_k \varepsilon(k) b_k^+ b_k + \sum_{k \neq k'} \frac{v(k-k')}{2V} b_k^+ b_k b_{k'}^+ b_{k'} + \sum_{k \neq k'} \frac{v(k-k')}{2V} b_k^+ b_{-k}^- b_{-k'}^- b_{k'},$$

mit $E_0 = [\frac{1}{2} v(0) V^{-1}] N(N-1)$; b_k : Boseoperatoren; $\varepsilon(k) = k^2/2m - \mu$; μ : chem. Potential; $v(k)$: Fourierkoeffizient der Wechselwirkungsenergie zur Wellenzahl k , die thermodynamischen Funktionen für $N, V \rightarrow \infty$, $v = V/N = \text{const}$ asymptotisch richtig berechnen kann. Man bekommt ein Spektrum elementarer Anregungen, welches unterhalb einer bestimmten Übergangstemperatur das Landausche Kriterium der Superfluidität erfüllt. Die Entropie am Übergangspunkt ist stetig, die spezifische Wärme zeigt einen endlichen Sprung. Diese Eigenschaften stimmen mit denen von He II überein. *H. Volz.*

Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

● **Beer, Arthur** (edited by): *Vistas in astronomy*. Vol. 3. (Special Supplement No. 7 to the *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*.) London-Oxford-New York-Paris: Pergamon Press 1960, VII, 245 p. £ 6 net.

Diese „Einblicke“ in die z. Zt. aktuellen Probleme der Astronomie erstrecken sich im nunmehr vorliegenden 3. Band (Bd. I, II London-New York-Paris-Los Angeles 1957) auf die Teilgebiete: Instrumente, Photometrie, Spektroskopie, Geophysik, Sonnensystem, Sterndynamik, Sternentwicklung, Milchstraße und Kosmologie. Die 21 Beiträge bekannter Fachleute sind ihrem Thema und ihrer äußeren Gestaltung nach grundverschieden; wohl gerade deshalb wirkt die Zusammenstellung so reizvoll. Es sei Ref. erlaubt, einige der durchwegs englisch geschriebenen Artikel besonders anzuführen: R. v. d. R. Woolley, Die Dynamik von Sternen der Sonnenumgebung; J. B. Irwin, Die ersten 70000 (eine Diskussion aller Sterne bis zur 8,5 Größenklasse bezüglich ihrer Position, Eigenbewegung, Helligkeit, Farbe, Spektraltypus, Entfernung, Radialgeschwindigkeit, Polarisierung); S. Gaposchkin, Die visuelle Milchstraße (Helligkeitsprofile im visuellen Licht); O. J. Eggen, Farbe, Leuchtkraft und Entwicklung der Sterne (Farben-Helligkeitsdiagramme vor allem von Sternhaufen); B. E. J. Pagel, Die Anregung von Emissionslinien bei Sternen vom frühen Spektraltypus (Theorie der Sternatmosphären, Strahlungstransport, expandierende Hüllen usw.); 4 kurze Berichte über die beiden hellen Kometen im Jahre 1957, Arend-Roland und Mrkos; H. von Klüber, Die Bestimmung von Einsteins Licht-Ablenkung im Gravitationsfeld der Sonne (eine Behandlung sämtlicher bisherigen Überlegungen und Beobachtungen). Aufmachung, Druck und Papier sind dem Verlag entsprechend vorbildlich. *W. Strohmeier.*

• **Mitrinović, R. S.:** Die kleinen Planeten. [Male planete.] (Matematička Biblioteka. 10.) Beograd: Katedra za Matematiku, Elektrotehnički Fakultet 1959. 44 S. [Serbo-kroatisch].

Meffroy, Jean: Sur l'origine du terme séculaire pur de la perturbation du troisième ordre des grands axes. C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 1773—1776 (1959).

Robe, H.: Étude de l'orbite équatoriale d'un satellite artificiel dans l'hypothèse d'un ellipsoïde terrestre à 3 axes inégaux. Bull. Soc. roy. Sci. Liège **28**, 207—221 (1959).

Es wird der Versuch gemacht, die Störungen der elliptischen Bahn eines künstlichen Satelliten zu ermitteln, der die Erde in der Äquatorebene umläuft. Vor allem wird die Frage diskutiert, welche Störungen zu erwarten sind, wenn die Erde die Gestalt eines dreiachsigen Ellipsoids besitzt. Es ergibt sich, daß für geozentrische Distanzen des Satelliten, die kleiner als zwei Erdhalbmesser sind, die Störungen durch Sonne und Mond gegen diejenigen vernachlässigt werden können, die von der polaren Abplattung und von einer Elliptizität des Erdäquators herrühren. Die letztere ist noch von merklichem Einfluß auf die Bahnbewegung, wenn die Halbachsen der Äquatorellipse um 1 km differieren; insbesondere wachsen die Störungen dieser Art durch Resonanz stark an, wenn die Umlaufzeit des Satelliten mit der Rotationszeit der Erde niedrig kommensurabel ist. Zwei Beispiele werden gerechnet, für eine nahezu kreisförmige und für eine stark elliptische Bahn.

K. Stumpff.

Elsässer, H. und H. Siedentopf: Zur Theorie der astronomischen Szintillation. I. Z. Astrophys. **48**, 213—230 (1959).

Im Gegensatz zu bisher veröffentlichten Arbeiten über die Szintillationserscheinungen zeigen Verff., daß der Einfluß der Gesamtatmosphäre berücksichtigt werden muß, da die Annahme einer relativ eng begrenzten Schicht, innerhalb der die Szintillation entstehen soll, zu Widersprüchen mit der Beobachtung führt. Um eine Theorie der Szintillation zu entwickeln, wird eine Modellatmosphäre angenommen, die aus vielen übereinandergelagerten turbulenten Schichten aufgebaut gedacht ist, deren Störungen sich nach statistischen Gesetzen aufsummieren. Im vorliegenden Teil I der Arbeit werden Amplitudenszintillation und Richtungsszintillation (seeing) zenitnaher Sterne nach der geometrischen Optik untersucht. Danach nehmen die Brechungsindexschwankungen $\sigma(n)$ der Luft in dem hier zugrunde gelegten Modell exponentiell mit der Höhe in der Atmosphäre ab; der Exponentialfaktor wurde dabei aus dem Vergleich der Amplitudenszintillation in Meereshöhe mit den beobachteten Werten der Verff. in 3600 m Höhe (Jungfraujoch) abgeleitet. Der Beitrag der Schichten verschiedener Höhe z zur Richtungsszintillation entspricht einem exponentiellen Abfall $\exp(-az)$, der Beitrag zur Amplitudenszintillation ist proportional $z^2 \exp(-az)$; das Maximum dieser Kurve liegt für die beobachteten Werte bei $z = 8$ km. Im Teil II wird eine wellenoptische Diskussion der Szintillation folgen, die die Grenzen des Gültigkeitsbereiches der geometrischen Optik aufzeigt; außerdem soll auf die Abhängigkeit von der Zenitdistanz eingegangen werden.

W. Strohmeier.

• **Schmidt, Otto:** A theory of the origin of the earth. Four lectures. London: Lawrence & Wishart 1959. 139 S. 4/6 s.

Lubimova, H. A.: Thermal history of the earth with consideration of the variable thermal conductivity of its mantle. Geophys. J. roy. astron. Soc. **1**, 115—134 (1958).

Die Ausgangstemperaturverteilung (vor $4,5 \cdot 10^9$ Jahren) liegt in dieser Arbeit für die ganze Erde unter der Schmelztemperatur. Sie ist abgeleitet aus thermodynamischen Überlegungen über die Zusammenballung einer proplanetaren Gas- und Staubwolke. Von den radio-aktiven, wärmeerzeugenden Mineralen wird angenommen, daß sie zunächst gleichmäßig über den Planeten verteilt sind. Nach $1,5 \cdot 10^9$ Jahren

aber kommt es zu einer Ansammlung dieser Wärmequellen in den äußeren Mantelschichten. Die weitere thermische Geschichte wird beherrscht von der normalen und Strahlungs-Wärmeleitung. Zur Lösung der nicht-linearen und nicht-stationären Wärmeleitungsgleichung benutzt die Verfasserin die Methoden der Greenschen Funktionen und ein nicht im einzelnen angegebenes Verfahren der hydrologischen Analogie. Sie erhält für den heutigen Zustand des Erdinneren einen festen Mantel, flüssigen Kern mit festem inneren Kern, ein Bild, das sich auch mit neuern seismischen Untersuchungen deckt.

W. Kertz.

Evernden, J. F.: Finite strain theory and the earth's interior. *Geophys. J. roy. astron. Soc.* **1**, 1—8 (1958).

Neue Werte für die auf Druck Null reduzierten Dichte- und Inkompressibilitätswerte an der Grenze zwischen Erdmantel und -kern werden abgeleitet unter Benutzung des Bullenschen Erdmodells. Die Werte unterscheiden sich von den von F. Birch aus rein seismischen Daten berechneten. Diese Abweichung ergibt sich, weil Birch von anderen Gleichungen ausgeht. Die Unzulässigkeit dieser Ausgangsgleichungen wird diskutiert.

W. Kertz.

Takeuchi, H.: Torsional oscillations of the earth and some related problems. *Geophys. J. roy. astron. Soc.* **2**, 89—100 (1959).

Scherungswellen in Kugeln, deren Dichte und elastische Konstanten Funktionen der Tiefe sind, werden mit Hilfe der Variationsrechnung behandelt. Zur Erprobung des Verfahrens wird es zunächst auf das entsprechende, schon gelöste Problem beim Halbraum angewandt. Für die Kugel werden dann die Konstanten des von K. E. Bullen vorgeschlagenen Erdmodells zugrunde gelegt. Die Lösungen stehen in Übereinstimmung mit anderen Berechnungen und zeigen einen stetigen Übergang von den elastischen Schwingungen der gesamten Kugel zu den Oberflächenwellen.

W. Kertz.

Knopoff, L.: Surface motions of a thick plate. *J. appl. Phys.* **29**, 661—670 (1958).

Die Bewegungen einer dicken Platte werden theoretisch und im seismischen Modellversuch studiert. In der Platte werden durch punktförmigen „puls-artigen“ Druck, normal zur Oberfläche, seismische Wellen erzeugt. Eine exakte Lösung dieses Problems existiert für das Epizentrum. Die experimentellen Ergebnisse (*P*-, *S*- und *PPP*-Einsatz) werden dieser Lösung entsprechend gedeutet. In derselben Weise können dann auch Beobachtungen außerhalb des Epizentrums gedeutet werden, und so kann der Modellversuch als „Analogrechenmaschine“ benutzt werden. Es wird gezeigt, wie man auf sehr einfache Weise Näherungslösungen für Ankunftszeiten und Amplituden solcher „Einsätze“ berechnen kann. Für seismische Zwecke wird die Benutzung der Amplituden dieser Einsätze neben den reinen Laufzeiten empfohlen. Das ist der nächste Schritt auf dem Wege zur vollständigen Lösung.

W. Kertz.

Ullmann, Wolfgang: Das Problem der konstanten Übertragungsfaktoren eines mechanischen Empfängers. *Veröff. Inst. Bodendynamik und Erdbebenforschung Jena* **61**, 33 S. (1958).

Die „Übertragungsfaktoren“ kennzeichnen die Einwirkung der Bewegung der Aufhängungsvorrichtung auf die schwingende Masse eines Seismographen oder sonstigen Schwingungsmessers. In der klassischen Theorie der Seismographen, in der man nur mit kleinen Amplituden rechnet, sind diese von der Amplitude unabhängig. Es wird gezeigt, daß dies für große Amplituden bei allen praktisch brauchbaren Seismographenanordnungen nicht mehr zutrifft.

W. Kertz.

Carstoin, John: Induced electromagnetic fields in the earth. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **45**, 204—208 (1959).

Das Problem dieser Arbeit ist spezieller, als das Thema vermuten läßt. Es soll der Einfluß der von außen kommenden erdmagnetischen Variationen auf eine leit-

fähige Flüssigkeit im Erdinnern betrachtet werden. Für eine solche Flüssigkeit werden die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen aufgeschrieben und gezeigt, wie man aus Lösungen der Wärmeleitungsgleichung Lösungen der Gleichungen des vorliegenden Problems gewinnen kann.

W. Kertz.

Parker, E. N.: Interaction of the solar wind with the geomagnetic field. *Phys. Fluids* 1, 171—187 (1958).

Der „solare Wind“ besteht aus Partikeln, die, von der Sonne kommend, mit einer Geschwindigkeit von rund 1000 km/sec um die Erde herumströmen. Es wird gezeigt, daß für ein solches Partikelgas praktisch keine Viskosität existiert. An der Grenze zwischen Partikelgas und Erdmagnetfeld entwickeln sich Instabilitäten von der gleichen Art, die Helmholtz für die Grenzfläche zwischen zwei sich gegeneinander bewegendenden nicht-viskosen Flüssigkeiten fand. Von diesen Instabilitäten werden durch einen Fermischen-Beschleunigungsmechanismus Ionen auf hohe Geschwindigkeiten gebracht. Für diese berechnet man ein Energiespektrum, das dem beobachteten Energiespektrum der Nordlicht-erzeugenden Partikel sehr ähnlich ist. Die berechnete Eindringtiefe des solaren Windes entspricht auch der Lage der Polarlichtzone auf der Erde. Es wird weiter gezeigt, daß das Zusammenpressen der erdmagnetischen Feldlinien auf der Sonnenseite der Erde ein nahezu homogenes magnetisches Störfeld parallel zur geomagnetischen Erdachse in der Nähe der Erde erzeugt, wie es beim Beginn eines erdmagnetischen Sturmes beobachtet wird. Die Hauptphase des erdmagnetischen Sturmes dagegen wird durch das „Wegblasen des Erdmagnetfeldes“ erklärt. Auch dieser Effekt bewirkt in der Nähe der Erde ein nahezu homogenes Störfeld antiparallel zur geomagnetischen Achse, deshalb glaubt Verf. auf den hypothetischen äquatorialen Ringstrom verzichten zu können.

W. Kertz.

Weenink, M. P. H. and P. Groen: A semi-theoretical, semi-empirical approach to the problem of finding wind effects on water levels in a shallow partly-enclosed sea I, II. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. B* 61, 205—213, 198—204 (1958).

Für ein Meeresbecken, das in idealisierter Weise der Form der Nordsee nachgebildet ist, wird ein halbtheoretisches, halbempirisches Näherungsverfahren zur Berechnung der Erhebung der Flüssigkeitsoberfläche durch einen konstanten oder zeitlich veränderlichen Wind entwickelt. Es wird dabei eine Erhebung proportional dem Quadrat der Windgeschwindigkeit angenommen, wobei als Windgeschwindigkeit 75% des Gradientwindes eingesetzt wird. Auch für die Bodenreibung wird ein Ansatz gemacht, der sich als Summe aus einem konstanten Anteil der Wandreibung und einem linear mit der Windtrift anwachsenden Anteil zusammensetzt. Für dieses Modell wird die Gleichgewichtsbewegung unter dem Einfluß von Corioliskräften aufgestellt. Der Volumenstrom muß die Kontinuitätsgleichung erfüllen und kann daher aus einer Stromfunktion abgeleitet werden. Die Stromfunktion wird aus anderen Anteilen zusammengesetzt, die für sich die Randbedingungen an den verschiedenartigen Rändern erfüllen. Die Theorie wird im zweiten Teil auf das Beispiel der Nordsee angewandt. Im Schlußabschnitt wird der Einfluß eines nichtstationären Windfeldes betrachtet.

W. Wuest.

Wippermann, F.: Zur Erdboden-Randbedingung bei atmosphärischen Diffusionsprozessen. *Beitr. Phys. Atmos.* 32, 43—52, engl. und französ. Zusammenfassg. 4 (1959).

Bei atmosphärischen Diffusionsvorgängen, die sich über der Erdoberfläche abspielen, tritt in der Randbedingung am Erdboden im allgemeinen ein Wechselwirkungsfaktor auf. Dies entspricht der Tatsache, daß die auf die Erdoberfläche auftreffenden Partikel zum einen Teil absorbiert und zum anderen Teil reflektiert werden. Verf. gelingt eine Deutung dieses Wechselwirkungsfaktors durch das Studium der Zufallsbewegung gegen eine elastische Wand.

J. Zieryp.